Äärellisulotteiset vektoriavaruudet

Kuten kurssin nimestäkin voi päätellä, kurssin keskeiset tulokset koskevat *äärellisulotteisia* vektoriavaruuksia.

Vektoriavaruus V on *äärellisulotteinen* jos on olemassa *äärellinen* $A \subset V$ siten, että $V = \mathrm{Span}(A)$.

Propositio 2.41: Jokaisella äärellisulotteisella vektoriavaruudella on olemassa äärellinen *kanta.*

Seuraus 2.46: Äärellisulotteisenavaruuden kahdella eri kannalla on sama koko.

Edellisen nojalla äärellisulotteisella vektoriavaruudella V on hyvinmääritely *dimensio* $\dim V$.

Propositio 2.48: Äärellisulotteisen vektoriavaruuden V aliavaruus W on myös äärellisulotteinen. Jokainen aliavaruuden W kanta voidaan täydentää koko avaruuden V kannaksi.

Seuraus 2.49: Olkoon V n-ulotteinen K-vektoriavaruus. Olkoon $A \subset V$.

- Jos A on vapaa, niin $|A| \leq n$. Yhtäsuuruus $|A| = n$ pätee tällöin jos ja vain jos A on avaruuden V kanta.
- Jos A virittää avaruuden V, niin $|A| \geq n$. Yhtäsuuruus $|A| = n$ pätee tällöin jos ja vain jos A on avaruuden V kanta.

Seuraus 2.93: Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus ja olkoon W sen aliavaruus. Tällöin tekijäavaruus V/W on äärellisulotteinen ja

$$\dim(V/W) = \dim V - \dim W.$$

Lineaariset kuvaukset äärellisulotteisten vektoriavaruksien välillä

Propositio 2.57: Olkoon V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus ja olkoon $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ sen kanta. Olkoon W mielivaltainen K-vektoriavaruus ja olkoon $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n)$ *mielivaltainen* jono sen alkiota, jonka pituus on $n = \dim V$. Tällöin *on olemassa yksikäsitteinen* lineaarinen kuvaus $L\colon V \to W$ siten, että kaikilla $i = 1, \ldots, n$ pätee $L(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$.

Havainnollisesti - riittää kertoa mihin kannan alkiot kuvautuvat.

Kaksi äärellisulotteista vektoriavaruutta ovat isomorfisia jos ja vain jos niillä on sama dimensio (Seuraus 2.59).

Kun V ja W ovat äärellisulotteisia ja $L\colon V \to W$ on lineaarinen kuvaus, voidaan puhua tämän kuvauksen *matriisista* tiettyjen kantojen suhteen (kts. tästä tarkemmin tiivistelmä lineaarisista kuvauksista ja matriiseista).

Propositio 2.92: Olkoon $L\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus ja oletetaan, että V on äärellisulotteinen. Tällöin $\operatorname{Im} L$ on myös äärellisulotteinen ja

$$\dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L = \dim V.$$

Tästä saadaan seuraavia tärkeitä periaatteita (Seuraus 2.94):
Olkoon $L\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus äärellisulotteisten K-vektoriavaruuksien välillä. Tällöin seuraavat väitteet pitävät paikkansa.

- Jos $\dim V < \dim W$, kuvaus L ei voi olla surjektio.
- Jos $\dim V > \dim W$, kuvaus L ei voi olla injektio.
- Jos $\dim V = \dim W$, kuvaus L on injektio jos ja vain jos se on surjektio. Toisin sanoen injektiivinen tai surjektiivinen lineaarinen kuvaus samanulotteisten avaruuksien välillä on aina automaattisesti isomorfismi.