Äärellisulotteinen lineaarialgebra, kevät 2015.
Harjoitus 14.
Ratkaisuehdotukset.

Kuten yleensäkin sisätuloavaruuksien teoriassa, näissä harjoituksissa $K$ tarkoittaa $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$.

1. Olkoon $L$ normaali operaattori äärellisulotteisessa $K$-sisätuloavaruudessa $V$. Oletetaan, että $L^{10} = L^8$. Osoita, että $L^3 = L$ ja että $L$ on itseadjungoitu.

**Ratkaisu:** Riittää osoittaa vastaava tulos matriiseille. Olkoon $A \in M(n \times n; K)$ normaali matriisi, jolle pätee $A^{10} = A^8$. Tapauksessa $K = \mathbb{R}$ matriisi voidaan ajatella myös kompleksiarvoisena, joten voidaan olettaa, että $K = \mathbb{C}$. Tällöin matriisi on edelleenkin normaali ja sille pätee $A^{10} = A^8$. Proposition 4.50 nojalla $A$ on diagonalisoituva normaalissa kannassa, mikä matriisien kielellä tarkoittaa sitä, että $A = UDU^{-1} = UDU^*$, missä $U$ on unitaarinen ja $D$ on diagonaalimatriisi. Tässä kumpikin matriisi $U, D$ on yleisesti ottaen kompleksiarvoinen, koska Propositio 4.50 pätee vain kompleksisessä tapauksessa!
Koska $A^{10} = A^8$ ja matriisit $A$ ja $D$ ovat similaarisia, pätee yhtä hyvin $D^{10} = D^8$. Tarkka perustelu:

$$A^m = (UDU^{-1})^m = UD^mU^{-1}$$

kaikilla $m \in \mathbb{N}$, mistä seuraa, että

$$D^{10} = U^{-1}A^{10}U = U^{-1}A^8U = D^8.$$

Koska $D$ on diagonaalimatriisi, se on muotoa

$$D = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & z_n \end{bmatrix}$$

joillakin $z_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$. Tässä luvut $z_i$ ovat itse asiassa matriisin $A$ (kompleksiset) ominaisarvot. Tällöin

$$\begin{bmatrix} z_1^{10} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2^{10} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & z_n^{10} \end{bmatrix} = D^{10} = D^8 = \begin{bmatrix} z_1^8 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2^8 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & z_n^8 \end{bmatrix},$$

mistä seuraa, että $z_i^{10} = z_i^8$ kaikilla $i = 1, \dots, n$. Tästä yhtälöstä (kompleksilukujen nollasääntö) seuraa, että joko $z_i = 0$ tai $z_i^2 = 1$. Kummassakin tapauksessa pätee $z_i^3 = z_i$. Näin ollen

$$D^3 = \begin{bmatrix} z_1^3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2^3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & z_n^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & z_n \end{bmatrix} = D,$$

mistä taas helposti seuraa, että $A^3 = A$. Jos $A$ olikin alunperin reaalikertoiminen, tämä yhtälö pätee edelleenkin, kun se ajatellaan joukon $M(n \times n; \mathbb{R})$ alkiona. Näin ollen $A^3 = A$, joten myös $L^3 = L$ riippumatta kerroinkunnasta.

Koska yhtälön $z^2 = 1$ ainoat ratkaisut $\mathbb{C}$:ssä ovat luvut 1 ja $(-1)$, joista kumpikin on reaaliluku, edellisestä seuraa, että matriisin $A$ kaikki ominaisarvot ovat itse asiassa reaalilukuja. Sama pätee kuvaukselle $L$. Propositiosta 4.55 seuraa, että $L$ on jopa itseadjungoituva.

**Huomautus:** tehtävän ratkaisussa nähdään tyyppillinen tapa, miten kompleksilukuja käytetään hyväksi sellaisissa ongelmissa, jotka koskevat reaalista tapausta. Nimittäin kun $K = \mathbb{R}$ normaali operaattori $L$ ei a priori ole diagonalisoituva ortonormaalissa kannassa. Kuitenkin siirtymällä matriiseihin ja huomaamalla, että $\mathbb{R}$-kertoimiselle matriisille $A$ sekä oletukset (normaali ja $A^{10} = A^8$), että johtopäätökset (itseadjungoitu ja $A^3 = A$) eivät riipu mitenkään siitä, minkä kunnan yli asia tarkastellaan - $\mathbb{R}$:n vai $\mathbb{C}$:n yli. Tästä syystä riittää tarkastella asia $\mathbb{C}$:n yli, jossa voidaan käyttää diagonalisoituvutta - joka ei pätisi $\mathbb{R}$:n kerroinkunnan tapauksessa.

2. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

reaaliarvoinen symmetrinen $(2 \times 2)$-matriisi. Osoita, että se on positiivisesti definiiti jos ja vain jos $a > 0$ ja $\det A > 0$.

**Ratkaisu:** Matriisin $A$ karakteristinen polynomi on

$$(\mathbf{X} - a)(\mathbf{X} - c) - b^2 = \mathbf{X}^2 - (a + c)\mathbf{X} + (a + c) + (ac - b^2).$$

Kuten Harjoituksen 9.2. ratkaisun kohdalla todettiin, tämän toisen asteen yhtälön kumpikin ratkaisu $x_1, x_2$ (matriisin $A$ ominaisarvot) on reaaliluku, koska yhtälön $x^2 - (a + c) + (ac - b^2)$ determinantti on

$$D = (a + c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0.$$

Tapauksessa $D = 0$ (joka on yhtäpitävä ehtojen $a = c$, $b = 0$ kanssa) kumpikin juuri on sama, $x_1 = x_2$, mutta tämä ei vaikuta johtopäätökseen.

Määritelmän mukaan $A$ on positiivisesti definiiti jos kumpikin matriisin ominaisarvo $x_1, x_2$ on *positiivinen* reaaliluku. Periaateessa kumpikin luku voidaan ratkaista (matriisien kertoimien lausekkeena) toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla,

$$x_{1,2} = \frac{(a + c) \pm \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}}{2},$$

joten ratkaisujen merkit voidaan tutkia suoraan tästä kaavasta, mutta se vaikuttaa työläältä. Tästä syystä valitaan kätevä oikotie ja sovelletaan niin sanotuihin *Vietan kaavoihin*, jotka sanovat (toisen asteen polynomin tapauksessa), että jos toisen asteen kompleksikertoimiselle yhtälöllä $x^2 + ux + v = 0$ on ratkaisut $x_1$ ja $x_2$, niin ne toteutavat yhtälöt

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -u, \\ x_1 x_2 = v. \end{cases}$$

Yksinkertaisin tapa todistaa tämä väite on huomata, että polynomien juurten teoriasta seuraa, että

$$x^2 + ux + v = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2) + x_1 x_2,$$

mistä Vietin kaavat seuravat, koska kompleksikertoimisen polynomifunktion kertoimet ovat yksikäsitteisiä (Harjoitus 10.5, $\mathbb{C}$ on ääretön kunta). Huomaa, että kaavat pätevät myös "surkastuneessa" tapauksessa, jossa $x_1 = x_2$, silloin tällöin $x_1$ on kaksinkertainen juuri ja edelleenkin pätee $x^2+ux+v = (x-x_1)(x-x_2) = (x-x_1)^2$.

Edellisestä seuraa, että tehtävän symmetrisen matriisin $A$ ominaisarvot $x_1$, $x_2$ toteuttavat kaavat

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a + c, \\ x_1 x_2 = \det A = ac - b^2. \end{cases}$$

Osoitetaan näiden avulla, että $x_1, x_2 > 0$ jos ja vain jos $a > 0$ ja $\det A > 0$. Oletetaan, että $x_1, x_2 > 0$. Koska positiivisten reaalilukujen summa ja tulo ovat positiivisia, tästä seuraa, että tällöin $a + c > 0$ ja $\det A = ac - b^2 > 0$. Edellisestä epäyhtälöstä seuraa, että ainakin toinen luvuista $a$ ja $c$ on positivinen. Jos $a > 0$, ollaan valmiit. Jos $c > 0$, jälkimmäisestä myös seuraa, että $a > b^2/c > 0$. Kaikissa tapauksessa siis $a > 0$ ja $\det A > 0$.

Oletetaan kääntäen, että $a > 0$ ja $\det A > 0$. Tällöin $c > b^2/a > 0$, joten $x_1+x_2 > 0$ ja $x_1x_2 > 0$. Ensimmäisestä yhtälöstä seuraa, että ainakin toinen luvuista $x_1, x_2$ on positiivinen, kun taas toisesta yhtälöstä seuraa, että luvuilla $x_1, x_2$ on sama merkki. Yhdistämällä näitä johtopäätöksiä, nähdään, että kummankin luvun $x_1, x_2$ on oltava positiivinen.

3. a) Olkoon $L$ äärellisulotteisen $K$-sisätuloavaruuden $V$ operaattori. Osoita, että $(\operatorname{Im} L^*)^\perp = \operatorname{Ker} L$.
   b) Olkoon $L$ normaali. Osoita, että tällöin $\operatorname{Ker} L = \operatorname{Ker} L^*$ ja $\operatorname{Im} L = \operatorname{Im} L^*$.

**Ratkaisu:** a) Olkoon $\mathbf{x} \in V$ kiinnitetty. Tällöin $\mathbf{x} \in \operatorname{Im} L^*$ jos ja vain jos kaikilla $\mathbf{v} \in V$ pätee

$$0 = \langle \mathbf{x}, L^*(\mathbf{v}) \rangle.$$

Toisaalta adjungaatin karakteristesta ominaisuudesta (Lemma 4.29) seuraa, että

$$\langle \mathbf{x}, L^*(\mathbf{v}) \rangle = \langle L(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle,$$

joten $\mathbf{x} \in \operatorname{Im} L^*$ jos ja vain jos kaikilla $\mathbf{v} \in V$ pätee

$$0 = \langle L(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle.$$

Tämä on taas yhtäpitävä sen kanssa, että $L(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_V$. Nimittäin, jos $L(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_V$, niin erityisesti kaikilla $\mathbf{v} \in V$ pätee $0 = \langle L(\mathbf{x}), \mathbf{v}\rangle$. Kääntäen valitsemalla $\mathbf{v} = L(\mathbf{x})$ nähdään, että erityisesti $0 = \langle L(\mathbf{x}), L(\mathbf{x})\rangle$, mistä seuraa, että $L(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_V$.

Näin ollen $\mathbf{x} \in \operatorname{Im} L^*$ jos ja vain jos $L(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_V$ eli jos ja vain jos $\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} L$.

b) Oletetaan, että $L$ on normaali ja olkoon $\mathbf{x} \in V$. Tällöin $\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} L$ jos ja vain jos $|L(\mathbf{v})| = 0$. Toisaalta, koska $L$ on normaali, Lemman 4.45 nojalla pätee

$$|L(\mathbf{v})| = |L^*(\mathbf{v})|,$$

mistä seuraa, että tällöin $|L^*(\mathbf{v})| = 0$, joten $\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} L^*$. Näin ollen $\operatorname{Ker} L \subset \operatorname{Ker} L^*$. Käänteinen sisätyvyys seuraa tästä symmetrian vuoksi, sillä $(L^*)^* = L$, joten jo todistetun nojalla

$$\operatorname{Ker} L^* \subset \operatorname{Ker}(L^*)^* = \operatorname{Ker} L.$$

Näin ollen $\operatorname{Ker} L = \operatorname{Ker} L^*$. a)-kohdan avulla saadaan nyt, että

$$(\operatorname{Im} L^*)^\perp = \operatorname{Ker} L = \operatorname{Ker} L^* = (\operatorname{Im}(L^*)^*)^\perp = (\operatorname{Im} L)^\perp.$$

Koska kaikki esiintyvät aliavaruudet ovat äärellisulotteisia, tästä seuraa, että (Harjoitus 13.2), että

$$\operatorname{Im} L^* = ((\operatorname{Im} L^*)^\perp)^\perp = ((\operatorname{Im} L)^\perp)^\perp = \operatorname{Im} L.$$

4. Olkoon $A \in M(n \times n; \mathbb{R})$ itseadjungoitu matriisi ja olkoon $f\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$. Tässä

$$S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x}| = 1\}$$

on yksikköympyrä $\mathbb{R}^n$:ssä. Osoita, että matriisin $A$ suurin/pienin ominaisarvo on sama kuin funktion $f$ suurin/pienin arvo.

**Ratkaisu:** Käytetään diagonalisoituvuutta. Tarkemmin sanottuna Seurauksen 4.56 nojalla matriisi $A$ on diagonalisoituva jossakin sisätuloavaruuden $\mathbb{R}^n$ ortonormaalissa kannassa $E$ (pistetulon suhteen). Olkoon $E = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Tällöin kaikilla $i = 1, \ldots, n$ on olemassa $a_i \in \mathbb{R}$ siten, että $A\mathbf{e}_i = a_i\mathbf{e}_i$. Lisäksi $\{a_1, \ldots, a_n\}$ on matriisin $A$ kaikkien ominaisarvojen joukko (huom, toistot mahdollisia). Olkoot

$$M = \max\{a_1, \ldots, a_n\},$$

$$m = \min\{a_1, \ldots, a_n\},$$

tällöin on olemassa $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ siten, että $M = a_j$, $m = a_k$. Olkoon $\mathbf{x} \in S^{n-1}$ ja olkoot $x_1, \ldots, x_n$ pisteen $\mathbf{x}$ koordinaatit kannassa $E$, $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i\mathbf{e}_i$. Tällöin, Pythagoran lauseen (Lemma 4.13) nojalla, koska $E$ on ortonormaali, pätee

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 = \sum_{i=1}^n |x_i\mathbf{e}_i|^2 = |\mathbf{x}|^2 = 1.$$

Koska kanta $E$ koostuu ominaisvektoreista, pätee

$$A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i(A\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \mathbf{e}_i.$$

Koska $E$ on ortonormaali, pätee myös

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2.$$

Näin ollen käytännössä on selvitettävä lausekkeen $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$ suurin ja pienin arvot joukossa, jossa muttujat $x_1, \ldots, x_n$ toteuttavat ehdon $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Tässä joukossa pätee

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 \leq M \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = M.$$

Lisäksi kun valitaan $x_i = 0$, $i \neq j$, $x_j = 1$, nähdään, että $f(\mathbf{x}) = a_j = M$. Näin ollen $M$ on funktion $f$ suurin arvo. Vastaavalla tavalla nähdään, että $f$:n pienin arvo on $m$.

5. Olkoon $V$ äärelliseulotteinen $K$-sisätuloavaruus ja $L\colon V \to V$ lineaarinen operaattori. Osoita, että avaruudella $V$ on olemassa sellaiset ortonormaalit kannat $E, F$, että matrisi $[L]_{F,E}$ on diagonaalimatriisi.

**Ratkaisu:** Proposition 4.70 (polaarinen hajotelam) nojalla on olemassa unitaarinen operaattori $U\colon V \to V$ ja itseadjungoitu positiivisesti semidefiniitti operaattori $S\colon V \to V$ siten, että $L = US$ (tässä siis siirrytään proposition muotoilun mastriisitulkinnasta operaattori-tulkintaan). Proposition 4.55 nojalla $S$ on itseadjungoituna matriisina diagonalisoituva ortonormaalissa kannassa, tarkemnmin sanottuna on olemassa avaruuden $V$ ortonormaali kanta $E = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, joka koostuu kuvauksen $S$ ominaisvektoreista, $S(\mathbf{e}_i) = r_i \mathbf{e}_i$ (itse asiassa koska $S$ on jopa positiivisesti semidefiniitti, ominaisarvot $r_i$ ovat jopa ei-negatiivisia reaalilukuja, mutta emme tarvitse tätä tietoa). Nyt kaikilla $i = 1, \ldots, n$ pätee

$$L(\mathbf{e}_i) = U(S(\mathbf{e}_i)) = r_i U(\mathbf{e}_i) = r_i \mathbf{f}_i, \tag{1}$$

missä merkitään $\mathbf{f}_i = U(\mathbf{e}_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Koska $U$ on unitaarinen, se kuvaa avaruuden $V$ ortonormaali kanta $E$ ortonormaaliksi kannaksi $F = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$ (Propositio 4.35). Yhtälöstä 1 seuraa suoraan, että matriisi $[L]_{F,E}$ on diagonaalimatriisi

$$\begin{bmatrix} r_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & r_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & r_n \end{bmatrix}.$$

6. Osoita, että rationaalilukujen ryhmä $(\mathbb{Q}, +)$ ei ole äärellisviritteinen eikä vapaa $\mathbb{Z}$-modulina.

**Ratkaisu:** Osoitetaan ensin. että $Q$ ei ole äärellisviritteinen. Tehdään vasta-oletus, $\mathbb{Q} = \mathrm{Span}(q_1, \ldots, q_n)$, missä $q_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, \ldots, n$. Laventamalla tarvittaessa voidaan olettaa, että luvuilla $q_i$ on sama nimittäjä, $q_i = m_i/m$ joillakin $m_i, m \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, n$. Tästä seuraa, että jokainen lineaarinen kombinaatio muotoa

$$a_1q_1 + \ldots + a_nq_n,$$

missä $a_i$ ovat kokonaislukuja on myös rationaaliluku, jonka nimittäjä on $m$ eli muotoa $l/m$. Erityisesti se kuuluu rationaaliluvun $1/m$ virittämään alimoduliin $\mathrm{Span}(1/m)$. Koska tämä pätee kaikilla $q \in \mathbb{Q}$, täytyy olla, että

$$\mathbb{Q} = \mathrm{Span}(q_1, \ldots, q_n) = \mathrm{Span}(1/m).$$

Erityisesti on olemassa kokonaisluku $a$ siten, että $1/2m = a(1/m)$. Tästä kuitenkin seuraisi, että $2a = 1$, mikä on mahdotonta, sillä $a \in \mathbb{Z}$.

On osoitettu, että $\mathbb{Q}$ ei ole äärellisviritteinen. Osoitetaan vielä, että se ei ole vapaa $\mathbb{Z}$-modulina. Jos se olisi vapaa, sillä olisi kanta $E$ (mahdollisesti ääretön). Osoitetaan, että $E$ sisältää korkeintaan yhden alkion. Oletetaan, että on olemassa $q_1, q_2 \in E$, $q_1 \neq q_2$. Tällöin $q_1 = k_1/l_1$, $q_2 = k_2/l_2$, joten

$$(l_1k_2)q_1 - (k_1l_2)q_2 = 0.$$

Tässä $l_1, l_2 \neq 0$, sillä kumpikin on rationaaliluvun nimittäjä ja $k_1, k_2 \neq 0$, sillä muuten $q_1 = 0$ tai $q_2 = 0$, mikä on mahdotonta, sillä kumpikin on vapaan joukon $E$ alkiop. Näin ollen nollalla on epätriviaali esitys lineaarisena kombinaationa $a_1q_1 + a_2q_2 = 0$, missä $a_1$ ja $a_2$ ovat kokonaislukuja (ja kumpikin ei nolla). Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että $E$ on vapaa. Näin ollen $E$ sisältää korkeintaan yhden alkion. Tällöin $\mathbb{Q} = \mathrm{Span}(E)$ olisi kuitenkin äärellisviritteinen, mikä tiedetään jo olevan epätotta.

7.* Tutki ovat ryhmät $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{72}$ ja $\mathbb{Z}_{18} \oplus \mathbb{Z}_{48}$ isomorfiset keskenään. Esitä kumpikin ryhmä sekä muodossa

$$\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_k}.$$

missä, $m_1|m_2| \ldots |m_{k-1}|m_k$, että syklisten $p_i$-ryhmien suorana summana (missä $p_i$:t alkulukuja).

**Ratkaisu:** Esitetään ensin luvut $12, 72, 18, 48$ alkulukujen tulona,

$$12 = 2^2 \cdot 3, 18 = 2 \cdot 3^2, 48 = 2^4 \cdot 3, 72 = 2^3 \cdot 3^2.$$

Tästä Lemman 5.19 avulla nähdään (koska eri alkuluvut ovat keskenään jaottomat), että

$$\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{72} = (\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3) \oplus (\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_9) = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_9,$$

$$\mathbb{Z}_{18} \oplus \mathbb{Z}_{48} = (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_9) \oplus (\mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_3) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_9.$$

Nämä ovat esitykset syklisten $p$-ryhmien suorana summana (missä $p$ alkuluku). Lisäksi $12 \mid 72$ (kuten alkulukuhajotelmasta nähdään), joten ryhmä $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{72}$ on jo valmiiksi vaaditussa toisessa muodossa.

Ryhmitelemällä termejä saadaan Lemman 5.19 nojalla ryhmälle $\mathbb{Z}_{18} \oplus \mathbb{Z}_{48}$ esitys

$$\mathbb{Z}_{18} \oplus \mathbb{Z}_{48} = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_9 = (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3) \oplus (\mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_9) = \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{144}.$$

Tässä $6 \mid 144$.

Koska ryhmillä $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{72}$ ja $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{144}$ on erillainen esitys muodossa

$$\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_k}.$$

missä, $m_1|m_2|\ldots|m_{k-1}|m_k$, äärellisviritteisten Abelin ryhmien strukuurilauseen yksikäsitteisyydestä seuraa, että ryhmät eivät ole isomorfisia keskenään (vaikka kummassakin sama määrä alkiota, 864).