Äärellisulotteinen lineaarialgebra, kevät 2015.
Harjoitus 14.

Kuten yleensäkin sisätuloavaruuksien teoriassa, näissä harjoituksissa K tarkoittaa $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$.

1. Olkoon L normaali operaattori K-sisätuloavaruudessa V. Oletetaan, että $L^{10} = L^8$. Osoita, että $L^3 = L$ ja että L on itseadjungoitu. (Ohje: riittää tarkastella tapausta $K = \mathbb{C}$, jolloin voidaan käyttää hyväksi diagonalisoituuvuutta).

2. Olkoon
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$
reaaliarvoinen symmetrinen (2×2)-matriisi. Osoita, että se on positiivisesti definiiti jos ja vain jos $a > 0$ ja $\det A > 0$. (Ohje: käytä ominaisarvoja. Tiedosta, että toisen asteen yhtälön $x^2 + ax + b = 0$ ratkaisut x_1, x_2 toteuttavat yhtälöt $x_1 + x_2 = -a$, $x_1 x_2 = b$ voi olla iloa).

3. a) Olkoon L äärellisulotteisen K-sisätuloavaruuden V operaattori. Osoita, että $(\operatorname{Im} L^*)^\perp = \operatorname{Ker} L$.
b) Olkoon L normaali. Osoita, että tällöin $\operatorname{Ker} L = \operatorname{Ker} L^*$ ja $\operatorname{Im} L = \operatorname{Im} L^*$.

4. Olkoon $A \in M(n \times n; \mathbb{R})$ itseadjungoitu matriisi ja olkoon $f\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$. Tässä
$$S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x}| = 1\}$$
on yksikköympyrä $\mathbb{R}^n$:ssä. Osoita, että matriisin A suurin/pienin ominaisarvo on sama kuin funktion f suurin/pienin arvo.

5. Olkoon V K-sisätuloavaruus ja $L\colon V \to V$ lineaarinen operaattori. Osoita, että avaruudella V on olemassa sellaiset ortonormaalit kannat E, F, että matrisi $[L]_{F,E}$ on diagonaalinen. (Vihje: polaarihajotelma).

6. Osoita, että rationaalilukujen ryhmä $(\mathbb{Q}, +)$ ei ole äärellisviritteinen eikä vapaa $\mathbb{Z}$-modulina. (Vihje viimeksimainitulle väitteelle - osoita, että vapaa joukko ei voi sisältää kuin korkeintaan yhden alkion).

7.* Tutki ovat ryhmät $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{72}$ ja $\mathbb{Z}_{18} \oplus \mathbb{Z}_{48}$ isomorfiset keskenään. Esitä kumpikin ryhmä sekä muodossa
$$\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \dots \mathbb{Z}_{m_k}.$$
missä, $m_1 | m_2 | \dots | m_{k-1} | m_k$, että syklisten p_i-ryhmien suorana summana (missä p_i:t alkulukuja).

"Tähti"-tehtävää ei oteta huomioon kurssin harjoitustehtävien kokonaislukumäärää laskiessa. Esimerkiksi tässä sarjassa harjoitustehtäviä on virallisesti vain 6 tehtävää.