Äärellisulotteinen lineaarialgebra, kevät 2015.
Harjoitus 13.

Kuten yleensäkin sisätuloavaruuksien teoriassa, näissä harjoituksissa K tarkoittaa $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$.

1. Olkoon $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ ortonormaali jono K-sisätuloavaruudessa V. Osoita, että kaikilla $\mathbf{v} \in V$ pätee niin sanottu *Besselin epäyhtälö*

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_i \rangle|^2 \leq |\mathbf{v}|^2 .$$

2. Olkoon V äärellisulotteinen K-sisätuloavaruus, $W \subset V$ aliavaruus ja $L \in L(V)$ operaattori.
a) Osoita, että $(W^{\perp})^{\perp} = W$ (Vihje: Lemma 4.22).
b) Oletetaan, että W on L-invariantti. Osoita, että $W^{\perp}$ on invariantti operaattorin L^* suhteen.

3. Olkoon L äärellisulotteisen $\mathbb{C}$-sisätuloavaruuden V operaattori. Osoita, että on olemassa avaruuden V ortonormaali kanta E siten, että $[L]_E$ on yläkolmiomatriisi. (Vihje: Propositio 3.22 ja Gram-Schmidtin ortogonaalisaatio).

4. Olkoon $A \in M(n \times n; K)$ kääntyvä matriisi. Osoita, että on olemassa unitaarinen matriisi $B \in M(n \times n; K)$ ja yläkolmiomatriisi $C \in M(n \times n; K)$, siten, että $A = BC$. (Vihje: Gram-Schmidt. Aloita osoittamalla, että $A = [E \mid E']$ on kannanvaihtomatriisi, missä E on avaruuden K^n standardikanta ja E' on jokin avaruuden K^n kanta).

5. Osoita, että $U \in M(2 \times 2; \mathbb{C})$ on ryhmän $SU(2)$ alkio jos ja vain jos se on muotoa

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix}$$

missä $a, b \in \mathbb{C}$, $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

6. Määritellään K-vektoriavaruudessa $M(n \times n; K)$ sisätulo $\langle , \rangle$ kaavalla

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^*).$$

Tässä tr on matriisin jälki, joka määriteltiin harjoitustehtävässä 7.5.
Osoita, että $\langle , \rangle$ todellakin on sisätulo. Mikä on matriisin $A \in M(n \times n; K)$ normi tämän sisätulon suhteen? Osoita, että avaruuden $M(n \times n; K)$ standardikanta $(E_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ on ortonormaali tämän sisätulon suhteen.

Osoita tämän sisätulon ja adjungaattien teorian avulla uudestaan harjoitustehtävän 7.6. väite todeksi tapauksessa $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (Vihje: Seuraus 4.27).

7.* Palautetaan mieleen harjoitustehtävässä 10.8 tarkasteltua *kvaternioiden* $\mathbb{R}$-algebraa $\mathbb{H}$. Tämä on matriisiagebran $M(2 \times 2; \mathbb{C})$ alialgebra, joka koostuu muotoa

$$\begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} \tag{1}$$

olevista matriiseista, $z, w \in \mathbb{C}$. Harjoituksen 10.8 ratkaisun yhteydessä todettiin, että $\mathbb{H}$ voidaan yhtä hyvin ajatella $\mathbb{R}$-algebrana $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$, kun samastetaan matriisi (1) parin $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ kanssa. Tässä tulkinnassa kvaternioiden kertolasku on määritely kaavalla

$$(z, w) \cdot (z', w') = (zz' - w\overline{w'}, zw' + w\overline{z'}).$$

Kun $z, w \in \mathbb{C}^2$ tulkitaan pareina $z = (x, y), w = (u, v) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, voidaan $\mathbb{H}$:n alkio ajatella myös $\mathbb{R}^4$:n alkiona (x, y, u, v). Lisäksi (harj. 10.8) $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \setminus \{0\}$ on ryhmä kertolaskun suhteen.

a) Totea (harjoituksen 13.5 avulla), että ryhmä $SU(2)$ voidaan tulkita ryhmän $\mathbb{H}^*$ aliryhmänä luonnollisella tavalla. Tulkinnassa $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ pätee tällöin

$$SU(2) = S^3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid |\mathbf{x}| = 1\}.$$

b) Jokaisella $q \in S^3 = SU(2)$ tarkastellaan kuvausta $L_q \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $L_q(r) = qrq^{-1}$. Osoita, että tämä kuvaus on $\mathbb{R}$-lineaarinen ja avaruuden $\mathbb{R}^4$ kolmiulotteinen aliavaruus $V = \mathrm{Span}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ on L_q-invariantti.

c) Avaruus $V \leq \mathbb{R}^4$ on sisätuloavaruus, kun se varustetaan tavallisella pistetulolla. Osoita, että $L_q|V$ on avaruuden V ortogonaalinen operaattori jokaisella $q \in S^3$.

d) Edellisen kohdan nojalla saadaan kuvaus $q \mapsto [L_q]_E$ ryhmien $SU(2)$ ja $O(3)$ välillä. Tässä $E = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$. Osoita, että tämä kuvaus on ryhmähomomorfismi. Laske sen ydin.

(Huomautus: voidaan osoittaa, että tämän kuvauksen kuva on ryhmä $SO(3)$. Näin saadaan mielenkiintoinen esitys jälkimmäiselle ryhmän $SU(2)$ tekijäryhmänä).

"Tähti"-tehtävää ei oteta huomioon kurssin harjoitustehtävien kokonaislukumäärää laskiessa. Esimerkiksi tässä sarjassa harjoitustehtäviä on virallisesti vain 6 tehtävää.