Äärellisulotteinen lineaarialgebra, kevät 2015.
Harjoitus 10.

1. a) Käy läpi kaikki polynomialgebran $\mathbb{Z}_2[\mathbf{X}]$ 2- ja 3-asteiset polynomit ja esitä jokainen niistä (polynomialgebran $\mathbb{Z}_2[\mathbf{X}]$) jaottomien polynomien tulona.
   b) Anna esimerkki sellaisista polynomialgebran $\mathbb{Z}_2[\mathbf{X}]$ 4-asteisista polynomeista $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$, joille pätee seuraava.

   (i) Polynomilla $\mathbf{p}_1$ ei ole juuria kunnassa $\mathbb{Z}_2$, mutta se ei ole jaoton.

   (ii) Polynomi $\mathbf{p}_2$ on jaoton.

   c) Sama kuin b)-kohta, mutta 5-asteisille polynomeille.

2. Kompleksiluvun $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *konjugaatti* $\bar{z}$ on kompleksiluku $\bar{z} = x - iy$.
   a) Osoita, että kuvaus $\phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\phi(z) = \bar{z}$ on $\mathbb{R}$-algebrojen välinen isomorfismi. Mikä on sen käänteiskuvaus? Onko ϕ myös $\mathbb{C}$-algebrojen välinen homomorfismi?
   b) Osoita, että kaikilla $z \in \mathbb{C}$ kompleksiluvut $z\bar{z}$, $z + \bar{z}$ ovat reaalilukuja.

3. a) Olkoon $\mathbf{p} \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$. Oletetaan, että kompleksiluku $z \in \mathbb{C}$ on tämän polynomin juuri. Osoita, että tällöin myös sen konjugaatti $\bar{z}$ on polynomin $\mathbf{p}$ juuri.
   b) Osoita a)-kohdan avulla, että jokainen polynomi $\mathbf{p} \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$ voidaan esittää polynomialgebrassa $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$ ensimmäisen ja toisen asteen polynomien tulona. Algebran peruslause saa olettaa tunnetuksi.

4. Olkoon $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Polynomia $\mathbf{p} = \sum_{i=0}^{n} a_i \mathbf{X}^i \in K[\mathbf{X}]$ sanotaan *kokonaislukukertoimiseksi* jos sen kertoimet $a_0, \ldots, a_n$ ovat kokonaislukuja. Oletetaan, että $m \in \mathbb{Z}$ on kokonaislukukertoimisen polynomin $\mathbf{p} = \sum_{i=0}^{n} a_i \mathbf{X}^i$ juuri. Osoita, että tällöin m on luvun a_0 tekijä. Tutki tämän tuloksen avulla polynomien $\mathbf{X}^3 - 2\mathbf{X} + 4$ ja $\mathbf{X}^4 - 2\mathbf{X}^3 - 4\mathbf{X}^2 + 10\mathbf{X} - 5$ juuria kunnassa K. Jaa nämä polynomit jaottomiin tekijöihin (polynomialgebrassa $K[\mathbf{X}]$).

5. Olkoon K ääretön kunta. Osoita, että kuvaus $F\colon K[\mathbf{X}] \to K^K$, joka kuvaa polynomin $\mathbf{p} \in K[\mathbf{X}]$ vastaavaksi polynomifunktioksi $p\colon K \to K$, on *injektiivinen* K-algebrahomomorfismi. Huom., tämä erityisesti todistaa sen, että äärettömän kunnan tapauksessa polynomifunktion kertoimet määräävät sen yksikäsiteisesti. (Vihje: Propositio 3.54).

6. Tarkastellaan seuraavia $\mathbb{R}$-algebroja A_1, A_2, A_3,

$$A_1 = \mathbb{R}[\mathbf{X}]/(\mathbf{X}^2),$$

$$A_2 = \mathbb{R}[\mathbf{X}]/(\mathbf{X}^2 - 1),$$

$$A_3 = \mathbb{R}[\mathbf{X}]/(\mathbf{X}^2 + 1).$$

   a) Osoita, että $\dim_{\mathbb{R}} A_i = 2$ kaikilla $i = 1, 2, 3$. Osoita, että näistä kolmesta algebrasta A_1 on ainoa, jossa on olemassa alkio $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, jolle pätee $\mathbf{x}^2 = \mathbf{0}$.

b) Osoita, että algebra A_2 ei ole renkaana kokonaisalue.
c) Osoita, että A_3 on $\mathbb{R}$-algebrana isomorfinen kompleksilukujen $\mathbb{R}$-algebran $\mathbb{C}$ kanssa.
d) Päättele, että näistä kolmesta algebrasta mitkään kaksi eivät ole isomorfisia keskenään.

7.* Jatkoa edelliselle tehtävälle. Osoita, että edellisen tehtävän $\mathbb{R}$-algebrat A_1, A_2, A_3 ovat isomorfiaa vaille ainoat 2-ulotteiset $\mathbb{R}$-algebrat.
Ohje: Olkoon A 2-ulotteinen $\mathbb{R}$-algebra. Aloita näyttämällä, että A:llä on kanta muotoa $(\mathbf{1}_A, \mathbf{v})$. Osoita sen jälkeen, että $\mathbf{v}$ voidaan valita siten, että $\mathbf{v}^2 \in \operatorname{Span}(\mathbf{1}_A)$. Näytä vielä sen jälken "normeeramalla", että voidaan olettaa $\mathbf{v}^2 \in \{\mathbf{1}_A, \mathbf{0}_A, -\mathbf{1}_A\}$. Johda väite tästä.

Lisää pohdittavaa: Yksinkertaisin esimerkki 2-ulotteisesta $\mathbb{R}$-algebrasta on "tuloalgebra" $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, jossa kertolasku on määritelty "koordinateittain". Tämän avaruuden standardikannalle $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ pätee $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$. Tehtävän väitteen nojalla $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on isomorfinen tasan yhden algebroista A_1, A_2, A_3 kanssa. Osoita, että A on itse asiassa isomorfinen algebran A_2 kanssa. Etsi jokin algebran A_2 kanta $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, jolle pätee $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \delta_{ij}$.

8.* Olkoon $\mathbb{H}$ kompleksisen matriisialgebran $M(2 \times 2; \mathbb{C})$ osajoukko, jonka muodostavat muotoa

$$\begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix}$$

olevat matriisit, missä $z, w \in \mathbb{C}$. Tässä $\bar{z}$ on kompleksiluvun z konjugaatti kuten tehtävässä 2.
a) Osoita, että $\mathbb{H}$ on $\mathbb{R}$-algebra eli on suljettu matriisien yhteenlaskun, kertolaskun, sekä reaaliluvulla kertomisen suhteen. Onko $\mathbb{H}$ myös $\mathbb{C}$-algebra?
b) Olkoon $A \in \mathbb{H}, A \neq 0$. Osoita, että on kääntyvä ja että $A^{-1} \in \mathbb{H}$.
c) Olkoot

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{j} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Osoita, että $(I_2, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ on $\mathbb{R}$-vektoriavaruuden $\mathbb{H}$ kanta. Laske kaikki tulot xy, missä $x, y \in \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

d) Osoita, että yhtälöllä $x^2 + 1 = 0$ on äärettömän monta ratkaisua renkaassa $\mathbb{H}$.

Algebraa $\mathbb{H}$ sanotaan *kvaternioiden algebraksi.*

"Tähti"-tehtäviä ei oteta huomioon kurssin harjoitustehtävien kokonaislukumäärää laskiessa. Esimerkiksi tässä sarjassa harjoitustehtäviä on virallisesti vain 6 tehtävää.