Äärellisulotteinen lineaarialgebra, kevät 2015.
Harjoitus 12.

Ellei muuta mainita, L on äärellisulotteisen K-vektoriavaruuden V operaattori, missä K on mielivaltainen kunta.

1. Osoita, että L on diagonalisoituva jos ja vain jos sen minimipolynomi $\mathbf{m}_L$ voidaan esittää *eri* ensimmäisen asteen pääpolynomien tulona eli muodossa

$$\mathbf{m}_L = \prod_{i=1}^{m} (\mathbf{X} - k_i),$$

missä k_i ovat kunnan *eri* alkiot. (Ohje: ehdon välttämättömyys on suora lasku. Riittävyyden osoittamiseksi iteroi Lemman 3.89 tulosta kuten Proposition 3.90 todistuksessa).

2. Operaattorin $L \in L(\mathbb{R}^3)$ matriisi standardikannan suhteen on

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}.$$

Esitä operaattori Jordanin normaalissa muodossa. Anna myös esimerkki kannasta E, jonka suhteen matriisi $[L]_E$ on Jordanin normaalissa muodossa.

3. Olkoon $A \in M(n \times n; K)$, missä kunta K on algebrallisesti suljettu. Osoittaa, että A ja sen transpoosi A^T ovat similaarisia (Vihje: Jordanin normaali muoto. Jordanin solun transpoosista saadaan Jordanin solu järjestelemällä kannan alkiot uudestaan).

4. Operaattorin $L \in L(\mathbb{R}^4)$ matriisi standardikannan suhteen on

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Esitä operaattori Jordanin normaalissa muodossa.

5. Sama kuin edellinen tehtävä, paitsi, että operaattorin matriisi on

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

6. Oletetaan, että operaattori $L \in L(\mathbb{C}^5)$ toteuttaa yhtälön $L^3 = L^2$. Mitkä ovat operaattorin L mahdolliset esitykset Jordanin normaalissa muodossa? Esitä kaikki mahdollisuudet.

7.* Osoita seuraavia materiaalissa ilman todistuksia esitettyjä väiteittä:
a) Oletetaan, että $\mathbf{p}$ on operaattorin L karakteristisen polynomin χ_L ei-vakio tekijä. Tällöin $\operatorname{Ker} p(L)$ on epätriviaali. (Ohje: Riittää osoittaa, että $\det p(A) = 0$, missä A on operaattorin matriisi. Tämä lasku taas voidaan yhtä hyvin suorittaa jossakin algebrallisesti suljetussa kunnassa. Sellaisessa polynomilla $\mathbf{p}$ on kuitenkin juuri, joka on välttämättä A:n eräs ominaisarvo).
b) Esitetään operaattorin L karakteristinen polynomi jaottomien polynomien tulona,

$$\chi_L = \mathbf{p}_1^{l_1}\mathbf{p}_2^{l_2}\cdots\mathbf{p}_m^{l_m}.$$

Proposition 3.90 nojalla V on tällöin suora summa aliavaruuksista $W_i = \operatorname{Ker} p_i^{l_i}(L)$. Päättele a)-kohdan avulla, että operaattorin $L|W_i$ karakteristinen polynomi on $\mathbf{p}_i^{l_i}$ jokaisella i. Johda tästä, että karakteristisella polynomilla ja minimipolynomilla $\mathbf{m}_L$ on samat jaottomat tekijät (renkaassa $K[\mathbf{X}]$) (Vihje: tarvitset myös Proposition 3.90 kohtaa (3)).

8.* Olkoon $\mathbf{p} = \mathbf{X}^n + a_{n-1}\mathbf{X}^{n-1} + \ldots + a_1\mathbf{X} + a_0$ polynomirenkaan $K[\mathbf{X}]$ pääpolynomi. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_1 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Osoita, että $\chi_A = \mathbf{p}$. (Neuvo: kehitä viimeisen rivin mukaan ja käytä induktiota).
b) Oletetaan, että $\mathbf{p}$ on jaoton. Olkoon $L\colon V \to V$ operaattori, jonka matriisi (jonkun kannan suhten) on A. Osoita, että V:llä ei ole epätriviaaleja aitoja aliavaruuksia, jotka olisivat L-invariantteja.

”Tähti”-tehtäviä ei oteta huomioon kurssin harjoitustehtävien kokonaislukumäärää laskiessa. Esimerkiksi tässä sarjassa harjoitustehtäviä on virallisesti vain 6 tehtävää.