Äärellisulotteinen lineaarialgebra, kevät 2015.
Harjoitus 1.
14.01.2015

Tämän laskuharjotuksen on tarkoitus toimia lineaarialgebran peruskurssilta tuttujen perusasioiden kertauksena. Jos tämän kurssin "Johdanto"-materiaali ei tunnu riittävän näissä tehtävissä, voit myös palauttaa asioita mieleen kurssin "Lineaarialgebra ja matriisilaskenta" materiaalin avulla (löytyy kurssin kotisivulta).

1. Esitä yhtälöryhmä (1) matriisimuodossa ja ratkaise se *Gauss-Jordanin* menetelmällä.

$$(1) \qquad \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3. \end{cases}$$

2. Tutki millä *parametrin* $t \in \mathbb{R}$ arvoilla yhtälöryhmällä (2) on
a) nolla ratkaisua,
b) tasan yksi ratkaisu,
c) äärettömän monta ratkaisua.

$$(2) \qquad \begin{cases} -6x_1 + 8x_2 - 5x_3 - x_4 = 9, \\ -2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 1, \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 3, \\ -3x_1 + 7x_2 + 17x_3 + 7x_4 = t. \end{cases}$$

Tehtäviä 3 ja 4 varten joudut palauttamaan mieleen seuraavia asioita: matriisien laskutoimitukset ja niiden ominaisuudet, nolla-ja yksikkömatriisin käsitteet, matriisin kääntyvyys ja matriisin käänteismatriisi.

3. Olkoon A $(n \times n)$-kokoinen *neliömatriisi*, jolle pätee $A^m = 0$ jollakin luonnollisella luvulla $m \in \mathbb{N}$. Tässä 0 on $(n \times n)$-kokoinen nolla-matriisi. Osoita, että matriisi $I_n - A$ on *kääntyvä* ja että sen *käänteismatriisi* on matriisi

$$I_n + A + A^2 + \ldots + A^{m-1}.$$

Tässä I_n on $(n \times n)$-kokoinen *yksikkömatriisi.*

4. Olkoot A, B mielivaltaisia samankokoisia neliömatriiseja. Onko yhtälö

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

voimassa yleisesti? Todista todeksi tai anna vasta-esimerkki.
Onko tällä tehtävällä jotakin yhteyttä edellisen tehtävän väitteeseen erikoistapauksessa $m = 2$?

Seuraavaa tehtävää varten joudut palauttamaan mieleen, mitä tarkoittaa ”vektorien virittämä aliavaruus”. Muistia voi tarvittaessa virkistää materiaalista ”Johdatus lineaarialgebraan Osa 1”, sivut 18, 36.

5. Olkoot $\mathbf{v}_1 = (2, 1, -3)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 1, -5)$ ja $\mathbf{v}_3 = (4, 2, -1)$ vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreita. Olkoon $\mathbf{w} = (4, 9, 5)$.

   Tutkitaan kysymystä ”kuuluko vektori $\mathbf{w}$ vektorien $\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ virittämään aliavaruuteen $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$?”
   a) Esitä tämä kysymys ekvivalenttina ongelmana, joka koskee erään lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemista.
   b) Ratkaise ongelma ratkaisemalla tämä yhtälöryhmä.
   c) Onko olemassa sellaista vektoria $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, joka ei kuulu aliavaruuteen $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$? Anna esimerkki tällaisesta vektorista tai osoita, että sitä ei ole olemassa.

Seuraavassa tehtävässä joudut palauttamaan mieleen, miten lasketaan (2×2)-matriisin determinantti sekä miten matriisin kääntyvyys liittyy matriisin determinanttiin. Jos et muista, googlaaminen todennäköisesti auttaa.

6. Olkoot $t \in \mathbb{R}$ reaaliluku. Olkoon

$$A_t = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

   a) Laske $\det A_t$.
   b) Päättele a)-kohdan avulla, että A_t on kääntyvä.

7.* Olkoon A_t kuten edellisessä tehtävässä ja olkoon $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(\mathbf{x}) = A_t \cdot \mathbf{x}$ tämän matriisin määrämä tason lineaarinen kuvaus, missä

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

on tason piste (x_1, x_2) ”pystyvektorina” tulkittuna. Mikä on kuvauksen L geometrinen merkitys? Perustele (kuvat ja koulugeometriaan vetoaminen riittävät).

”Tähti”-tehtävää ei oteta huomioon kurssin harjoitustehtävien kokonaislukumäärää laskiessa. Esimerkiksi tässä sarjassa harjoitustehtäviä on virallisesti vain 6 tehtävää.