Tämän kurssin tärkein tutkimuskohde on (äärellisulotteisten) vektoriavaruuksien teoria.

Määritelmä: Olkoon K kunta. K-**vektoriavaruus** on kolmikko $(V, +, \cdot)$, missä $(V, +)$ on Abelin ryhmä ja $\cdot\colon K \times V \to V$ on *skalaarikertolasku*. Lisäksi oletetaan, että kaikilla $k, k' \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ pätee

- $k(k'\mathbf{v}) = (kk')\mathbf{v}$
- $(k + k')\mathbf{v} = k\mathbf{v} + k'\mathbf{v}$
- $k(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = k\mathbf{v} + k\mathbf{w}$
- $1_K\mathbf{v} = \mathbf{v}$

Vektoriavaruuden alkioita sanotaan vektoreiksi. Abelin ryhmän $(V, +)$ neutraalialkiota sanotaan *nolla-vektoriksi* ja merkitään $\mathbf{0}_V$. Voidaan puhua vektorien erotuksesta.

Vektoriavaruuksissa voidaan johtaa tuttuja laskusääntöjä - esim. $0_K\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$, $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$ jne.

Aliavaruudet

Osajoukko $W \subset V$ on vektoriavaruuden V *aliavaruus* jos

(i) W on suljettu V:n yhteenlaskun suhteen, toisin sanoen kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$ pätee $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in W$.

(ii) W on suljettu V:n skalaarikertolaskun suhteen, toisin sanoen kaikilla $k \in K$, $\mathbf{v} \in W$ pätee $k\mathbf{v} \in W$.

(iii) W on epätyhjä.

Tällöin $(W, +, \cdot)$ on K-vektoriavaruus itse.

Aliavaruuksien leikkaus on aliavaruus (Lemma 2.27). Tästä seuraa, että jokaiselle $A \subset V$ on olemassa *pienin* avaruuden V aliavaruus W, joka sisältää joukon A. Tätä avaruutta merkitään $\mathrm{Span}(A)$ ja sanotaan joukon A *virittämäksi aliavaruudeksi.*

Aliavaruutta $\mathrm{Span}(A)$ voidaan karakterisoida myös lineaaristen kombinaatioiden avulla (Lemmat 2.29 ja 2.30).

Lineaariset kombinaatiot

Olkoon V vektoriavaruus ja olkoon $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ *äärellinen jono* sen alkiota. Mikä tahansa muotoa

$$\sum_{i=1}^{n} k_i\mathbf{v}_i = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n,$$

oleva lauseke, missä $k_1, k_2, \ldots, k_n \in K$ ovat skalaareja, sanotaan vektorien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *lineaariseksi kombinaatioksi* (jonka pituus on $n \in \mathbb{N}$). Myös kombinaation varsinaista arvoa, eli vektoria $\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n$ kutsutaan vektorien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ lineaariseksi kombinaatioksi. Termit $k_i\mathbf{v}_i$ ovat tämän lineaarisen kombinaation *jäseniä*. Skalaari $k_i \in K$ on vektorin $\mathbf{v}_i$ *kerroin* tässä lineaarisessa kombinaatiossa.

Lemmat 2.29 - 2.30: vektori kuuluu aliavaruuteen $\mathrm{Span}(A)$ jos ja vain jos se voidaan esittää lineaarisena kombinaationa joukon A alkioista.

Vapaus

Äärellinen jono $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ on vapaa jos jokaisen avaruuden $\mathrm{Span}(A)$ alkio voidaan esittää tämän jonon jäsenten lineaarisena kombinaationa **yksikäsitteisellä tavalla**. Äärellinen osajoukko $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ on vapaa jos vastaava jono $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ on vapaa. Mielivaltainen osajoukko $B \subset V$ on vapaa jos jokainen sen äärellinen osajoukko on vapaa.

Lemma 2.33: Jono $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ on vapaa jos ja vain jos ainoa tapa esittää nollavektori tämän jonon lineaarisena kombinaationa on triviaali kombinaatio

$$\mathbf{0}_V = 0_K\mathbf{v}_1 + 0_K\mathbf{v}_2 + \ldots + 0_K\mathbf{v}_n.$$

Jono/joukko joka ei ole vapaa, on *sidottu*. Vapaan joukon jokainen osajoukko on vapaa. Jos joukon A jokin osajoukko on sidottu, myös joukko A itse on sidottu.

<u>Lemma 2.37 c</u>: Osajoukko $A \subset V$ on sidottu jos ja vain jos jokin sen alkio voidaan esittää *muiden* lineaarisena kombinaationa.

Kun $A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ on *äärellinen jono*, edellista tulosta voidaan vielä tiukentaa: <u>Lemma 2.39</u>: Olkoon $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ äärellinen jono, joka on sidottu. Tällöin on olemassa indeksi $i = 1, \ldots, n$ siten, että $\mathbf{v}_i \in \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}\}$. Toisin sanoen on olemassa $\mathbf{v}_i$ joka voidaan esittää jonon **edellisten** alkioiden lineaarisena kombinaationa.

Juuri tähän tulokseen perustuvat aika pitkälti monet äärellisulotteisten aliavaruuksien teorian tärkeimmät perustulokset, esim. Propositio 2.41 (jokaisella äärellisviritteisellä vektoriavaruudella on äärellinen kanta), Propositio 2.42 (vapaa joukko ei voi sisältää enemmän vektoreita kuin virittävä joukko), Seuraus 2.46 (äärellisulotteisen avaruuden dimensio on hyvin määritelty), Propositio 2.48 (aliavaruuden kanta voidaan täydentää koko avaruuden kannaksi), Seuraus 2.49.

Tekijäavaruudet

Eivät ole kovin tärkeitä tällä kurssilla.

Olkoon $(V, +, \cdot)$ K-vektoriavaruus ja olkoon $\sim$ ekvivalenssirelaatio joukossa V. Oletetaan, että $\sim$ on *yhteensopiva* sekä laskutoimituksen $+$ suhteen, että skalaarikertolaskun $\cdot$ suhteen. Tällöin tekijäjoukossa $V/\sim$ voidaan määritellä laskutoimitus $+$ ja K-skalaarikertolasku $\cdot$ siten, että kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ja kaikilla $k \in K$ pätee

$$\overline{\mathbf{v}} + \overline{\mathbf{w}} = \overline{\mathbf{v} + \mathbf{w}},$$

$$k\overline{\mathbf{v}} = \overline{k\mathbf{v}}.$$

Kolmikko $(V/\sim, +, \cdot)$ on tällöin K-vektoriavaruus ja kanoninen projektio $p\colon V \to V/\sim$ on K-lineaarinen surjektio.

Kun $\sim$ on vektoriavaruuden laskutoimitusten kanssa sopiva ekvivalenssirelaatio, näin saatua vektoriavaruutta $(V/\sim, +, \cdot)$ sanotaan avaruuden V *tekijäavaruudeksi.*

Jokainen tekijäavaruus $V/\sim$ voidaan esittää kanonisessa muodossa, missä $W \leq V$ on aliavaruus. Tarkemmin - olkoon $\sim$ vektoriavaruuden V laskutoimitusten kanssa sopiva ekvivalenssirelaatio. Tällöin nolla-vektorin ekvivalenssiluokka $\overline{\mathbf{0_V}}$ on projektiokuvauksen $p\colon V \to V/\sim$ *ydin* $\operatorname{Ker} p$. Lisäksi tällöin $\mathbf{v} \sim \mathbf{w}$ jos ja vain jos $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in W$. Ekvivalenssiluokat ovat tällöin aliavaruuden W *translaatiot*, toisin sanoen jokaisella $\mathbf{v} \in V$ pätee $\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + W$.

Kääntäen olkoon W K-vektoriavaruuden V *aliavaruus.* Määritellään joukossa V relaatio $\sim_W$ ehdolla $\mathbf{v} \sim \mathbf{w}$ jos ja vain jos $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in W$. Tällöin

(i) Relaatio $\sim_W$ on ekvivalenssirelaatio.

(ii) Relaatio $\sim_W$ on yhteensopiva vektoriavaruuden V laskutoimitusten kanssa.

(iii) $W = \overline{\mathbf{0_V}}$ on nolla-vektorin $\mathbf{0}_V$ ekvivalenssiluokka relaation $\sim_W$ suhteen.

(iv) Alkion $\mathbf{v} \in V$ ekvivalenssiluokka on

$$\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + W.$$

Näin ollen kaikki vektoriavaruuden V tekijäavaruudet ovat täsmälleen muotoa $V/\sim_W$, missä W on jokin vektoriavaruuden V aliavaruus ja ekvivalenssirelaatio $\sim_W$ on ehdolla $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in W$ määritelty relaatio. Tekijäavaruutta $V/\sim_W$ merkitään yksinkertaisesti V/W. Tämän vektoriavaruuden nolla-vektori on ekvivalenssiluokka $\overline{\mathbf{0_V}}$, joka on sama asia kuin aliavaruus W. Alkion $\mathbf{v} \in V$ ekvivalenssiluokka on vastaava affiini osajoukko

$$\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + W.$$

Alkioiden tasollla tekijäavaruudessa V/W lasketaan näin:

$$(\mathbf{v} + W) + (\mathbf{w} + W) = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + W.$$

$$k(\mathbf{v} + W) = k\mathbf{v} + W.$$

Aliavaruus W on kanonisen projektion $p\colon V \to V/W$ *ydin.* Tästä seuraa erityisesti, että jokainen vektoriavaruuden V aliavaruus W on jonkun lineaarisen kuvauksen ydin.

Kuten ryhmien tai renkaiden tapauksessa, myös vektoriavaruuksien teoriassa tekijäavaruuksien tärkeimpiä sovelluksia ovat hajotelma-ja isomorfialauseet.

Hajotelmalause: Olkoon $L\colon V \to U$ K-lineaarinen kuvaus K-vektoriavaruuksien välillä. Olkoon $W \subset V$ aliavaruus ja olkoon $p\colon V \to V/W$ luonnollinen projektio. Tällöin on olemassa K-lineaarinen indusoidu kuvaus $\bar{L}\colon V/W \to U$ siten, että $L = \bar{L} \circ p$, eli siten, että seuraava diagrammi kommutoi,

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "L"] \arrow[dr, "p"'] & & U \\ & V/W \arrow[ur, "\bar{L}"'] & \end{tikzcd}$$

jos ja vain jos $W \subset \operatorname{Ker} L$. Jos $\bar{L}$ on olemassa, se on yksikäsitteinen ja $\operatorname{Im} \bar{L} = \operatorname{Im} L$. Erityisesti $\bar{L}$ on surjektio jos ja vain jos L on surjektio.
Lisäksi $\bar{L}$ on injektio jos ja vain jos $W = \operatorname{Ker} L$.

Vektoriavaruuksien Isomorfialause Olkoon $L\colon V \to U$ K-lineaarinen kuvaus K-vektoriavaruuksien välillä. Tällöin L indusoi isomorfismin
$\bar{L}\colon V/\operatorname{Ker} L \to \operatorname{Im} L$.