Suorat summat

- Toiseen välikokeseen ei tule erillisiä tehtäviä ainoastaan tästä aihepiirista, mutta suorien summien teoria on silti osattava, sillä sitä sovelletaan jatkuvasti sekä lineaaristen operaatorien, että sisätuloavaruuksien teorioissa.
- Vektoriavaruuden V aliavaruuksien $W_1, \ldots, W_n$ *summa* on aliavaruus
$$W_1 + W_2 + \ldots + W_n = \sum_{i=1}^{n} W_i = \{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{w}_i \mid \mathbf{w}_i \in W_i \text{ kaikilla } i = 1, \ldots, n\}.$$
- Aliavaruuksien summa $\sum_{i=1}^{n} W_i$ on *suora*, jos jokaisen sen alkion esitys summana $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{w}_i$, missä $\mathbf{w}_i \in W_i$ jokaisella $i = 1, \ldots, n$, on *yksikäsitteinen*. Lemmassa 2.155 annetaan muita teknisiä tapoja karakterisoida suora summa. Jos summa $\sum_{i=1}^{n} W_i$ on suora, sitä merkitään $\oplus_{i=1}^{n} W_i$.
- Äärellisulotteisessa avaruudessa V kysymys siitä, onko aliavaruuksien $W_1, \ldots, W_n$ summa suora voidaan selvittää laskemalla dimensioita, sillä (Propositio 2.160) summa on suora jos ja vain jos
$$\dim(\sum_{i=1}^{n} W_i) = \sum_{i=1}^{n} \dim W_i.$$
- Hajotelmaan $V = \oplus_{i=1}^{n} W_i$ liittyy aina *kanonisia projektioita* $p_i \colon V \to W_i$. Alkioiden tasolla nämä määritellään seuraavasti. Oletetaan, että $\mathbf{v} \in V = \oplus_{i=1}^{n} W_i$. Tällöin $\mathbf{v}$ voidaan esittää yksikäsitteisellä tavalla summana $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{w}_i$, missä $\mathbf{w}_i \in W_i$ jokaisella $i = 1, \ldots, n$. Asetetaan $p_i(\mathbf{v}) = \mathbf{w}_i$.
- Kanoniset projektiot ovat aina surjektiivisia lineaarisia kuvauksia.
- Hajotelmaan $V = \oplus_{i=1}^{n} W_i$ liittyy aina myös *kanonisia injektioita* $\iota_i \colon W_i \to V$. Nämä ovat yksinkertaisesti inkluusioita.
- Kahden aliavaruuden W_1, W_2 tapauksessa summa $W_1 + W_2$ on suora jos ja vain jos $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}_V\}$, eli jos W_1 ja W_2 leikkavat vain "origossa" (Lemma 2.156).
- Äärellisulotteisen avaruuden V jokaisella aliavaruudella W on olemassa *komplementti* eli sellainen aliavaruus W' jolle pätee $W \oplus W' = V$ (Lemma 2.159). Komplementti ei yleensä missään nimessä ole yksikäsitteinen. Esimerkiksi tasossa (origon kautta kulkevan) suoran komplementti on mikä tahansa toinen (origon kautta kulkeva) suora.

Ulkoinen suora summa

- Edellä on esitetty niin sanotun sisäisen suoran summan käsite, jossa hajotelman $V = \oplus_{i=1}^{n} W_i$ tekijät W_i ymmärretään olevan valmiiksi kirjaimellisesti "isomman" avaruuden V aliavaruuksina. Käytännössä tämä riittää, sillä juuri sisäisen suoran käsitettä sovelletaan jatkossa eniten. Ulkoisen suoran summan teorian hallitseminen ei ole niin tärkeätä ja voidaan ajatella "lisätietona".

- Vektoriavaruuksien $W_1, \ldots, W_n$ *tuloavaruus* on karteesinen tulo

$$\prod_{i=1}^{n} W_i = W_1 \times W_2 \times \ldots \times W_n$$

varustettuna luonnollisella vektoriavaruuden struktuurilla ”koordinaateittain”.

- On olemassa kanonisen projektiot $p_j \colon \prod_{i=1}^n W_i \to W_j$, $p_j(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n) = \mathbf{w}_j$ ja kanoniset injektiot $\iota_j \colon W_j \to \prod_{i=1}^n W_i$, $\iota_j(\mathbf{w}) = (\mathbf{0}_{W_1}, \ldots, \mathbf{w}_j, \ldots, \mathbf{0}_{W_n})$.

- Kanonisen projektiot ovat surjektiivisia lineaarisia kuvauksia.

- Kanonisen injektiot ovat injektiivisia lineaarisia kuvauksia. Tästä seuraa, että W_j on isomorfinen tuloavaruuden $\prod_{i=1}^n W_i$ aliavaruuden $\iota_j(W_j)$ kanssa. Tämän havainnon ansiosta sovitaan samaistamaan W_j aliavaruuden $\iota_j(W_j)$ kanssa.

- Tällöin jokainen avaruus W_j voidaan ajatella tuloavaruuden $\prod_{i=1}^n W_i$ aliavaruutena. Lemman 2.146 nojalla aliavaruudet W_i muodostavat tällöin *suoran summan*, jonka arvo on koko tuloavaruus $\prod_{i=1}^n W_i$.

- Edellisen ominaisuuden ansiosta on luonnollista sanoa tuloavaruus $\prod_{i=1}^n W_i$ avaruuksien $W_1, \ldots, W_n$ *ulkoiseksi suoraksi summaksi.*

- Sekä suoraan summaan, että tuloavaruteen liittyy omaa ”universaaliominaisuutensa”. Näiden ymmärtäminen ja osaaminen abstraktilla tasolla ei ole tämän kurssin kannalta aivan välttämätöntä.

Luku 3 - Lineaariset operaattorit

Luvun 3 tärkeimmät käsitteet:
- Invariantti aliavaruus, ominaisarvo, ominaisvektori, diagonalisoituvuus. Karakteristinen polynomiyhtälö, yläkolmiomatriisi, algebrallisesti suljettu kunta, kunnan algebrallinen sulkeuma.
- Abstrakti algebrallinen polynomi ja niiden muodostama polynomialgebra. Polynomialgebran jaollisuusteoria. Polynomialgebran universaali ominaisuus. Polynomin juuret.
- Operaattorin/matriisin karakteristinen polynomi ja minimipolynomi. Yleistetyt ominaisarvoaliavaruudet. Nilpotentit operaattorit. Syklinen kanta. Jordanin solu, Jordanin normaali muoto.

Invariantit aliavaruudet

- Aliavaruus W on invariantti operaattorin L suhteen jos $L(W) \subset W$. Tällöin rajoittuma $L|W \colon W \to W$ on hyvinmääritelty avaruuden W operaattori.

- Jos avaruus V on äärellisulotteinen ja $W \leq V$ on invriantti operaatorin L suhteen, operaattorilla L on matriisiesitys muotoa

$$[L]_E = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

missä kanta $E = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ on sellainen, että $E' = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$ on aliavaruuden W kanta. Matriisi A on tällöin rajoittuman $L|W$ matriisi kannan E' suhteen.

- Kääntäen, jos operaattorin L matriisi jonkun kannan suhteen $E = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ on lohkomatriisi muotoa
$$[L]_E = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix},$$
missä A on $(k \times k)$-kokoinen neliömatriisi, niin $W = \mathrm{Span}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$ on L-invariantti.

- Jos $V = W \oplus W'$, missä sekä W, että W' ovat L-invariaantteja, niin operaattorilla L on sopivassa kannassa matriisi muotoa
$$[L]_E = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$
Myös käänteinen väite on olemassa.

- Yleisemmin, jos $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_n$, missä kaikki aliavaruudet W_i ovat L-invariantteja, operaattorilla on sopivassa kannassa esitys lohkomatriisina muotoa
$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & A_n \end{bmatrix},$$
missä A_i on rajoittuman $L|W_i \colon W_i \to W_i$ matriisi jokaisella $i = 1, \ldots, n$.

- Tällaisen lohkomatriisin determinantti saadaan laskettua yksinkertaisella kaavalla
$$\det L = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdot \ldots \cdot \det A_n = \prod_{i=1}^{n} \det(L|W_i).$$

- Jos kunta K on algebrallisesti suljettu, jokaisella äärellisulotteisen K-vektoriavaruuden V operaattorilla L on ainakin yksi 1-ulotteinen aliavaruus, joka on invariantti L:n suhteen. Tämä seuraa suoraan siitä, että silloin L:llä on ainakin yksi ominaisarvo.

- Edellisen tuloksen yleistys (Propisitio 3.22 ja Lemma 3.19): Olkoon L operaattori n-ulotteisessä K-vektoriavaruudessa V, missä kunta K on algebrallisesti suljettu. Tällöin on olemassa nouseva ketju
$$W_1 \subset W_2 \subset \ldots \subset W_{n-1}$$
L-invariantteja aliavaruuksia siten, että $\dim W_i = i$ kaikilla $i = 1, \ldots, n-1$. Sama tulos matriisien kielellä tarkoittaa sitä, että operaattori L voidaan esittää sopivassa kannassa yläkolmiomatriisin muodossa (Propositio 3.22).

- Kaksi edellistä kohtaa eivät päde jos K ei ole algebrallisesti suljettu. Sisätuloavaruuksien teorian yhteydessä myöhemmin näytetään, että jokaisella operaattorilla L äärellisulotteisessa $\mathbb{R}$-vektoriavaruudessa V on olemassa L-invariantti aliavaruus W, jonka dimensio on korkeintaan 2 (Lemma 4.57).

Ominaisarvot- ja vektorit

- Vektori $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$ on operaattorin L ominaisarvo jos on olemassa $k \in K$ siten, että $L(\mathbf{v}) = k\mathbf{v}$. Skalaari k on tällöin operaattorin L ominaisarvo.
- Ominaisarvo k määrää *ominaisaarvovektorialiavaruuden*

$$V_k = \{\mathbf{v} \mid L(\mathbf{v}) = k\mathbf{v}\}.$$

- Äärellisulotteisessä tapauksessa ominaisarvot ovat täsmälleen operaattorin L *karakteristisen polynomin* χ_L juuret. Tämä polynomi määritellään ensin "naiivisti" polynomifunktiona $K \to K$, joka on annettu kaavalla $k \mapsto \det(k\,\mathrm{id}_V - L) = \det(kI_n - A)$ (missä $A = [L]_E$ on operaattorin esitys jossakin kannassa E). Myöhemmin sille annetaan myös algebrallinen määritelmä abstraktina algebrallisena polynomina $\det(\mathbf{X}I_n - A)$.
- Jordanin normaalimuotojen yhteydessä myöhemmin osoitetaan, että ominaisarvot ovat myös täsmälleen operaattorin L *minimipolynomin* juuret (Seuraus 3.87, tämä on osittain Cayley-Hamiltonin Lauseen sovellus).
- Jos $k_1, \ldots, k_n$ ovat operaattorin eri ominaisarvot, summa $\oplus_{i=1}^{n} V_{k_i}$ on suora (Lemma 3.7).

Diagonalisoituvuus

- Jos äärellisulotteisen avaruuden V kaikkien ominaisarvoaliavaruuksien suora summa $\oplus_{i=1}^{n} V_{k_i}$ on koko avaruus V, operaattoria L sanotaan *diagonalisoituvuksi.*
- Operaattori on diagonalisoituva jos ja vain jos sen matriisi jonkun kannan suhteen on diagonaalimatriisi.
- Jos avaruus V on äärellisulotteinen, sen operaattorilla voi olla korkeintaan luvun $\dim V$ verran eri ominaisarvoja. Jos eri ominaisarvoja on tasan $\dim V$, operaattori on diagonalisoituva (Lemmat 3.7 ja 3.11). Käänteinen ei päde!
- Ominaisarvon k *geometrinen kertaluku* on ominaisarvoaliavaruuden V_k dimensio vektoriavaruutena. Ominaisarvon k *algebrallinen kertaluku* on sen kertaluku karakteristisen polynomin juurena (joka määritellään myöhemmin polynomialgebran sovelluksien yhteydessä). Geometrinen kertaluku on aina pienempi tai yhtä suuri kuin algebrallinen kertaluku (Lemma 3.78). Operaattori on diagonalisoituva jos ja vain jos sen karakteristinen polynomi on jaettavissa ensimmäisen asteen tekijöihin ja jokaisen sen juuren geometrinen kertaluku on sama kuin sen algebrallinen kertaluku (Lemma 3.81).
- Myöhemmin keksitään vielä yksi kätevä tapa osoittaa, että operaattori on diagonalisoituva - nimittäin Proposition 3.113 nojalla operaattori on diagonalisoituva jos ja vain jos sen minimipolynomi on esitettävissä *erilaisten* ensimmäisen asteen tekijöihin tulona.

- Neliömatriisi $A \in M(n \times n; K)$ on diagonalisoituva jos se on diagonalisoituva kuvauksena $L_A \colon K^n \to K^n$. Ekvivalentisti A on diagonalisoituva jos ja vain jos $A = XDX^{-1}$, missä D diagonalimatriisi ja X on kääntyvä matriisi (Lemma 3.12).

- Operaattori on diagonalisoituva jos ja vain jos sen matriisiesitys jonkun kannan suhteen on diagonalisoituva.

Algebrallisesti suljetut kunnat

- Kunta on algebrallisesti suljettu jos jokaisella ei-vakiopolynomilla $\mathbf{p} \in K[\mathbf{X}]$ on ainakin yksi juuri kunnassa K. Polynomien jaollisuusteorian avulla nähdään, että tällöin pätee vahvempi tulos - kun kunta K on alg. suljettu jokainen ei-vakiopolynomi $\mathbf{p} \in K[\mathbf{X}]$ voidaan esittää ensimmäisen asteen tekijöiden tulona.

- Kompleksilukujen kunta $\mathbb{C}$ on algebrallisesti suljettu. Reaalilukujen kunta $\mathbb{R}$ ei ole algebrallisesti suljettu.

- Vaikka kunta ei olisi algebrallisesti suljettu, joskus hyödyllisiä tuloksia saadaan kun tarkastellaan tilanne isommassa kunnassa, joka on algebrallisesti suljettu. Juuri tällä tavalla kurssimateriaalissa todistetaan esimerkiksi Cayley-Hamiltonin Lause. Muita esimerkkejä tämän tekniikan hyväksikäytöstä löytyy kurssin harjoitustehtävistä. Voidaan osoittaa, että jokainen kunta on jonkun algebrallisesti suljetun kunnan alikunta.

- Jos skalaarikunta K on *algebrallisesti suljettu*, jokaisella (epätriviaalin) K-vektoriavaruuden V operaattorilla V on ainakin yksi ominaisarvo. Tämä seuraa suoraan määritelmästä ja siitä, että ominaisarvot ovat erään polynomiyhtälön juuria.

- Propositiossa 3.22 osoitetaan, että algebrallisesti suljetun kunnan K tapauksessa jokainen äärellisulotteisen K-vektoriavaruuden operaattori voidaan esittää yläkolmiomatriisina jossakin avaruuden kannassa. Tämän tuloksen avulla osoitetaan myöhemmin tärkeä *Cayley-Hamiltonin Lause* (Lause 3.84).

Polynomialgebra

- Yksi syy miksi polynomeista ollaan kiinnostuneita on edellä jo mainittu yhteys ominaisarvoihin - äärellisulotteisessa avaruudessa operaattorin ominaisarvot ovat tasan karakteristisen polynomin juuret.

- Toinen tärkeä syy liittyy siihen, että polynomit nousevat luonnollisella tavalla esille missä tahansa K-algbrassa. Neliömatriisit ja äärellisulotteisen vektoriavaruuden operaattorit taas muodostavat K-algebran.

- Käytännössä edellinen tarkoittaa seuraavaa. Olkoon $L \colon V \to V$ operaattori. Tällöin voidaan laskea sen potensseja L^k, $k \in \mathbb{N}$. Nämä voidaan myös kertoa skalaareilla ja laskea yhteen. Tästä seuraa, että kun $\mathbf{p} = a_n\mathbf{X}^n + \ldots + a_1\mathbf{X} + a_0$ on polynomi, "muuttujan" $\mathbf{X}$ paikalle voidaan "sijoittaa" operaattori L. Tällöin saadaan toinen operaattori $p(L) = a_nL^n + \ldots + a_1L + a_0$.

- Edellinen pykälä paljastaa olennaisen syyn, miksi polynomialgebran (ja sen yleistykset) ovat välttämätön työkalu missä tahansa kontekstissa, jossa esiintyvät K-algebrat. Teknisellä tasolla tämä koodataan *polynomialgebran universaalina ominaisuutena*, joka on esitetty Propositiossa 3.51.

- Käytännössä riittää ymmärtää, että kyse on vain siitä, että K-algebran A alkio $\mathbf{x}$ voidaan sijoittaa muuttujasymbolin $\mathbf{X}$ paikalle mihin tahansa polynomialgebran $K[\mathbf{X}]$ alkioon $\mathbf{p} = a_n\mathbf{X}^n + \ldots + a_1\mathbf{X} + a_0$. Lopputuloksena tällöin saadaan algebran A alkio, jota merkitään $p(\mathbf{x})$. Käytännössä $p(\mathbf{x}) = a_n\mathbf{x}^n + \ldots + a_1\mathbf{x} + a_0$. Kun $\mathbf{a} \in A$ pidetään kiinnitettynä, saadaan *sijoitushomomorfismi* $S_{\mathbf{x}}\colon K[\mathbf{X}] \to A$, $\mathbf{p} \mapsto p(\mathbf{x})$. Tämä kuvaus siis säilyttää yhteen-,skalaarikerto- sekä kertolaskun, toisin sanoen

$$(p+q)(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}),$$

$$(kp)(\mathbf{x}) = kp(\mathbf{x}),$$
$$(pq)(\mathbf{x}) = (p(\mathbf{x}))(q(\mathbf{x})).$$

- Kurssin oppimateriaalissa on esitetty polynomialgebran $K[\mathbf{X}]$ ja sen laskutoimitusten formaali eksakti konstruktio. Sitä ei tarvitse osata kokeessa, riittää tietää miten polynomeilla käytännössä lasketaan ja mitä ominaisuuksija nillä on.

- Algebrallinen polynomi on formaali lauseke muotoa $\mathbf{p} = a_n\mathbf{X}^n + \ldots + a_1\mathbf{X} + a_0$. Kaksi polynomia ovat samat täsmälleen silloin kun niillä on samat kertoimet. Tämä on ominaisuus, joka erottaa formaali algebrallinen polynomi ”naiivista” polynomifunktiosta.

- K-kertoimiset polynomit muodostavat K-algebran $K[\mathbf{X}]$, joka on äärellisulotteinen K-vektoriavaruutena. Muuttujasymbolin $\mathbf{X}$ potenssit $1, \mathbf{X}, \mathbf{X}^2, \ldots, \mathbf{X}^n, \ldots$ muodostavat tämän vektoriavaruuden kannan.

- Käytännössä polynomeilla lasketaan kuten polynomifunktioilla.

- Jokainen nollasta eroava polynomi voidaan esittää muodossa $\mathbf{p} = a_n\mathbf{X}^n + \ldots + a_1\mathbf{X} + a_0$, missä $a_n \neq 0$, yksikäsitteisellä tavalla. Luonnollinen luku n on tällöin polynomin *aste* ja a_n on *johtava kerroin*. Jos $a_n = 1$, polynomi on *pääpolynomi.* Nollapolynomin aste määritellään tekniisistä syistä miinus äärettömäksi.

- 0-asteinen tai nollapolynomi sanotaan myös vakiopolynomiksi.

- Skalaarikunnan K alkio k samastetaan vastaavan vakiopolynomin kanssa.

Polynomirenkaan algebralliset ominaisuudet

- Polynomirengas on *kokonaisalue.*

- Edellisestä seuraa, että polynomirengas $K[\mathbf{X}]$ voidaan upottaa sen *osamääräkuntaan* $K(\mathbf{X})$, joka koostuu ”rationaalisista lausekeista” muotoa $\mathbf{p}/\mathbf{q}$.

- Kokonaisalueen osamääräkunnan konstruktio on esitetty oppimateriaalissa karakteristisen polynomin määritelmän yhteydessä. Ainoa syy tähän on se, että voisimme olla varmoja siitä, että polynomi-alkeisia matriisia saa käsitellä samalla tavalla kuin kunta-alkeisia matriisia. Mitään muita syitä osamääräkunnan teorian läpikäymiselle tällä kurssilla ei ole eikä sitä käytetä mihinkaan muuhun. Tästä syystä osamääräkunnan teoria *ei tarvitse osata kokeessa* ja voi huoletta skipata. Riittää vain tietää, että se antaa luvun käsitellä matriiseja, joiden alkiot ovat polynomit.

- Renkaana polynomialgebra on *pääideaalirengas*. Tämä tarkoittaa sitä, että jokainen sen ideaali on yhden alkion virittämä. Tämä on puolestaan seuraus *jakoyhtälöstä* (Propositio 3.35). Polynomin $\mathbf{p}$ virittämää ideaalia merkitään $(\mathbf{p})$.

- Pääideaalirenkaassa ei-triviaalin ideaalin virittäjä ei yleensä ole yksikäsitteinen. Polynomialgebrassa sen voidaan kuitenkin tehdä yksikäsitteiseksi, jos lisäksi vaatii, että tämä virittäjä on *pääpolynomi*. Toisin sanoen jokaisella polynomirenkaan ideaalilla on *yksikäsitteinen* pääpolynomi-virittäjä.

- Olkoon A K-algebra ja $\mathbf{x} \in A$. Sijoitushomomorfismin $S_{\mathbf{x}}$ ydin $\operatorname{Ker} S_{\mathbf{x}}$ on polynomirenkaan $K[\mathbf{X}]$ ideaali, joten se on joko triviaali ideaali $\{\mathbf{0}\}$ tai yksikäsitteisen pääpolynomin $\mathbf{m}_{\mathbf{x}}$ virittämä. Edellisessä tapauksessa alkio $\mathbf{x}$ on transkendentti, jälkimmäisessä - algebrallinen. Polynomia $\mathbf{m}_{\mathbf{x}}$ sanotaan tällöin alkion $\mathbf{x}$ *minimipolynomiksi.*

- Jos algebran A alkio $\mathbf{x}$ on algebrallinen, sen virittää alialgebra $K[\mathbf{x}]$ on äärellisulotteinen K-vektoriavaruutena, itse asiassa sen dimensio on tasan minimipolynomin $\mathbf{m}_{\mathbf{x}}$ aste.

- Äärellisulotteisen K-algebran jokainen alkio on algebrallinen.

Jaollisuus polynomirenkaassa

- Polynomirenkaassa $K[\mathbf{X}]$ voidaan kehittää jaollisuusteoria, joka on täysin analoginen kokonaislukujen jaollisuusteorian kanssa.

- Polynomi $\mathbf{p}$ on jaollinen polynomilla $\mathbf{q}$ jos on olemassa polynomi $\mathbf{r}$ siten, että $\mathbf{p} = \mathbf{qr}$. Tämä voidaan yhtäpitävästi esittää ideaalin kielellä ehdolla $(\mathbf{p}) \subset (\mathbf{q})$. Jos $\mathbf{p}$ on jaollinen polynomilla $\mathbf{q}$, merkitään myös $\mathbf{p} \mid \mathbf{q}$. Polynomi $\mathbf{q}$ on tällöin polynomin $\mathbf{p}$ *tekijä.*

- Jokainen polynomi $\mathbf{p}$ on jaollinen vakiopolynomeilla sekä polynomeilla muotoa $k\mathbf{p}$, $k \in K$. Jos nämä ovat polynomin ainoat tekijät ja polynomi ei ole vakiopolynomi, sitä sanotaan *jaottomaksi.*

- Polynomialgebran aritmetiikan peruslause: Jokainen polynomi voidaan esittää jaottomien polynomien tulona oleellisesti yksikäsitteisellä tavalla (Propositio 3.48).

- Polynomit $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ ovat keskenään jaottomia jos ainoat niiden yhteiset tekijät ovat vakiopolynomit. Lemma 3.45: Polynomit $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ ovat keskenään jaottomia jos ja vain jos $\mathbf{sp} + \mathbf{qt} = 1_K$ joillakin polynomeilla $\mathbf{s}, \mathbf{t}$.

- Kunnan K tai yleisemmin K-algebran $K[X]$ alkio $\mathbf{x}$ on polynomin $\mathbf{p} \in K[\mathbf{X}]$ juuri jos pätee $p(\mathbf{x}) = 0$.

- Kunnan K alkio k on polynomin $\mathbf{p}$ juuri jos ja vain jos $\mathbf{p}$ on jaollinen polynomilla $(\mathbf{X}-k)$. Tästä seuraa, että kunnassa polynomilla $\mathbf{p}$ on korkeintaan sen asteen verran juuria. Mielivaltaisessa K-algebrassa tämä ei enää päde.

- Polynomin $\mathbf{p}$ juuren $k \in K$ kertaluku l on suurin luonnollinen luku, jolle polynomi $(\mathbf{X} - k)^l$ jakaa polynomin $\mathbf{p}$.

Polynomialgebran sovelluksia lineaarialgebrassa

- Olkoon V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus. Tällöin sen operaattorien muodostama K-vektoriavaruus $L(V)$ on myös äärellisulotteinen, joten jokainen sen alkio on algebrallinen.

- Edellisestä seuraa, että jokaisella operaattorilla $L\colon V \to V$ on olemassa sen yksikäsitteinen *minimipolynomi* $\mathbf{m}_L$. Tämä on asteeltaan pienin nollasta eroava pääpolynomi, jolle pätee $m_L(L) = 0$.

- Samantyyppisista syistä jokaisella neliömatriisilla $A \in M(n \times n; K)$ on olemassa sen yksikäsitteinen minimipolynomi $\mathbf{m}_L$. Operaattorilla ja sen matriisilla (jossakin kannassa) on sama minimipolynomi.

- Matriisin $A \in M(n \times n; K)$ *karakteristinen polynomi* määritellään polynomina $\chi_A = \det(\mathbf{X}I_n - A)$. Tässä matriisin $\mathbf{X}I_n - A$ alkiot ovat K-kertoimisia polynomeja.

- Operaattorin $L\colon V \to V$ karakteristinen polynomi on sen matriisin $A = [L]_E$ karakteristinen polynomi χ_L. Määritelmä on järkevä, sillä se ei riipu kannan E valinnasta.

- Tärkeä *Cayley-Hamiltonin lause* (Lause 3.84) sanoo, että operaattorin/matriisin minimipolynomi on aina karakteristisen polynomin tekijä. Lisäksi osoittautuu, että kummallakin on samat juuret kunnassa K. Yleisemmin näillä polynomeilla on samat jaottomat tekijät, mutta sitä tosiasiaa ei todistettu materiaalissa ja kokeessa ei edellytä, että se on opiskelijalle tuttua.

- Karakteristisen polynomin aste on aina avaruuden V dimensio. Minimipolynomin dimensio voi taas olla mikä tahansa kokonaisluku yhden ja $\dim V$:n välillä.

- Olkoon L äärellisulotteisen vektoriavaruuden V operaattori ja olkoon $\mathbf{p} \in K[\mathbf{X}]$ polynomi. Tällöin
$$V_{\mathbf{p}} = \operatorname{Ker} p(L)$$
on L-invariantti aliavaruus.

- Lemma 3.89: Kun $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in K[\mathbf{X}]$ ovat *keskenään jaottomat*, pätee
$$V_{\mathbf{pq}} = V_{\mathbf{p}} \oplus V_{\mathbf{q}}.$$

- Soveltamalla edellinen tulos (sekä Cauchey-Hamiltonin Lause) karakteristiseen polynomiin saadaan
$$V = \oplus_{i=1}^{m} V_{\mathbf{p}_i^{l_i}},$$
missä $\chi_l = \mathbf{p}_1^{l_1}\mathbf{p}_2^{l_2}\dots\mathbf{p}_m^{l_m}$ on hajotelma jaottomiin tekijöihin. Tämä todistetaan Propositiossa 3.90.

- Samassa Propositiossa 3.90 myös todetaan, että kun $j \neq i$ operaattorin $p_j(L)$ rajoittuma aliavaruuteen $V_{\mathbf{p}_i^{l_i}}$ on isomorfismi.

- Tämän jälkeen keskitytään erikoistapaukseen, jossa jokainen karakteristisen polynomin tekijä $\mathbf{p}_i$ on ensimmäistä astetta, eli muotoa $(\mathbf{X}-k_i)$. Tällöin k on operaattorin L ominaisarvo ja aliavaruutta
$$V_{(\mathbf{X}-k_i)^{l_i}} = \mathrm{Ker}(L-k_i)^{l_i}$$
sanotaan *yleistetyksi ominaisarvoaliavaruukseksi.* Tätä merkitään myös V^{k_i}. Edellisen nojalla yleistetyt ominaisarvoaliavaruudet muodostavat suoran summan, jonka arvo on koko avaruus V, edellyttäen, että karakteristinen polynomi on jaettavissa ensimmäisen asteen tekijöihin. Tämä oletus pitää aina paikkansa kun kerroinkunta K on algebrallisesti suljettu, mutta ei välttämättä yleisesti.

- Yleistetyssä ominaisarvoaliavaruudessa V^k operaattori $(L - k\,\mathrm{id}_V)$ on *nilpotentti.* Tästä syystä tutkitaan nilpotenttien operaattorien ominaisuuksia.

Nilpotentit operaattorit

- Operaattori L on *nilpotentti* jos $L^m = 0$ jollakin $m \in \mathbb{N}$. Pienintä tällaista lukua m sanotaan tällöin nilpotentin operaattorin L *asteeksi.*

- Olkoon L nilpotentti operaattori ja olkoon $\mathbf{v} \in V$. Tällöin on olemassa pienin luonnollinen luku $m(\mathbf{v})$ siten, että $L^{m(\mathbf{v})}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_V$. Lukua $m(\mathbf{v})$ sanotaan vektorin $\mathbf{v}$ asteeksi nilpotentin operaattorin L suhteen.

- Lemma 3.92: Jono $(\mathbf{v}, L(\mathbf{v}), \dots, L^{m(\mathbf{v})-1}(\mathbf{v}))$ on vapaa. Sen virittämää aliavaruutta W sanotaan *sykliseksi.* Kantaa $(L^{m(\mathbf{v})-1}(\mathbf{v}), \dots, L(\mathbf{v}), \mathbf{v})$ (käänteinen järjestys!) sanotaan sykliseksi. Tässä kannassa operaattorin L rajoittuma sykliseen aliavaruuteen W on *Jordanin* 0*-solu*
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

- Propositio 3.95 - jos operaattori L on nilpotentti, niin V on suora summa syklisistä aliavaruuksista. Matriisien kielellä tämä tarkoittaa sitä, että L voidaan esittää lohkomatriisina, jossa jokainen lohko on Jordanin 0-solu, toisin sanoen *Jordanin normaalimuodossa.* Propositio 3.95 on siis käytännössä Jordanin Lauseen (Seuraus 3.108) erikoistapaus nilpotentteille operaattoreille.

Jordanin normaalimuoto

- Jordanin $(n \times n)$-kokoinen k-solu (missä $k \in K$) on $(n \times n)$-matriisi

$$N(k,n) = \begin{bmatrix} k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k \end{bmatrix}.$$

  Matriisi on Jordanin normaalimuodossa jos se on lohkomatriisi

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_k \end{bmatrix},$$

  missä jokainen lohko A_i on Jordanin solu.

- Seuraus 3.108: Operaattori voidaan esittää Jordanin normaalimuodossa jos ja vain jos sen karakteristinen polynomi on ensimmäisen asteen tekijöiden tulo. Tämä ehto on aina voimassa jos skaalarikunta on algebrallisesti suljettu, mutta ei yleisesti.

- Operaattorin esitys Jordanin normaalimuodossa on solujen permutaatiota vaille *yksikäsitteinen* (Propositio 3.110).

- Tässä kurssissa osassa käydään läpi kurssin vaikeampia todistuksia, esimerkkeinä voidaan mainita Propositiot 3.95 ja 3.110. Tällaisia todistuksia ei tarvitse kokeessa osata, tärkeintä on tuntea tulokset ja osaa soveltaa niitä. Käytännön laskutaitoja ei välttämättä oppi ainoastaan teoreettisesta materiaalista - muista myös laskuharjoitukset ja niiden ratkaisut!

- Oletetaan, että operaattorin karakteristinen polynomi on jaettavissa ensimmäisen asteen tekijöihin,

$$\chi_L = \prod_{i=1}^{m} (\mathbf{X} - k_i)^{l_i}.$$

  Tällöin sen minimipolynomi $\mathbf{m}_L$ on muotoa $\prod_{i=1}^{m} (\mathbf{X} - k_i)^{l'_i}$, missä $(l'_i \times l'_i)$ on *suurimman* Jordanin k_i-solun koko operaattorin L Jordanin normaalimuodossa.