Äärellisulotteinen lineaarialgebra, kevät 2015.
Harjoitus 2.
21.01.2015.

1. Olkoot X ja Y joukkoja ja olkoon $f\colon X \to Y$ kuvaus.
   a) Oletetaan, että $X \neq \emptyset$. Osoita, että f on injektio jos ja vain jos on olemassa $g\colon Y \to X$ siten, että $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Onko tällainen kuvaus g silloin yksikäsitteinen? Mitä tapahtuu kun $X = \emptyset$?
   b) Osoita, että f on surjektio jos ja vain jos on olemassa $g\colon Y \to X$ siten, että $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Onko tällainen kuvaus g silloin yksikäsitteinen?
   Tässä $\mathrm{id}_A\colon A \to A$ tarkoittaa joukon A identtistä kuvausta.

2. Olkoon H kokonaislukujen muodostaman ryhmän $(\mathbb{Z}, +)$ *aliryhmä*. Osoita, että on olemassa $n \in \mathbb{Z}$ siten, että
$$H = n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$$
   Onko luku $n \in \mathbb{Z}$ tällöin yksikäsitteinen?

3. Osoita, että joukko
$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$
   on kunta, jos se varustetaan tavallisilla reaalilukujen yhteen- ja kertolaskulla. Osoita, että tässä kunnassa polynomiyhtälöllä $x^2 - 2 = 0$ on ratkaisuja, mutta polynomiyhtälöllä $x^2 - 3 = 0$ ei ole ratkaisuja. Onko kuvaus $f\colon \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \to \mathbb{C}$, joka on määritelty kaavalla
$$f(a + b\sqrt{2}) = a + bi,\ \ a, b \in \mathbb{Q},$$
   kuntien välinen homomorfismi? Tässä $\mathbb{C}$ on kompleksilukujen kunta. Entä kuvaus $f\colon \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \to \mathbb{R}$, $f(a + b\sqrt{2}) = a + b\sqrt{5}$?

4. Olkoon $\cdot$ liitännäinen laskutoimitus joukossa X. Olkoot $x, y \in X$ ja olkoot $n, m \in \mathbb{N}_+$ positiivisia kokonaislukuja. Osoita (esimerkiksi induktiolla), että
$$x^n x^m = x^{n+m},$$
$$x^{nm} = (x^n)^m.$$

5. Kääntyvät (2×2)-kokoiset reaalikertoimiset matriisit muodostavat ryhmän $GL(2;\mathbb{R})$ matriisien kertolaskun suhteen (tämä oletetaan tunnetuksi). Määritellään kuvaus $f\colon \mathbb{R} \to GL(2;\mathbb{R})$ kaavalla
$$f(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$
   Harj. 1.6 nojalla f on hyvin määritelty (eli $f(t)$ on todellakin kääntyvä matriisi kaikilla $t \in \mathbb{R}$). Osoita, että $f\colon (\mathbb{R}, +) \to (GL(2;\mathbb{R}), \cdot)$ on ryhmien välinen homomorfismi. Mikä on tämän homomorfismin ydin? Onko f injektiivinen? Onko f surjektiivinen?

6. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Osoita, että $H = \{I_2, -I_2, A, -A\}$ on matriisiryhmän $GL(2;\mathbb{R})$ aliryhmä (matriisien kertolaskun suhteen, kts. edellinen tehtävä). Tässä I_2 on (2×2)-kokoinen yksikkömatriisi. Onko ryhmä H isomorfinen ryhmän $(\mathbb{Z}_4, +)$ kanssa? Perustele.

7. Esimerkissä 1.58 tarkasteltiin erästä neljän alkion ryhmää $H' = \{\pm 1, \pm i\}$ (varustettuna kompleksilukujen kertolaskuna). Onko ryhmä H' isomorfinen ryhmän $(\mathbb{Z}_4, +)$ kanssa? Perustele.