Äärellisulotteinen lineaarialgebra, kevät 2015.
Harjoitus 11.

Kaikissa tehtävissä V tarkoittaa äärellisulotteista K-vektoriavaruutta ja $L\colon V \to V$ tarkoittaa sen operaattoria, ellei muuta mainitaan.

1. Olkoon $\mathbf{v} \in V$.
   a) Osoita, että
   $$I = \{\mathbf{p} \in K[\mathbf{X}] \mid p(L)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_V\}$$
   on polynomialgebran $K[\mathbf{X}]$ ideaali ja $I \neq \{\mathbf{0}\}$. Teorian mukaan tällä ideaalilla on tällöin yksikäsitteinen pääpolynomi-virittäjä $\mathbf{m}_{L,\mathbf{v}}$, jota sanotaan vektorin $\mathbf{v}$ *minimipolynomiksi operaattorin L suhteen.*
   b) Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ olkoon $E_n = (\mathbf{v}, L(\mathbf{v}), \ldots, L^n(\mathbf{v}))$. Olkoon $n \geq 0$ sellainen, että jono E_n on sidottu, mutta jono E_{n-1} on vapaa. Osoita, että polynomin $\mathbf{m}_{L,v}$ aste on tasan n. Miten todistuksen avulla voidaan käytännössä laskea $\mathbf{m}_{L,\mathbf{v}}$?

2. Olkoon $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ operaattori, jonka matriisi standardikannan $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ suhteen on
   $$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
   Laske edellisen tehtävän b)-kohdassa löydetyn menetelmän avulla alkion $\mathbf{e}_1$ minimipolynomi $\mathbf{m}_{L,\mathbf{e}_1}$ operaattorin L suhteen. Osaatko päätellä sen jälkeen suoraan mikä on operaattorin L minimipolynomi $\mathbf{m}_L$? Entä karakteristinen polynomi χ_L?

3. Osoita, että operaattori L on kääntyvä jos ja vain jos sen minimipolynomin $\mathbf{m}_L = \sum_{i=0}^{n} a_i \mathbf{X}^i$ vakiokerroin a_0 ei ole kunnan nolla-alkio. Miten todistuksen avulla voidaan käytännössä laskea kääntyvän operaattorin käänteiskuvaus L^{-1} kun $\mathbf{m}_L$ on tiedossa? Laske havaintojesi avulla edellisen tehtävän matriisin A käänteismatriisi.

4. Olkoon S $\mathbb{R}$-kertoiminen $(n \times n)$-matriisi, jonka jokainen alkio on 1,
   $$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$
   Oletetaan, että $n \geq 2$.
   a) Osoita suoralla laskulla, että $S^2 = nS$ ja päättele tästä, että matriisin S minimipolynomi on $\mathbf{X}^2 - n\mathbf{X}$. Päättele tästä suoraan matriisin S ominaisarvot.
   b) Laske jokaisen matriisin S ominaisarvon geometrinen kertaluku. Pystytkö päättelemään tästä mitkä ovat matriisin S ominaisarvojen algebralliset kertaluvut?
   c) Onko S diagonalisoituva? Mikä on sen karakteristinen polynomi?

5. Oletetaan, että vektorin $\mathbf{v} \in V$ minimipolynomi $\mathbf{m}_{L,\mathbf{v}}$ operaattorin L suhteen on esitettävissä tulona $\mathbf{m}_{L,\mathbf{v}} = \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2$, missä $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in K[\mathbf{X}]$ ovat pääpolynomeja. Olkoon $\mathbf{w} = p_1(L)(\mathbf{v})$. Osoita, että vektorin $\mathbf{w}$ minimipolynomi operaattorin L suhteen on polynomi $\mathbf{p}_2$.

6. Olkoot $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ja oletetaan, että polynomit $\mathbf{p}_1 = \mathbf{m}_{L,\mathbf{v}}$, $\mathbf{p}_2 = \mathbf{m}_{L,\mathbf{w}}$ ovat keskenään jaottomia. Tällöin (Lemma 3.45) on olemassa polynomit $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ siten, että

$$\mathbf{q}_1\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}_2\mathbf{p}_2 = 1.$$

a) Olkoon $\mathbf{u} = q_1(L)(\mathbf{w}) + q_2(L)(\mathbf{v})$. Osoita, että $p_1(L)(\mathbf{u}) = \mathbf{w}$ ja $p_2(L)(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$.
b) Osoita, että vektorin $\mathbf{u}$ minimipolynomi operaattorin L suhteen on $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2$.

7.* Olkoon $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ operaattori, jonka arvot standardikannan alkioissa ovat $L(\mathbf{e}_1) = (1,0,1,0)$, $L(\mathbf{e}_2) = (0,3,0,-1) = L(\mathbf{e}_4)$, $L(\mathbf{e}_3) = (3,0,-1,0)$. Osoita, että $\mathbf{X}^2 - 4$ on vektorin $\mathbf{e}_1$ sekä vektorin $\mathbf{e}_3$ minimipolynomi operaattorin L suhteen, ja $\mathbf{X}(\mathbf{X}-2)$ on vektorin $\mathbf{e}_2$ sekä vektorin $\mathbf{e}_4$ minimipolynomi operaattorin L suhteen. Etsi sen jälkeen tehtävien 4 ja 5 avulla sellaisia vektoreita $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, joille pätee $\mathbf{m}_{L,\mathbf{v}} = \mathbf{X}$ ja $\mathbf{m}_{L,\mathbf{w}} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^2-4)$ (huomaa, että polynomit $\mathbf{X}, \mathbf{X}^2-4$ ovat keskenään jaottomia!). Päättele, että operaattorin L minimipolynomi $\mathbf{m}_L$ on $\mathbf{X}(\mathbf{X}^2-4)$.

”Tähti”-tehtävää ei oteta huomioon kurssin harjoitustehtävien kokonaislukumäärää laskiessa. Esimerkiksi tässä sarjassa harjoitustehtäviä on virallisesti vain 6 tehtävää.