Lineaariset kuvaukset ja matriisit

Lineaariset kuvaukset

Kuvausta $L\colon V \to W$ (V ja W K-vektoriavaruuksia) sanotaan K-lineaariseksi, jos kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ja kaikilla $k \in K$ pätee

- $L(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = L(\mathbf{v}) + L(\mathbf{w})$,
- $L(k\mathbf{v}) = kL(\mathbf{v})$

Kahden lineaarisen kuvauksen $L\colon V \to W$, $L'\colon W \to U$ yhdiste $L' \circ L = L'L$ on myös lineaarinen. Jos lineaarinen kuvaus on bijektio, sen käänteiskuvaus on myös lineaarinen.

Jokainen lineaarinen kuvaus $L\colon V \to W$ määritelee tärkeitä aliavaruuksia - *ydin*

$$\operatorname{Ker} L = \{\mathbf{v} \in V \mid L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W\},$$

joka on avaruuden V aliavaruus, ja *kuvajavaruus*

$$\operatorname{Im} L = \{L(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\},$$

joka on vektoriavaruuden W aliavaruus.
Lineaarinen kuvaus on injektio jos ja vain jos sen ydin on triviaali.

Kaikkien lineaaristen kuvausten $L\colon V \to W$ muodostamaa joukkoa merkitään $L(V, W)$. Tässä joukossa voidaan määritellä K-vektoriavaruuden struktuuri. Laskutoimitukset $+$, $\cdot$ joukossa $L(V, W)$ määritellään pisteittäin,

$$(L + L')(\mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) + L(\mathbf{v}) \text{ kaikilla } \mathbf{v} \in V,$$

$$(kL)(\mathbf{v}) = kL(\mathbf{v}), \mathbf{v} \in V.$$

Koska lineaarisia kuvauksia voidaan myös yhdistää (ja tuloksena on aina lineaarinen kuvaus), voidaan puhua myös lineaaristen kuvusten ”kertolaskusta” $L'L =' \circ L$. Seuraavat algebralliset yhtälöt ovat voimassa silloin kun ovat määriteltyjä:

$$L'(L_1 + L_2) = L'L_1 + L'L_2$$

$$(L_1' + L_2')L = L_1'L + L_2'L$$
$$k(L'L) = (kL')L = L'(kL)$$
$$(L''L')L = L''(L'L)$$
$$L' \operatorname{id} = L'$$
$$\operatorname{id} L = L$$

Lin. kuvauksia $L\colon V \to V$ (sama lähtö- ja maaliavaruus) sanotaan *endomorfismeiksi* tai *operaattoreiksi*. Merkitään $L(V, V) = L(V)$. Koska kuvauksille $L, L'\colon V \to V$ yhdiste $L'L$ onaina määritelty, joukossa $L(V)$ on vektoriavaruuden struktuurin lisäksi määritelty *kertolasku*. Tällä ja vektoriavaruuden struktuurilla varustettu $L(V)$ on K-*algebra*.

Algebran käsitettä (määritelmä 2.72) ei tarvitse ensim. välikokeessa osata yleisesti, mutta on kuitenkin osattava hallita käytännössä kaksi meidän kannalta tärkeätä esimerkkiä algebrasta - $L(V)$ ja neliömatriisien algebra $M(n \times n; K)$.

Matriisit

K kertoiminen $(n \times m)$-matriisi on taulukko

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

jolla on n riviä ja m saraketta ja jolle $a_{ij} \in K$ kaikilla $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Matriisi voidaan kertoa skalaarilla $k \in K$. Samankokoisia matriiseja voi laskea yhteen. Kaikki $(n \times m)$-kokoiset matriisit muodostavat K-vektoriavaruuden $M(n \times m; K)$. Tämä avaruus on (nm)-ulotteinen (Lemma 2.62).

Matriisin $A = (a_{ij}) \in M(n \times m; K)$ rivejä tulkitaan luonnollisella tavalla avaruuden K^m alkioina ja merkitään $r_1(A), \dots, r_n(A)$. Samalla tavalla sarakkeita tulkitaan avaruuden K^n alkioina ja merkitään $c_1(A), \dots, c_n(A)$.

Matriisin rivien virittämää avaruutta $\mathrm{Span}(r_1(A), \dots, r_n(A))$ merkitään $\mathrm{Row}(A)$ ja sanotaan matriisin riviavaruudeksi.

Matriisin sarakkeiden virittämää avaruutta $\mathrm{Span}(c_1(A), \dots, c_n(A))$ merkitään $\mathrm{Col}(A)$ ja sanotaan matriisin sarakeavaruudeksi.

Duaaliavaruuksien teorian avulla olemme johtaneet (Propositio 2.118), että

$$\dim \mathrm{Row}(A) = \dim \mathrm{Col}(A).$$

Matriiseille on määritelty myös *kertolasku*. Tarkemmin sanottuna tulo AB on määritelty kun A on $(n \times m)$ matriisi ja B on $(m \times p)$ matriisi. Tulos $AB = C$ on tällöin $(n \times p)$ matriisi, jolle

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}.$$

"Pistetulon" avulla tämä voidaan kirjoittaa myös muodossa $c_{ij} = r_i(A) \cdot c_j(B)$ eli "kerrotaan rivi sarakkeelle" (kts. esim. 2.132).

Matriisien laskutoimitukset toteuttavat seuraavia kaavoja, kun ne ovat määriteltyjä:

$$(AB)C = A(BC)$$

$$A(B + B') = AB + AB'$$

$$(A + A')B = AB + A'B$$

$$I_n A = A I_m = A$$

$$k(AB) = (kA)B = A(kB)$$

Neliömatriisit $M(n \times n; K)$ muodostavat K-*algebran*. Neliömatriisi on kääntyvä tässä algebrassa jos ja vain jos sillä on vasemmanpuoleinen (tai oikeanpuoleinen) käänteisalkio tässä algebrassa (Seuraus 2.95)

Lineaarisen kuvauksen matriisi

Olkoot V ja W *äärellisulotteiset* K-vektoriavaruudet. Olkoon $E = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ avaruuden V kanta ja olkoon $F = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ avaruuden W kanta. Olkoon $L\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus. Tällöin *kuvauksen L matriisi kantojen E ja F suhteen* on matriisi

$$[L]_{F,E} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

jonka kertoimet $a_{ij} \in K$ määräytyvät (yksikäsitteisesti) yhtälöistä

$$L(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{w}_j,\ j = 1, \dots, m.$$

Toisin sanoen matriisin $A = [L]_{F,E}$ j:nnes sarake $c_j(A)$ saadaan laitamalla siihen V:n kannan alkion $\mathbf{v}_j$ kuvan $L(\mathbf{v}_j)$ *koordinaatit* W:n kannan F suhteen.

Propositio 2.64: Vastaavuus $\Phi_{E',E}\colon L(V, W) \to M(n \times m; K)$, $\Phi_{E',E}(L) = [L]_{E',E}$ on lineaarinen *isomorfismi.* Erityisesti

$$\dim L(V, W) = \dim V \cdot \dim W.$$

Vastaavuus $\Phi_{E',E}\colon L(V, W) \to M(n \times m; K)$ myös säilyttää kertolaskun seuraavassa mielessä:
Propositio 2.76: Olkoot V, W, U äärellisulotteisia K-vektoriavaruuksia. Olkoon E avaruuden V kanta, F avaruuden W kanta ja G avaruuden U kanta. Olkoot $L\colon V \to W$ ja $L'\colon W \to U$ lineaarisia kuvauksia. Tällöin

$$[L'L]_{G,E} = [L']_{G,F}[L]_{F,E}.$$

Erityisesti jos $V = W$ ja valitaan $E = E'$, nähdään, että vastaavuus $\Phi_E\colon L(V) \to M(n \times n; K)$ on algebrojen välinen isomorfismi. Identtista kuvausta id_V vastaa tällöin *yksikkömatriisi* I_n.

Matriisin indusoima kanoninen kuvaus
Olkoon $A = (a_{ij}) \in M(n{\times}m; K)$ matriisi. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi lineaarinen kuvaus $L_A\colon K^m \to K^n$, jonka matriisi $[L_A]_{E^n,E^m}$ avaruuksien K^m ja K^n standardikantojen E^m ja E^n suhteen on matriisi A. Tämä kuvaus, jolle pätee

$$L_A(\mathbf{e}_j^m) = \sum_{i=1} a_{ij}\mathbf{e}_i^n$$

kaikilla $j = 1, \dots, m$. Alkioiden tasolla kuvaus L_A on määritelty kaavalla

$$L_A(x_1, \dots, x_m) = (y_1, \dots, y_n),\ \text{missä} \tag{1}$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j.$$

Jokainen lineaarinen kuvaus $L\colon K^m \to K^n$ voidaan esittää muodossa L_A, eli kaavana 1. Jos tulkitsemme vektoriavaruuden K^n alkion $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ "pystyvektorina", eli $(n \times 1)$-matriisina

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix},$$

ja samalla tavalla tulkitsemme mielivaltaisen vektorin $\mathbf{y} \in K^m$ pystyvektorina eli $(m \times 1)$-matriisina

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix},$$

voimme kirjoittaa kuvauksen L_A määritelmän myös matriisien kertolaskun avulla kaavana

$$L_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

Konstruktion perusteella pätee

$$\Phi_{E^n, E^m} = [L_A]_{E^n, E^m} = A.$$

Koska kuvaus Φ_{E^n, E^m} on bijektio, vastaavuus $A \mapsto L_A$ ei ole mitään muuta kuin *tämän bijektion käänteiskuvaus*, toisin sanoen pätee

$$L_A = \Phi^{-1}_{E^n, E^m}(A).$$

Avaruus $\operatorname{Im} L_A \subset K^n$ on sama asia kuin matriisin A sarakeavaruus $\operatorname{Col}(A)$.

Matriisin A *aste* $\operatorname{rank}(A)$ määritellään kaavalla

$$\operatorname{rank}(A) = \dim \operatorname{Im} L_A = \dim \operatorname{Col}(A).$$

Kuitenkin yhtä hyvin pätee $\operatorname{rank}(A) = \dim \operatorname{Im} L$, missä $L\colon V \to W$ on mikä tahansa lineaarinen kuvaus, jolle $[L]_{E', E} = A$ (missä E' on avaruuden W kanta ja E avaruuden V kanta).

Kantojen vaihtokaavat

Olkoon V n-ulotteinen K-vektoriavaruus ja olkoot $E = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ ja $E' = \{\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_n\}$ sen eri kannat. Identtisen kuvauksen $\mathrm{id}_V\colon V \to V$ matriisia $[\mathrm{id}_V]_{E', E}$ kantojen E ja E' suhteen merkitään $[E'|\, E]$ ja sanotaan **kannanvaihtomatriisiksi**. MAtriisin $[E'\,|E]$ kertoimet a_{ij} määräytyvät yksikäsittisestä lineaarisista kombinaatioista

$$\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \mathbf{v}'_i.$$

Tässä siis esitetään kannan E alkiot kannan E' alkioiden yksikäsitteisinä lineaarisina kombinaatioina ja poimitaan matriisin kertoimet niistä.

Kannanvaihtomatriisi $[E' \mid E]$ on kääntyvä ja sen käänteismatriisi on kannanvaihtomatriisi $[E \mid E']$,

$$[E' \mid E]^{-1} = [E \mid E'].$$

Olkoon $L\colon V \to W$ äärellisulotteisten K-vektoriavaruuksien V, W välinen lineaarinen kuvaus. Olkoot E, E' avaruuden V eri kannat ja olkoot F, F' avaruuden W eri kannat. Tällöin

$$[L]_{F',E'} = [\mathrm{id}_W]_{F',F} \cdot [L]_{F,E} \cdot [\mathrm{id}_V]_{E,E'} = [F' \mid F] \cdot [L]_{F,E} \cdot [E' \mid E]^{-1}.$$

Tämä on **kannanvaihtokaava** lineaarisen kuvauksen matriiseille.

Erikoistapaus - operaattori $L\colon V \to V$. Olkoot E, E' on avaruuden V kannat. Tällöin

$$[L]_{E'} = [E' \mid E][L]_E[E' \mid E]^{-1}.$$