Multilineaariset kuvaukset ja determinantti

Olkoot $V_1, V_2, \ldots, V_n$ ja W K-vektoriavaruuksia. Olkoon $F\colon V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n \to W$ kuvaus. Kuvaus Fs on *n-lineaarinen* jos ja vain jos kaikilla $i = 1, \ldots, n$, kaikilla $\mathbf{v}_1 \in V_1, \mathbf{v}_2 \in V_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1} \in V_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1} \in V_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n \in V_n$, kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V_i$ ja kaikilla $k \in K$ pätevät yhtälöt

$$F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v} + \mathbf{v}', \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n) =$$

$$= F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n) + F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}', \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n),$$

ja

$$F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, k\mathbf{v}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n) = kF(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n).$$

Toisin sanoen n-lineaarinen kuvaus on kuvaus joka on lineaarinen jokaisen muuttujan suhteen erikseen.

Kuvausta, joka on n-lineaarinen jollakin $n \in \mathbb{N}$, sanotaan yleisesti *multilineaariseksi.* 1-lineaarinen kuvaus on sama asia kuin lineaarinen kuvaus $L\colon V \to W$. 2-lineaarisia kuvauksia sanotaan *bilineaarisiksi.*

Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja olkoot $V_1, V_2, \ldots, V_n$ ja W K-vektoriavaruuksia. Kaikkien n-lineaaristen kuvausten $F\colon V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n \to W$ muodostamaa joukkoa merkitään

$$L(V_1, V_2, \ldots, V_n; W).$$

Tällä joukolla on luonnollinen K-vektoriavaruuden struktuuri, jonka laskutoimitukset määritellään pisteittäin ehdoilla

$$(F + F')(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) = F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) + F'(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n),$$

$$(kF)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) = k \cdot F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n).$$

Propositio: 2.122: Olkoon $n \in \mathbb{N}$, $V_1, \ldots, V_n$ ja W K-vektoriavaruuksia. Oletetaan, että V_i on äärellisulotteinen jokaisella $i = 1, \ldots, n$, olkoon $(\mathbf{v}^i_j)_{j=1,\ldots,m_i}$ sen kanta, $m_i = \dim V_i$. Olkoon $(\mathbf{w}_{j_1,\ldots,j_n})$ kokoelma vektoriavaruuden W vektoreita, joka on indeksoitu karteesisella tulolla $[m_1] \times [m_2] \times \ldots \times [m_n]$.

Tällöin on olemassa yksikäsitteinen n-lineaarinen kuvaus $F\colon V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n \to W$ jolle pätee

$$F(\mathbf{v}^1_{j_1}, \mathbf{v}^2_{j_2}, \ldots, \mathbf{v}^n_{j_n}) = \mathbf{w}_{j_1,j_2,\ldots,j_n}$$

kaikilla $(j_1, j_2, \ldots, j_n) \in [m_1] \times [m_2] \times \ldots \times [m_n]$.

Havainnollisesti - riittää antaa multilineaarisen kuvauksen arvoja jonoilla $\mathbf{v}^1_{j_1}, \mathbf{v}^2_{j_2}, \ldots, \mathbf{v}^n_{j_n}$, missä $\mathbf{v}^i_{j_i}$ on poimittu jostakin avaruuden V_i kiinnitetystä kannasta. Periaate on samanlainen kuin lineaarisille kuvauksille, joiden kohdalla riittää kertoa miten kannan alkiot kuvautuvat.

Multilineaariset muodot

Tärkeä erikoistapaus multilineaarisesta kuvauksesta on tapaus $F\colon V \times V \times \ldots \times V = V^n \to K$ jossa $V_1 = V_2 = \ldots = V_n = V$ ovat sama avaruus ja lisäksi maalipuoli on skalaarikunta, $W = K$. Tällaista multilineaarista kuvausta sanomme *lineaariseksi n-muodoksi* avaruudessa V. Kaikkien avaruuden V lineaaristen n-muotojen muodostamaa joukkoa merkitään symbolilla $L^n(V)$. Tämä joukko on K-vektoriavaruus.

Tärkeät erikoistapaukset:

- Symmetriset muodot
- Antisymmetriset muodot
- Alternoivat muodot

Erityisen tärkeitä ovat kaksi viimeistä käsitettä, sillä ne liittyvät determinantin käsitteseen.

Olkoon V K-vektoriavaruus. Multilineaarista n-muotoa $F\colon V^n \to K$ sanotaan **symmetriseksi** jos jokaiselle $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) \in V^n$ ja jokaiselle joukon $[n]$ permutaatiolle $\sigma \in S_n$ pätee

$$F(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \mathbf{v}_{\sigma(2)}, \ldots, \mathbf{v}_{\sigma(n)}) = F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n).$$

Muotoa F sanotaan **antisymmetriseksi**, jos kaikilla $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) \in V^n$ ja jokaisella $\sigma \in S_n$ pätee

$$F(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \mathbf{v}_{\sigma(2)}, \ldots, \mathbf{v}_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n).$$

Koska jokainen permutaatio voidaan kirjoittaa vaihdosten perusteella, nähdään helposti, että pätee seuraava periaate:

Olkoon $F\colon V^n \to K$ lineaarinen n-muoto. Tällöin F on symmetrinen jos ja vain jos kaikilla $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) \in V^n$ ja $i, j \in [n], i < j$ pätee

$$F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_n) = F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n).$$

Vastaavasti F on antisymmetrinen jos ja vain jos kaikilla $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) \in V^n$ ja $i, j \in [n], i < j$ pätee

$$F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_n) = -F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n).$$

Toisin sanoen multilineaarinen muoto on symmetrinen, jos kahden muuttujan vaihto *ei vaikuta sen arvoon* ja antisymmetrinen, jos kahden muuttujan vaihto *muuttaa kuvauksen arvon merkkiä.*

Multilineaarista muotoa $F\colon V^n \to K$ sanotaan **alternoivaksi**, jos se saa aina arvon nolla sellaisilla jonoilla $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) \in V^n$ joissa esiintyy ainakin yksi toisto, toisin sanoen, jos kaksi eri muuttujaa saavat saman arvon. Täsmällisesti - F on alternoiva, jos ehdosta $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j$, $i \neq j$ seuraa

$$F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) = 0_K.$$

Antisymmetrisen ja alternoiva muodon käsitteet ovat *melkein* samoja, yhtä poikkeusta lukuunottamatta, nimittäin silloin kun kunnan K *karakteristika* on tasan 2.

Lemma 2.133: Olkoon $F\colon V^n \to K$ multilineaarinen n-muoto. Tarkastellaan seuraavia ehtoja.

(1) F on alternoiva.

(2) F on antisymmetrinen.

Tällöin (1)$\Rightarrow$ (2).
Jos kunnan K karakteristika ei ole kaksi, ehdot (1) ja (2) ovat yhtäpitäviä.
s

Alternoivien muotojen vektoriavaruus
Olkoon V K-vektoriavaruus. Kaikkien alternoivien n-muotojen $F\colon V^n \to K$ muodostamaa joukkoa merkitään $\mathrm{Alt}^n(V)$. $\mathrm{Alt}^n(V)$ on K-vektoriavaruus pisteittäisten laskutoimitusten suhteen.

Lause 2.135: Olkoon V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus ja olkoon $E = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ sen kanta. Tällöin edellä konstruoitu kokoelma

$$\{\varepsilon^I \mid I \subset [n], |I| = m\}$$

on avaruuden $\mathrm{Alt}^m(V)$ kanta, $m \in \mathbb{N}$. Erityisesti

$$\dim \mathrm{Alt}^m(V) = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Tässä tulkitaan $\binom{n}{m} = 0$ kun $m > n$.

Erityisesti $\mathrm{Alt}^n(V)$ on 1-ulotteinen vektoriavaruus ja eräs sen virittävä alkio on yksikäsitteinen multilineaarinen alternoiva muoto $\varepsilon^{[n]}$ jolle pätee

$$\varepsilon^{[n]}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = 1.$$

Olemme erityisesti kiinnostuneita vain erikoistapauksesta $m = n$. Soveltamalla sitä avaruudessa $V = K^n$ saadaan:
Olkoon K kunta. Tällöin on olemassa **täsmälleen yksi** alternoiva n-muoto $F \in \mathrm{Alt}^n(K^n)$, jolle pätee

$$F(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1_K,$$

nimittäin muoto $\varepsilon^{[n]}$. Mielivaltaiselle alternoivalle n-muodolle $F\colon (K^n)^n \to K$ on olemassa yksikäsitteinen $k \in K$ jolle $F = k\, \varepsilon^{[n]}$.

Determinantti

Olkoon $A \in M(n \times n; K)$ K-kertoiminen *neliömatriisi*. Matriisi A on selvästi täysin määrätty, kun tunnetaan sen sarakkeiden muodostama jono $(c_1(A), c_2(A), \ldots, c_n(A))$. Tästä syystä voimme *samaistaa* neliömatriisin A ja sen sarakkeista muodostetun jonon

$(c_1(A), c_2(A), \ldots, c_n(A))$, joka on karteesisen tulon $(K^n)^n$ alkio.

Alternoivien muotojen teorian nojalla saadaan determinantin olemassaolo ja yksikäsitteisyys:

Lause 2.138: Olkoon K kunta ja olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tällöin on olemassa tasan yksi kuvaus $\det\colon M(n \times n; K) \to K$ jolla on seuraavat ominaisuudet (1)-(3).

(1) $\det(A)$ on multilineaarinen matriisin A sarakkeiden suhteen.

(2) $\det(A)$ on alternoiva matriisin A sarakkeiden suhteen.

(3) $\det(I_n) = 1$, missä I_n on $(n \times n)$-kokoinen yksikkömatriisi.

Kuvausta det sanotaan *determinanttikuvaukseksi.* Jos A on neliömatriisi, skalaaria $\det(A) \in K$ sanotaan *matriisin A determinantiksi.*

Jos $F\colon M(n \times n; K) \to K$ on mikä tahansa kuvaus, joka toteuttaa ehtoja (1) ja (2), eli on multilineaarinen ja alternoiva matriisin sarakkeiden suhteen, niin on olemassa yksikäsitteinen $k \in K$ siten, että $F(A) = k \det(A)$ kaikilla $A \in M(n \times n; K)$.

Determinantille pätee kaava

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \ldots a_{\sigma(n)n}.$$

Sovelluksena tästä saadaan kaava

$$\det(A^T) = \det A.$$

Käytännössä determinantti voidaan laskea ”kehittämällä rivin tai sarakkeen mukaan”, sekä käyttämällä hyväksi determinantin multilineaarisuutta ja alternoivuutta (Tulokset 2.141-143).

Determinanttikuvaus on yhteensopiva matriisien kertolaskun ja kunnan kertolaskun suhteen:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Determinantin avulla voidaan tarkistaa onko matriisi kääntyvä:

Propositio: Olkoon A K-kertoiminen $(n \times n)$-matriisi. Tällöin A on kääntyvä jos ja vain jos $\det A \neq 0_K$. Jos $\det A$ on kääntyvä, käänteismatriisin A^{-1} alkiot saadaan kaavalla

$$(A^{-1})(i,j) = (\det A)^{-1}(-1)^{i+j} \det(A_{ji}).$$

Lisäksi tässä tapauksessa pätee yhtälö

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}.$$

Lineaarisen kuvauksen determinantti

Olkoon V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus ja olkoon $L\colon V \to V$ avaruuden V lineaarinen endomorfismi. Koska V on äärellisulotteinen, sillä on olemassa kanta $E = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$. Kuvauksen L determinantti määritellään kaavalla $\det L = \det[L]_E$. Määritelmä ei riipu kannan E valinnasta.

Koska lineaarinen kuvaus on isomorfismi jos ja vain jos sen matriisi on kääntyvä, L on isomorfismi jos ja vain jos $\det L \neq 0_K$.