Äärellisulotteinen lineaarialgebra, kevät 2015.
Harjoitus 13.
Ratkaisuehdotukset.

Kuten yleensäkin sisätuloavaruuksien teoriassa, näissä harjoituksissa K tarkoittaa $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$.

1. Olkoon $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ ortonormaali jono K-sisätuloavaruudessa V. Osoita, että kaikilla $\mathbf{v} \in V$ pätee niin sanottu *Besselin epäyhtälö*

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_i \rangle|^2 \leq |\mathbf{v}|^2 .$$

Ratkaisu: Olkoon $W = \mathrm{Span}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Tällöin W on äärellisulotteinen, joten Lemman 4.22b) nojalla on olemassa (yksikäsitteiset) $\mathbf{w} \in W$, $\mathbf{u} \in W^{\perp}$ siten, että $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u}$. Koska $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}$, Pythagoran Lauseen (Lemma 4.13) nojalla pätee

$$|\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{w}|^2 + |\mathbf{u}|^2 .$$

Erityisesti tästä seuraa, että $|\mathbf{w}|^2 \leq |\mathbf{v}|^2$.

Koska $\mathbf{w} \in W = \mathrm{Span}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, on olemassa (yksikäsitteiset) skalaarit a_i, $i = 1, \ldots, n$ siten, että

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{e}_i .$$

Leman 4.22 todistuksesta itse asiassa seuraa, että jokaisella $i = 1, \ldots, n$ pätee $a_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_i \rangle$. Toisaalta, koska jono $(e_1, \ldots, e_n)$ on ortonormaali, pätee

$$|\mathbf{w}|^2 = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_i \overline{a_i} \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{a_i} = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 .$$

Näin ollen

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 = |\mathbf{w}|^2 \leq |\mathbf{v}|^2$$

ja saadaan haluttu tulos.

2. Olkoon V äärellisulotteinen K-sisätuloavaruus, $W \subset V$ aliavaruus ja $L \in L(V)$ operaattori.
a) Osoita, että $(W^{\perp})^{\perp} = W$.
b) Oletetaan, että W on L-invariantti. Osoita, että $W^{\perp}$ on invariantti operaattorin L^* suhteen.

Ratkaisu: a) Olkoon $\mathbf{w} \in W$. Tällöin jokaisella $\mathbf{v} \in W^{\perp}$ pätee ortgonaalise komplementin määritelmän nojalla

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0_K .$$

Koska $\mathbf{w}$ on näin ollen kohtisuorassa jokaista joukon $W^\perp$ alkiota vastaan, pätee $\mathbf{w} \in (W^\perp)^\perp$. Koska tämä pätee jokaiselle $\mathbf{w} \in W$, saadaan

$$W \subset (W^\perp)^\perp.$$

Lemman 4.22b) nojalla aliavaruudet W ja $W^\perp$ muodostavat suoran summan, jonka arvo on V, joten, Proposition 2.106 nojalla pätee yhtälö.

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V. \tag{1}$$

Soveltamalla tämä tulos aliavaruuteen $W^\perp$ nähdään, että yhtä hyvin pätee

$$\dim W^\perp + \dim(W^\perp)^\perp = \dim V. \tag{2}$$

Vertaamalla yhtälöt (1) ja (2) keskenään, nähdään, että $\dim W = \dim(W^\perp)^\perp$. Koska toisaalta edellä on osoitettu, että W on äärellisulotteisen vektoriavaruuden $(W^\perp)^\perp$ aliavaruus, Propositiosta 2.48 seuraa, että $W = (W^\perp)^\perp$.

Suorempi ratkaisu inkluusiolle $(W^\perp)^\perp \subset W$: olkoon $\mathbf{v} \in (W^\perp)^\perp$. Koska $V = W \oplus W^\perp$, on olemassa $\mathbf{w} \in W$, $\mathbf{w}' \in W^\perp$ siten, että

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}'.$$

Koska $\mathbf{v} \in (W^\perp)^\perp$, erityisesti pätee $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}' \rangle = 0_K$. Toisaalta myös $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}' \rangle = 0_K$. Näin ollen

$$0_K = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}' \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}' \rangle + \langle \mathbf{w}', \mathbf{w}' \rangle = \langle \mathbf{w}', \mathbf{w}' \rangle.$$

Tästä seuraa sisätulon ominaisuuksien nojalla, että $\mathbf{w}' = \mathbf{0}_V$. Näin ollen $\mathbf{v} = \mathbf{w} \in W$ ja ollaan valmiit.

Huomaa, että tässä ratkaisutavassa V ei tarvitse olettaa äärellisulotteiseksi (ainoastaan W).

c) Olkoot $\mathbf{w} \in W^\perp$ ja $\mathbf{v} \in W$. Tällöin adjungaatin määritelmästä seuraa, että

$$\langle \mathbf{v}, L^*(\mathbf{w}) \rangle = \langle L(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = 0_K,$$

sillä oletuksen mukaan $L(\mathbf{v}) \in W$ ja $\mathbf{w} \in W^\perp$. Koska tämä pätee kaikilla $\mathbf{v} \in W$, saadaan, että $L^*(\mathbf{w}) \in W^\perp$. Näin ollen $W^\perp$ on L^*-invariantti.

3. Olkoon L äärellisulotteisen $\mathbb{C}$-sisätuloavaruuden V operaattori. Osoita, että on olemassa avaruuden V ortonormaali kanta E siten, että $[L]_E$ on yläkolmiomatriisi.

Ratkaisu: Koska kunta $\mathbb{C}$ on algebrallisesti suljettu, Proposition 3.22 nojalla sen operaattori L voidaan esittää yläkolmiomuodossa jossakin kannassa $E' = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$. Tämä tarkoittaa sitä, että aliavaruus

$$W_i = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i)$$

on L-invariantti jokaisella $i = 1, \dots, n$. Propositiosta 4.19 (Gram-Schmidtin ortogonaalisaatio) seuraa, että avaruudella V on olemassa ortonormaali kanta $E = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ siten, että kaikilla $i = 1, \dots, n$ pätee

$$W_i = \mathrm{Span}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_i).$$

Koska W_i on L-invariantti jokaisella $i = 1, \dots, n$, tästä seuraa suoraan, että matriisi $[L]_E$ on yläkolmiomatriisi.

4. Olkoon $A \in M(n \times n; K)$ kääntyvä matriisi. Osoita, että on olemassa unitaarinen matriisi $B \in M(n \times n; K)$ ja yläkolmiomatriisi $C \in M(n \times n; K)$, siten, että $A = BC$. (Vihje: Gram-Schmidt. Aloita osoittamalla, että $A = [E \mid E']$ on kannanvaihtomatriisi, missä E on avaruuden K^n standardikanta ja E' on jokin avaruuden K^n kanta).

Ratkaisu: Olkoon $E = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ avaruuden K^n standardikanta ja olkoon $\mathbf{v}_i = L_A(\mathbf{e}_i) \in K^n$ kaikilla $i = 1, \dots, n$. Tällöin vektori $\mathbf{v}_i$ on itse asiassa tasan matriisin A i:nnes sarake $c_i(A)$ (pystyvektorina tulkittuna). Koska matriisi A on kääntyvä, siihen liittyvä kanoninen kuvaus L_A on isomorfismi. Koska isomorfismi kuvaa kannan kannaksi jono $F = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{,n})$ on myös avaruuden K^n eräs kanta. Määritelmistä helposti seuraa, että matriisi A on tällöin itse asiassa kannanvaihtomatriisi $[E \mid E'] = [\mathrm{id}_V]_{E,E'}$.

Gram-Schmidtin Ortogonaalisaatiolauseen (Propositio 4.19) nojalla on olemassa sellainen avaruuden K^n *ortonormaali kanta* (avaruuden K^n tavallisen pistetulon suhteen) $F = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$, jolle

$$W_i = \mathrm{Span}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_i) = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i),$$

kaikilla $i = 1, \dots, n$. Erityisesti tästä seuraa, että $\mathbf{w}_i \in spn(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i)$ kaikilla $i = 1, \dots, n$. Tämä puolestaan tarkoittaa sitä, että kannanvaihtomatriisi $C = [F \mid E']$ on yläkolmiomatriisi.

Koska kannat E (standardikanta) ja F ovat kumpikin ortonormaaleja, kannanvaihtomatriisi $B = [E \mid F]$ on unitaarinen. Nimittäin siihen liittyvä kanoninen kuvaus $L_B \colon K^n \to K^n$ kuvaa ortonormaali kanta E ortonormaaliksi kannaksi F, joten L_B on unitaarinen Proposition 4.35 nojalla. Koska $[L_B]_E = B$ ja kanta E on ortonormaali, B on unitaarinen matriisi.

On näytetty, että $B = [E \mid F]$ on unitaarinen ja $C = [F \mid E']$ on yläkolmiomatriisi. Koska pätee

$$A = [E \mid E'] = [E \mid F][F \mid E'] = BC,$$

väite on todistettu.

5. Osoita, että $U \in M(2 \times 2; \mathbb{C})$ on ryhmän $SU(2)$ alkio jos ja vain jos se on muotoa

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix}$$

missä $a, b \in \mathbb{C}$, $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Ratkaisu: Määritelmän mukaan (2×2)-kokoinen $\mathbb{C}$-kertoiminen matriisi U on ryhmän $SU(2)$ alkio jos ja vain jos $\det U = 1$ ja $U^{-1} = U^*$. Olkoon $U \in M(2 \times 2; \mathbb{C})$,

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

mielivaltainen (2×2)-kokoinen $\mathbb{C}$-kertoiminen matriisi, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Tällöin (Propositio 2.145) matriisi U on kääntyvä jos ja vain jos $\det U = ad - bc \neq 0$, jolloin

$$U^{-1} = \frac{1}{\det U} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Toisaalta suoraan määritelmän nojalla matriisin U adjungaatti on matriisi

$$U^* = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{bmatrix}.$$

Tästä nähdään, että kun $\det U = 1$, yhtälö $U^{-1} = U^*$ pätee jos ja vain jos $d = \overline{a}$ ja $c = -\overline{b}$. Tällöin

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

Tällaisen matriisin determinantti on

$$\det U = a\overline{a} + b\overline{b} = |a|^2 + |b|^2.$$

Edellistä tarkasteluista seuraa, että $\det U = 1$ ja $U^{-1} = U^*$ jos ja vain jos

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix},$$

missä $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

6. Määritellään K-vektoriavaruudessa $M(n \times n; K)$ sisätulo $\langle , \rangle$ kaavalla

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^*).$$

Tässä tr on matriisin jälki, joka määriteltiin harjoitustehtävässä 7.5.
Osoita, että $\langle , \rangle$ todellakin on sisätulo. Mikä on matriisin $A \in M(n \times n; K)$ normi tämän sisätulon suhteen? Osoita, että avaruuden $M(n \times n; K)$ standardikanta $(E_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ on ortonormaali tämän sisätulon suhteen.

Osoita tämän sisätulon ja adjungaattien teorian avulla uudestaan harjoitustehtävän 7.6. väite todeksi tapauksessa $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Ratkaisu: Jälkikuvaus tr hjelposti nähdään olevan lineaarinen, tämä itse asiassa osoitettiin harjoitustehtävän 7.6 ratkaisun yhteydessä. Näin ollen kaikilla $A, A', B \in M(n \times n; K)$ ja $r \in K$ pätee

$$\langle A+A', B\rangle = \mathrm{tr}((A+A')B^*) = \mathrm{tr}(AB^*+A'B^*) = \mathrm{tr}(AB^*)+\mathrm{tr}(A'B^*) = \langle A, B\rangle+\langle A', B\rangle,$$

$$\langle rA, B\rangle = \mathrm{tr}((rA)B^*) = \mathrm{tr}(r(AB^*)) = r\,\mathrm{tr}(AB^*) = r\langle A, B\rangle.$$

Lisäksi jokaiselle kompleksilukukertoimiselle neliömatriisille C selvästi pätee $\mathrm{tr}(C^*) = \overline{\mathrm{tr}\,C}$. Tästä seuraa, että

$$\langle B, A\rangle = \mathrm{tr}(BA^*) = \mathrm{tr}((AB^*)^*) = \overline{\mathrm{tr}(AB^*)} = \overline{\langle A, B\rangle}.$$

Näin ollen kaavalla $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^*)$ määritelty muoto on Hermiittinen. Loput määritelmän ehdot (eli antilineaarisuus toisen muuttujan suhteen) seuraavat jo todistetuista:

$$\langle A, B + B'\rangle = \overline{\langle B + B', A\rangle} = \overline{\langle B, A\rangle + \langle B', A\rangle} = \langle A, B\rangle + \langle A, B'\rangle,$$

$$\langle A, rB\rangle = \overline{\langle rB, A\rangle} = \overline{r\langle B, A\rangle} = \overline{r}\overline{\langle B, A\rangle} = \overline{r}\langle A, B\rangle.$$

Olkoon $A \in M(n \times n; K)$. Tällöin matriisin $AA^* = (b_{ij})$ diagonaalialkion b_{ii} arvo on

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{a_{ij}} = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 .$$

Tästä seuraa, että

$$\langle A, A\rangle = \mathrm{tr}(AA^*) = \sum_{i,j}^{n} |a_{ij}|^2$$

on matriisin A kaikkien alkioiden itseisarvojen neliöiden summa. Erityisesti $\langle A, A\rangle$ on aina ei-negatiivinen reaaliluku, lisäksi se on 0 tasan silloin kuin $A = 0$.

Kuvaus $\langle , \rangle$ on siis todellakin sisätulo K-vektoriavaruudessa $M(n \times n; K)$. Lisäksi edellisestä seuraa, että matriisin $A \in M(n \times n; K)$ normi tämän sisätulon suhteen on

$$|A| = \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sqrt{\sum_{i,j}^{n} |a_{ij}|^2}.$$

Avaruuden $M(n \times n; K)$ standarikannan alkio E_{ij} on lineaarisena kuvauksena $L_{E_{ij}}$ sellainen kuvaus, joka kuvaa avaruuden K^n standardikannan E alkion $\mathbf{e}_j$ vektoriksi $\mathbf{e}_i$ ja muita standardikannan alkioita $\mathbf{e}_k, k \neq j$ se kuvaa nollavektorille. Lisäksi matriisi E_{ij} on reaalilukukertoiminen kaikilla $i, j = 1, \ldots, n$, joten se on itsensä konjugaatti. Edellisestä seuraa, että tulo $E_{ij}\bar{E_{kl}}^* = E_{ij}E_{lk}$ eroaa nollamatriisista jos ja vain jos $j = l$, jolloin pätee $E_{ij}E_{jk} = E_{ik}$. Tällä matriisilla taas on nollasta eroavia alkioita diagonaalilla jos ja vain jos $i = k$. Saadaan siis, että

$$\mathrm{tr}(E_{ij}E_{kl}^*) = \mathrm{tr}(E_{ij}E_{lk}) = 0$$

kun $(i,j) \neq (k,l)$ ja

$$\operatorname{tr}(E_{ij}E_{ij}^*) = \operatorname{tr}(E_{ij}E_{ji}) = \operatorname{tr}(E_{ii}) = 1.$$

Näin ollen standardikanta (E_{ij}) on ortonormaali sisätulon $\langle , \rangle$ mielessä.

Harjotustehtävässä 7.6. todistettiin, että jokainen lineaarinen muoto $L\colon M(n \times n; K) \to K$ on muotoa $L(X) = \operatorname{tr}(AX)$ jollakin yksikäsitteisellä matriisilla A, mielivaltaiselle kunnalle K.

Todistetaan tämä väite uudestaan tapauksissa $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ käyttämällä hyväksi tässä tehtävässä määriteltyä sisätuloa vektoriavaruudessa $M(n \times n; K)$. Seurauksen 4.27 nojalla jokainen lineaarinen muoto $L\colon V \to K$, missä V on äärellisulotteinen sisätuloavaruus, voidaan esittää sisätulon avulla muodossa $L_{\mathbf{w}}$, missä $L_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$, vieläkin yksikäsitteisellä $\mathbf{w} \in V$. Kun tämä tulos sovelletaan tämän tehtävän sisätuloavaruuteen, saadaan, että jokainen lineaarinen kuvaus $L\colon M(n \times n; K) \to K$ on muotoa

$$L(X) = \langle X, A \rangle = \operatorname{tr}(XA^*)$$

jollakin yksikäsitteisellä matriisilla A. Harjoituksen 7.5 nojalla pätee $\operatorname{tr}(XA^*) = \operatorname{tr}(A^*X)$. Koska vastaavuus $A \mapsto \overline{A}$ on bijektiivinen, tästä seuraa, että on olemassa yksikäsitteinen matriisi A siten, että kaikilla $X \in M(n \times n; K)$ pätee

$$L(X) = \operatorname{tr}(AX).$$

7.* Palautetaan mieleen harjoitustehtävässä 10.8 tarkasteltua *kvaternioiden* $\mathbb{R}$-algebraa $\mathbb{H}$. Tämä on matriisiagebran $M(2 \times 2; \mathbb{C})$ alialgebra, joka koostuu muotoa

$$\begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} \tag{3}$$

olevista matriiseista, $z, w \in \mathbb{C}$. Harjoituksen 10.8 ratkaisun yhteydessä todettiin, että $\mathbb{H}$ voidaan yhtä hyvin ajatella $\mathbb{R}$-algebrana $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$, kun samastetaan matriisi (3) parin $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ kanssa. Tässä tulkinnassa kvaternioiden kertolasku on määritely kaavalla

$$(z, w) \cdot (z', w') = (zz' - w\overline{w'}, zw' + w\overline{z'}).$$

Kun $z, w \in \mathbb{C}^2$ tulkitaan pareina $z = (x, y), w = (u, v) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, voidaan $\mathbb{H}$:n alkio ajatella myös $\mathbb{R}^4$:n alkiona (x, y, u, v). Lisäksi (harj. 10.8) $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \setminus \{0\}$ on ryhmä kertolaskun suhteen.

a) Totea (harjoituksen 13.5 avulla), että ryhmä $SU(2)$ voidaan tulkita ryhmän $\mathbb{H}^*$ aliryhmänä luonnollisella tavalla. Tulkinnassa $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ pätee tällöin

$$SU(2) = S^3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid |\mathbf{x}| = 1\}.$$

b) Jokaisella $q \in S^3 = SU(2)$ tarkastellaan kuvausta $L_q\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $L_q(r) = qrq^{-1}$. Osoita, että tämä kuvaus on $\mathbb{R}$-lineaarinen ja avaruuden $\mathbb{R}^4$ kolmiulotteinen aliavaruus $V = \operatorname{Span}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ on L_q-invariantti.

c) Avaruus $V \leq \mathbb{R}^4$ on sisätuloavaruus, kun se varustetaan tavallisella pistetulolla. Osoita, että $L_q|V$ on avaruuden V ortogonaalinen operaattori jokaisella $q \in S^3$.
d) Edellisen kohdan nojalla saadaan kuvaus $q \mapsto [L_q]_E$ ryhmien $SU(2)$ ja $O(3)$ välillä. Tässä $E = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$. Osoita, että tämä kuvaus on ryhmähomomorfismi. Laske sen ydin.

Ratkaisu: a) Harjotuksessa 5 yllä on näytetty, että ryhmä $SU(2)$ koostuu täsmälleen matriiseista muotoa

$$U = \begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix}$$

missä $z, w \in \mathbb{C}$ ja $\det U = |z|^2 + |w|^2 = 1$. Tästä nähdään, että $SU(2)$ on joukkona kvaternioiden joukon $\mathbb{H}$ osajoukko. Koska $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \setminus \{0\}$ on ryhmä, jonka kertolaskuna käytetään matriisien kertolasku ja koska $SU(2)$ on myös ryhmä, se on ryhmän $\mathbb{H}^*$ aliryhmä. Kun kvaternioni

$$\begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix}$$

samastetaan avaruuden $\mathbb{R}^4$ alkion (a, b, c, d) kanssa, missä $a + ib = z$, $c + id = w$, nähdään, että

$$SU(2) = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\} = S^3$$

on avaruuden $\mathbb{R}^4$ yksikköympyrä (jonka muodostavat ne avaruuden $\mathbb{R}^4$ pisteet, joiden etäisyys origoon on yksi).
b)/c) Osoitetaan ensin, että tulkinnassa $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ kvartenionien kertolasku ”on yhteensopiva” tavallisen avaruuden $\mathbb{R}^4$ normin kanssa, toisin sanoen näytetään, että kaikilla $q, q' \in \mathbb{H}$ pätee

$$|qq'| = |q||q'|.$$

Käytetään kvartenionien matriisitulkinta. Olkoon

$$q = \begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

tällöin $|q|^2 = |z|^2 + |w|^2 = \det q$. Koska matriiseille pätee $\det(AB) = \det A \det B$, saadaan

$$|qq'|^2 = \det(qq') = \det q \det(q') = |q|^2|q'|^2,$$

mistä seuraa, että $|qq'| = |q||q'|$.

Seuraavaksi osoitetaan, että $L_q \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $L_q(r) = qrq^{-1}$, on ortogonaalinen lineaarinen kuvaus kaikilla $q \in \mathbb{H}^*$, kun $\mathbb{R}^4$ ajatellaan olevan varustettu tavallisella pistetulollaan. Koska kvaterinoinien kertolasku on $\mathbb{R}$-bilineaarinen operaatio ($\mathbb{H}$ on $\mathbb{R}$-algebra!), kaikilla $r, r' \in \mathbb{H}$ ja kaikilla $a \in \mathbb{R}$ pätee

$$L_q(r + r') = q(r + r')q^{-1} = qrq^{-1} + qr'q^{-1} = L_q(r) + L_q(r'),$$

$$L_q(ar) = q(ar)q^{-1} = a(qrq^{-1}) = aL_q(r).$$

Lisäksi kaikilla $r \in Q$ pätee

$$|L_q(r)| = |q||r||q^{-1}| = |q||r||q|^{-1} = |r|.$$

Huomaa, että pätee $|q^{-1}| = |q|^{-1}$, sillä

$$|q^{-1}||q| = |q^{-1}q| = |1| = \det(I_4) = 1.$$

Tässä algebran $\mathbb{H}$ ykkösalkio 1 on yksikkömatriisi I_4. Tulkinnassa $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ tämä on standardikannan ensimmäinen alkio $(1, 0, 0, 0) = \mathbf{e}_1$. Näin ollen L_q on lineaarinen operaattori, joka säilyttää normit. Proposition 4.35 nojalla $L_q \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ on ortogonaalinen.

Olkoon $W = \text{Span}\{\mathbf{e}_1\}$. Tällöin jokaisella $\mathbf{v} \in W$, $\mathbf{v} = r\mathbf{e}_1$, $r \in \mathbb{R}$ ja jokaisella $q \in \mathbb{H}^*$ pätee

$$L_q(\mathbf{v}) = q(r\mathbf{e}_1)q^{-1} = r(q\mathbf{e_1}q^{-1}) = r\mathbf{e}_1 = \mathbf{v},$$

koska kvaternionien kertolasku on $\mathbb{R}$-bilineaarinen ja $\mathbf{e}_1$ on sen neutraalkio.

Edellisestä erityisesti seuraa, että aliavaruus W on L_q-invariantti jokaisella $q \in \mathbb{H}^*$. Kuvaus L_q on ortogonaalisena kuvauksena myös normaali. Tästä ja Lemmasta 4.48 seuraa, että L_q-invariantin aliavaruuden W ortogonaalinen komplementti $W^\perp = V$ on myös L_q-invariantti, jokaisella $q \in \mathbb{H}^*$.

Erityisesti $L_q = L_q|V \colon V \to V$ on hyvin määritelty operaattori kolmeulotteisessa avaruudessa $V = \text{Span}(e_2, e_3, e_4)$. Lisäksi, kun V varustetaan tavallisella pistetulolla, tämä operaattori on sisätuloavaruuden V ortonormaali operaattori, sillä se säilyttää normit (ja sisätulot). Tämä pätee jokaisella $q \in \mathbb{H}^*$, erityisesti millä tahansa $q \in S^3$. Kohtien b)-ja c)- väitteet ovat todistettu.

d) Koska ortogonaalisen kuvauksen matriisi ortogonaalisessa kannassa on ortogonaalinen, matriisi $[L_q]_E$ on (3×3)-kokoinen ortogonaalinen matriisi kaikilla $q \in S^3$. Tässä $E = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ (joka on V:n ortonormaali kanta pistetulon suhteen).

Osoitetaan, että kuvaus $\phi \colon SU(2) \to O(3)$, $\phi(q) = [L_q]_\mathbf{e}$ on ryhmähomomorfismi. Pitää osoittaa, että kaikilla $q, q' \in SU(3)$ pätee yhtälö

$$\phi(qq') = \phi(q)\phi(q').$$

Koska $\phi(qq') = [L_{qq'}]_E$ ja vastaavuus operaattoreiden ja matriisien välillä on bijektiivinen, riittää osoittaa, että $L_{qq'} = L_q \circ L_{q'}$. Olkoon $r \in \mathbb{H}$. Tällöin

$$L_{qq'}(r) = q(q'rq'^{-1})q^{-1} = qL_{q'}(r)q^{-1} = L_q(L_{q'}(r)) = (L_q \circ L_{q'})(r).$$

Erityisesti tämä pätee kun $r \in V$. Näin ollen $L_{qq'} = L_q \circ L_{q'}$, joten ϕ on ryhmähomomorfismi.

Lasketaan vielä homomorfismin ϕ ydin. Olkoon $q \in SU(3)$ sellainen, että $L_q = \text{id}_V$. Tämä tarkoittaa sitä, että jokaisella $r \in V$ pätee $qrq^{-1} = r$ eli toisin sanoen pätee $qr = rq$. Esitetään $q = (z, w)$ muodossa $q = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3 + d\mathbf{e}_4$, missä

$z = (a,b), w = (c,d)$. Palautetaan ensin mieleen, miten kvaternioinien kertolasku on määritelty. Harjoituksessa 10.8 käytettiin kvaternioiden algebralle kantaa $(I_2, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, jonka alkiot olivat määriteltyjä tämän harjoituksen tehtävänannon yhteydessä. Harj. 10.9 ratkaisussa todettiin, että nämä melkein vastaavat standardikannan alkioita, paitsi, että $\mathbf{j} = -\mathbf{e}_3$. Muiden kohdalla vastaavuus on täydellinen - $I_2 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{i} = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{k} = \mathbf{e}_4$. Harj. 10.9 ratkaisun yhteydessä selvitettiin, että näiden kvaternioiden *kertotaulu on*

	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	I_2	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	I_2	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	I_2

Laskutoimituksen järjestys määräytyy seuraavasti - riviä vastaava alkio vastaa tulon xy ensimmäistä jäsentä x, saraketta vastaava alkio vastaa y:tä. Esimerkiksi yllä $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$ (luetaan toisesta rivistä ja kolmannesta sarakkeesta), kun taas $\mathbf{ji} = -\mathbf{k}$ (luetaan kolmannesta rivistä ja toisesta sarakkeesta).

Tämän avulla voidaan laatia kertotaulu standardikannan alkioille $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$:

	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_4$
$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$

Lisäksi $\mathbf{e}_1$ on neutraalialkio.

Palautetaan kuvauksen ϕ ytimen selvittämiseen. Olkoon $q = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3 + d\mathbf{e}_4$ ja oletetaan, että $qr = rq$ kaikilla $r \in V$. Valitsemalla $r = \mathbf{e}_2$ saadaan

$$a\mathbf{e}_2 - b\mathbf{e}_1 - c\mathbf{e}_4 - d\mathbf{e}_3 = qr = rq = a\mathbf{e}_2 - b\mathbf{e}_1 + c\mathbf{e}_4 + d\mathbf{e}_3.$$

Tästä nähdään, että $-c = c$, $-d = d$ eli $c = 0 = d$. Valitsemalla $r = \mathbf{e}_3$ nähdään samalla tavalla, että myös $b = 0$. Näin ollen $q = a\mathbf{e}_1$. Koska toisaalta $q \in SU(2)$, sen normi $|q| = |a| = 1$. Koska a on reaaliluku tämä on mahdollista jos ja vain jos $q = (\pm 1)\mathbf{e}_1$. Näin ollen

$$\operatorname{Ker}\phi = \{\pm\mathbf{e}_1\} \cong \mathbb{Z}_2.$$

Huomautus: Voidaan osoittaa, että homomorfismin $\phi\colon SU(2) \to O(3)$ kuva on aliryhmä $SO(3)$. Ryhmien isomorfialauseesta saadaan tällöin, että kolmeulotteisen avaruuden kiertojen ryhmä $SO(3)$ on isomorfinen tekijäryhmän $SU(2)/\mathbb{Z}_2$ kanssa, missä $\mathbb{Z}_2 = \{\pm\mathbf{e}_1\}$ kuten yllä (tässä yhtäsuuruus "isomorfiaa vaille".