# Duaaliavaruus

Olkoon $V$ $K$-vektoriavaruus. Lineaarisia kuvauksia $L\colon V \to K$ sanotaan avaruuden $V$ *lineaarisiksi muodoiksi*. Lineaariset muodot muodostavat $K$-vektoriavaruuden $L(V, K)$. Tätä vektoriavaruutta sanotaan avaruuden $V$ **duaali-avaruudeksi** tai yksinkertaisesti sen **duaaliksi**. Duaali $L(V, K)$ merkitään ssymbolilla $V^*$.

Olkoon $V$ äärellisulotteinen $K$-vektoriavaruus ja olkoon $E = (\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_m)$ jokin sen kanta. Tällöin jokaisella $j = 1, \ldots, m$ on olemassa tasan yksi lineaarinen kuvaus $\varepsilon^j\colon V \to K$ jolle pätee

$$\varepsilon^j(\mathbf{e}_i) = \begin{cases} 1, & \text{jos } j = i, \\ 0, & \text{jos } j \neq i. \end{cases}$$

**Lause 2.105:** Jono $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^m)$ on duaali-avaruuden $V^*$ kanta. Erityisesti $V^*$ on myös äärellisulotteinen ja

$$\dim V^* = \dim V.$$

Kantaa

$$(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^m)$$

sanotaan kannan $E = (\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_m)$ *duaaliksi kannaksi*.

# Lineaarikuvauksen duaali ja sen matriisi

Olkoot $V, W$ $K$-vektoriavaruuksia ja $L\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus. Olkoon $A\colon W \to K$ avaruuden $W$ duaalin $W^*$ alkio. Tällöin yhdistetty kuvaus $A \circ L$ on duaalin $V^*$ alkio. Näin saadaan määriteltyä kuvaus $L^*\colon W^* \to V^*$,

$$L^*(A) = A \circ L = AL.$$

Tämä kuvaus on lineaarinen. Kuvausta $L^*\colon W^* \to V^*$ sanotaan kuvauksen $L\colon V \to W$ *duaalikuvaukseksi* tai yksinkertaisesti sen *duaaliksi*.

Lineaarisilla kuvauksilla $L\colon V \to W$, $L'\colon W \to U$ pätee

$$(L'L)^* = L^* L'^*.$$

Olkoot $V, W$ äärellisulotteiset $K$-vektoriavaruudet. Olkoot $E = (\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_m)$, $E' = (\mathbf{e}'_1, \ldots \mathbf{e}'_n)$ avaruuksien $V$ ja $W$ kannat. Olkoon $L\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus. Tällöin on olemassa $(n \times m)$-matriisi $A = (a_{ij}) = [L]_{E',E}$ sekä $(m \times n)$-matriisi

$$B = [L^*]_{\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\eta}},$$

missä $\varepsilon$ on kannan $E$ duaalikanta ja $\eta$ on kannan $E'$ duaalikanta

**Propositio 2.108:** $[L^*]_{\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\eta}} = [L]^T_{E',E}$.

Tästä voidaan johtaa transpoosin ominaisuuksia:

$$(A_1 + A_2)^T = A_1^T + A_2^T,$$

$$(kA)^T = k(A^T),$$

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

**Seuraus 2.114:** Olkoot $V$ ja $W$ äärellisulotteisia $K$-vektoriavaruuksia. Olkoon $L\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus. Tällöin

$$\dim \operatorname{Ker} L^* = \dim W - \dim \operatorname{Im} L, \text{ ja}$$

$$\dim \operatorname{Im} L^* = \dim \operatorname{Im} L.$$

# Biduaali ja refleksiivisyys

Olkoon $V$ $K$-vektoriavaruus. Sen duaalin $V^*$ duaalia $(V^*)^*$ merkitään $V^{**}$ ja sanotaan avaruuden $V$ *biduaaliksi* tai sen *toiseksi duaaliksi*.

Jos $V$ on äärellisulotteinen, pätee

$$\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V.$$

Kanoninen kuvaus $\Phi\colon V \to V^{**}$ konstruoidaan asettamalla jokaisella $\mathbf{v} \in V$.

$$\Phi(\mathbf{v})(L) = L(\mathbf{v}).$$

Tällöin $\Phi$ on hyvinmääritelty ja lineaarinen.

Kuvauksen $\Phi$ ”luonnollisuus” tarkoittaa seuraavaa:

**Propositio 2.119:** Olkoot $V$, $W$ $K$-vektoriavaruuksia ja olkoon $L\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus. Tällöin

$$L^{**} \circ \Phi_V = \Phi_W \circ L$$

eli diagrammi

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\Phi_V"] & W \arrow[d, "\Phi_W"] \\ V^{**} \arrow[r, "L^{**}"] & W^{**}. \end{tikzcd}$$

kommutoi.

Äärellisulotteisten vektoriavaruuksien ”refleksivisyydellä” tarkoitetaan seuraavaa tulosta:

**Propositio 2.121:** Olkoon $V$ äärellisulotteinen $K$-vektoriavaruus. Tällöin kanoninen kuvaus $\Phi\colon V \to V^{**}$ on *isomorfismi*.