Luku 4 - Sisätuloavaruudet

Luvun 4 tärkeimmät käsitteet ja avainsanat in a nutshell:
- Konjugaatti, 1/2 ja 3/2-lineaariset kuvaukset, hermittinen muoto, sisätulo, positiivisesti definiitti, posiitivisesti semidefiniitti. Ortogonaaliset ja ortonormaalit joukot ja kannat. Gram-Schmidtin ortogonaalisaatio. Ortogonaalinen komplementti.
- Kuvauksen / matriisin adjungaatti. Unitaarisuus ja ortogonaaliset. Normaalit kuvaukset/matriisit. Diagonalisoituvuus ortonormaalissa kannassa. Itseadjungoidut ja symmetriset kuvaukset/matriisit.
- Polaarihajotelma.

Konjugaatit ja sisätulo

- Sisätulon käsitettä määritellään ja tarkastellaan ainoastaan $\mathbb{R}$-ja $\mathbb{C}$-kertoimisissa vektoriavaruuksissa.
- Tästä syystä Luvussa 4 symbolilla K tarkoitetaan ainoastaan kuntia $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{C}$-vektoriavaruuksien sisätulon määritelmä perustuu muun muassa kompleksiluvun *konjugaatin* käsitteeseen.
- Kompleksiluvun $z = a + ib$ konjugaatti on kompleksiluku $z = a - ib$. Kuvaus $z \mapsto \overline{z}$ on $\mathbb{R}$-lineaarinen isomorfismi, joka on myös yhteensopiva kompleksilukujen kertolaskun kanssa. Toisin sanoen konjugaattikuvaus on $\mathbb{R}$-algebran $\mathbb{C}$ isomorfismi itselleen.
- Kompleksiluvun konjugaatti on se itse, $\overline{z} = z$, jos ja vain jos $z \in \mathbb{R}$ eli on kompleksiluku muotoa $a + 0i$. Erityisesti voidaan siis tarvittaessa myös puhua reaaliluvun konjugaatista.
- Myöhemmin konjugaatin käsitettä laajennetaan luonnollisella tavalla myös matriiseihin - matriisin $A \in M(n \times m; \mathbb{C})$ konjugaatti $\overline{A} \in M(n \times m; \mathbb{C})$ on matriisi, joka saadaan A:sta konjugoimalla sen jokainen alkio.
- K-vektoriavaruuden V *konjugaatti* $\overline{V}$ on K-vektoriavaruus, joka on joukkona ja yhteenlaskun kohdalla sama kuin V, mutta skalaarikertolasku määritellään kaavalla

$$z \cdot v = \overline{z}v.$$

- Kuvaus $L\colon V \to W$ K-vektoriavaruuksien V, W välillä on *antilineaarinen* (konjugaattilineaarinen, 1/2-lineaarinen) jos se on lineaarinen kuvauksena $V \to \overline{W}$ tai yhtäpitävästi kuvauksena $\overline{V} \to W$. Käytännössä tämä tarkoittaa, että kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ja $k \in K$ pätee

$$L(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = L(\mathbf{v}) + L(\mathbf{w}),$$

$$L(k\mathbf{v}) = \overline{k}L(\mathbf{v}).$$

Jos $K = \mathbb{R}$ antilineaarinen on sama asia kuin lineaarinen.

- Kuvaus $F\colon V \times W \to U$ (missä V, W, U K-vektoriavaruuksia) on 3/2-*lineaarinen* (*seskilineaarinen*) jos se on lineaarinen ensimmäisen muuttujan suhteen ja 1/2-lineaarinen toisen muuttujan suhteen. Tapauksessa $K = \mathbb{R}$ tämä on sama asia kuin kuvauksen F bilineaarisuus.

- Kuvaus $F\colon V \times W \to U$ on seskilineaarinen jos ja vain jos se on bilineaarinen kuvauksena $V \times \overline{W} \to U$.

- *Hermittinen muoto* on seksilineaarinen kuvaus $F\colon V \times V \to K$, joka on lisäksi "konjugaatti-symmetrinen", eli toteuttaa ehdon

$$F(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \overline{F(\mathbf{w}, \mathbf{v})}.$$

  Tapauksessa $K = \mathbb{R}$ tämä on sama asia kuin symmetrinen bilineaarinen muoto.

- K-vektoriavaruuden V *sisätulo* on Hermittinen muoto $\langle , \rangle\colon V \times V \to K$, joka on lisäksi *positiivisesti definiitti*. Tämä tarkoittaa sitä, että $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ kaikilla $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq 0$.

- Jos epäyhtälö pätee vain muodossa $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ kaikilla $\mathbf{v} \in V$, puhutaan *positiivisesti semidefinitistä* muodosta. Hermiittisiin muotoihin palataan myöhemmin.

- Sisätulon avulla sisätuloavaruudessa voidaan määritellä sellaisia geometrisia käsitteitä kuin etäisyys, kulmat.

- Erityisesti jokainen sisätulo $\langle , \rangle$ määrittelee *normin* sisätuloavaruudessa V, kaavalla

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

- Normi toteuttaa "kolmioepäyhtälön" ja muita luonnollisia ominaisuuksia.

- Cauchy-Schwarzin epäyhtälö:

$$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leq |\mathbf{v}||\mathbf{w}|.$$

- Äärellisulotteisessa vektoriavaruudessa K^n määritellään *kanoninen pistetulo* kaavalla

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

Ortogonaalisuus

- Sisätuloavaruuden V osajoukko A on ortogonaalinen jos $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0_K$ kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in A, \mathbf{v} \neq \mathbf{w}$. Jos lisäksi pätee $|\mathbf{v}| = 1$ kaikilla $\mathbf{v} \in A$, A on *ortonormaali.*

- Gram-Schmidtin ortogonaalisaatio (Propositio 4.19): olkoon jono $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ vapaa sisätuloavaruudessa V. Tällöin on olemassa ortonormaali jono $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ siten, että

$$\mathrm{Span}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_j) = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j)$$

  kaikilla $j = 1, \ldots, n$.

- Edellisestä erityisesti seura, että jokaisella äärellisulotteisella sisätuloavaruudella on olemassa ortonormaali kanta.

- Sisätuloavaruuden V osajoukon A ortogonaalinen komplementti $A^\perp$ määritellään joukkona
$$A^\perp = \{\mathbf{v} \in V \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0_K \text{ kaikilla } \mathbf{w} \in W\}.$$

- $A^\perp$ on aliavaruus kaikilla $A \subset V$.

- Jos W on sisätuloavaruuden V *äärellisulotteinen* aliavaruus, niin $V = W \oplus W^\perp$.

- Edellisestä seuraa, että on olemassa *ortogonaalinen projektio* $p_W : V \to W$. Tällä on tärkeä "minimointi"-ominaisuus (Propositio 4.24).

Adjungaatti

- Olkoon V äärellisulotteinen sisätuloavaruus. Tällöin on olemassa kanoninen antilineaarinen bijektio $\Phi \colon V \to V^*$, $\Phi(\mathbf{w})(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ (Propositio 4.26).

- Olkoon $L \colon V \to W$ lineaarinen kuvaus äärellisulotteisten sisätuloavaruuksien välillä. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen lineaarinen kuvaus $L^* \colon W^* \to V^*$ siten, että kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ pätee
$$\langle L(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, L^*(\mathbf{w}) \rangle.$$
Kuvausta L^* sanotaan kuvauksen L *adjungaatiksi.*

- Matriisin $A \in M(n \times m; K)$ *adjungaatti* on matriisi $A^* \in M(n \times m; K)$, joka määritellään kaavalla $A^* = \overline{(A^T)} = (\overline{A})^T$.

- Matriisin $A \in M(n \times m; K)$ adjungaatti A^* voidaan karakterisoida myös kaavalla
$$A\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot A^*\mathbf{w},$$
joka pätee kaikilla $\mathbf{v} \in K^m, \mathbf{w} \in K^n$ (tässä $\cdot$ on pistetulo).

- Olkoot E, F äärellisulotteisten sisätuloavaruuksien V, W *ortonormaalit* kannat ja olkoon $A = [L]_{F,E}$. Tällöin $[L^*]_{E,F} = A^*$. Toisin sanoen adjungaatti-kuvauksen matriisi ortonormaalien kantojen suhteen on kuvauksen matriisin adjungaatti.

- Jos $W \leq V$ on invariantti operaattorin L suhteen, niin ortogonaalinen komplementti $W^\perp$ on invariantti operaattorin L^* suhteen (Lemma 4.48).

Unitaarisuus

- Lineaarinen kuvaus $L \colon V \to W$ on *unitaarinen* jos se säilyttää sisätulot, eli jos kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ pätee
$$\langle L(\mathbf{v}), L(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle.$$

- Tapauksessa $K = \mathbb{R}$ on tapana käyttää termiä "ortogonaalinen" termin "unitaarinen" sijaan.

- Propositiossa 4.35 annetaan muita tapoja karakterisoida unitaarisia kuvauksia - ne ovat tasan sellaiset lin. kuvaukset, jotka säilyttävät normit tai ortogonaalisuuden/ortonormaalisuuden.
- Lemmassa 4.7 annetaan vielä yksi kätevä tapa tarkistaa unitaarisuutta operaattoreille: Operaattori $L\colon V \to V$ on unitaarinen jos ja vain jos $L^* = L^{-1}$.
- Neliömatriisi $A \in M(n \times n; K)$ on unitaarinen jos $A^{-1} = A^*$.
- Matriisi on unitaarinen jos ja vain jos sen sarakkeet (rivit) muodostavat avaruuden K^n ortonormaalin kannan (pistetulon suhteen).
- Operaattori on unitaarinen jos ja vain jos sen matriisi jossakin ortonormaalissa kannassa on unitaarinen.
- Unitaaristen/ortogonaalisten matriisiryhmien tunteminen ei ole kovin tärkeätä, vaikka merkintöjen $U(n)$ ymmärtäminen saattaa olla hyödyllistä.

Diagonalisoituvuus ortonormaalissa kannassa

- Operaattori/neliömatriisi on *diagonalisoituva ortonormaalissa kannassa*, jos avaruudella on ortonormaali kanta, joka koostuu operaattorin/matriisin ominaisvektoreista.
- Propositio 4.50: Kun $K = \mathbb{C}$ operaattori/matriisi on diagonalisoituva ortonormaalissa kannassa jos ja vain jos operaattori/matriisi on normaali eli $L^*L = LL^*$ ($AA^* = A^*A$).
- Unitaariset ja nin sanotut *itseadjungoidut* operaattorit/matriisit ovat normaaleja.
- Seuraus 4.56: Kun $K = \mathbb{R}$ operaattori/matriisi on diagonalisoituva ortonormaalissa kannassa jos ja vain jos se on symmetrinen.
- Operaattori/matriisi on *itseadjungoitu* jos $L^* = L$ ($A^* = A$). Kun $K = \mathbb{R}$ puhutaan myös *symmetrisistä* operaattoreista/matriiseista.
- Unitaarisen kuvauksen/matriisin ominaisarvot ovat kompleksilukuja itseisarvoltaan 1.
- Itseadjunoidun kuvauksen/matriisin ominaisarvot ovat reaalisia.
- Itseadjungoitu kuvaus/matriisi on positiivisesti semidefiniitti jos sen ominaisarvot ovat ei-negatiivisia reaalilukuja.
- Itseadjungoitu kuvaus/matriisi on positiivisesti definiitti jos sen ominaisarvot ovat positiviisia reaalilukuja.
- Jos operaattori L on normaali ja $W \leq V$ on L-invariantti, W on myös L^*-invariantti.

Hermiittiset muodot sisätuloavaruudessa

- Kun äärellisulotteisessa vektoriavaruudessa V on kiinnitetty jokin sisätulo $\langle , \rangle$ mikä tahansa seskilineaarinen muoto F voidaan laskea kaavalla

$$F(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = A\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}},$$

missä $A = [F]_E$ on *muodon matriisi* (jonkun) ortonormaalin kannan E suhteen ja $\vec{\mathbf{v}} \in K^n$ on vektorin $\mathbf{v}$ esitys kannassa E. Tässä matriisin A kertoimet on määritelty ehdolla $a_{ij} = F(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$.

- Muoto F on tällöin Hermiittinen jos ja vain jos A on *itseadjungoitu.*

- Koska itseadjungoitu matriisi on edellisten tulosten nojalla aina diagonalisoituva ortonormaalissa kannassa ja lisäksi sen ominaisarvot ovat reaalilukuja, edellisestä seuraa, että jokainen hermiittinen muoto H voidaan esiittää sopivassa ortonormaalissa kannassa E niin sanotussa *pääakselimuodossa*

$$H(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \overline{y_i},$$

missä $a_1, \ldots, a_n$ ovat kiinteitä reaalilukuja ja x_i (vastaavasti y_i) ovat vektorin $\mathbf{v} \in V$ (vastaavasti vektorin $\mathbf{w} \in V$) koordinaatteja kannassa E. Luvut $a_1, \ldots, a_n$ ovat tällöin itse asiassa täsmälleen muodon H matriisin *ominaisarvoja.*

- Edellisestä seuraa, että muoto H on *positiivisesti semidefiniitti* (eli $H(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$ kaikilla $\mathbf{v} \in V$) jos ja vain jos $a_1, \ldots, a_n$ yllä ovat *ei-negatiivisia.* Muoto on vastaavasti *positiivisesti definiitti* jos luvut $a_1, \ldots, a_n$ ovat jopa aidosti positiivisia.

Polaarihajotelma

- Propositio 4.69: Jokaisella posiitivisesti semidefinitilla matriisilla S on olemassa *yksikäsitteinen* positiivisesti semidefinitti *neliöjuuri* eli sellainen positiivisesti semidefiniitti matriisi $T = \sqrt{S}$ jolle pätee $T^2 = S$.

- Propositio 4.70: Operaattorin L polaarihajotelma on $L = US$, missä U unitaarinen ja S positiivisesti semidefinitti. Itse asiassa $S = \sqrt{L^*L}$ on tällöin yksikäsitteinen. Jos L on kääntyvä, U on myös yksikäsitteinen.