Äärellisulotteinen lineaarialgebra, kevät 2015.
Harjoitus 12.
Ratkaisuehdotuksia.

Ellei muuta mainita, L on äärellisulotteisen K-vektoriavaruuden V operaattori, missä K on mielivaltainen kunta.

1. Osoita, että L on diagonalisoituva jos ja vain jos sen minimipolynomi $\mathbf{m}_L$ voidaan esittää *eri* ensimmäisen asteen pääpolynomien tulona eli muodossa

$$\mathbf{m}_L = \prod_{i=1}^{m} (\mathbf{X} - k_i),$$

missä k_i ovat kunnan *eri* alkiot.

Ratkaisu: Oletetaan, että L on diagonalisoituva. Olkoot $k_1, \ldots, k_m$ kaikki operaattorin L eri ominaisarvot. Tällöin

$$V = \oplus_{i=1}^{m} V_{k_i},$$

missä

$$V_{k_i} = \{\mathbf{v} \in V \mid L(\mathbf{v}) = k_i \mathbf{v}\} = \mathrm{Ker}(L - k_i \, \mathrm{id}_V).$$

Olkoon $\mathbf{p} = \prod_{i=1}^{m} (\mathbf{X} - k_i)$, osoitetaan, että $p(L) = 0$. Olkoon $\mathbf{v} \in V = \oplus_{i=1}^{m} V_{k_i}$, tällöin jokaisella $i = 1, \ldots, n$ on olemassa (yksikäsitteinen) $\mathbf{v}_i \in V_{k_i}$ siten, että

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \ldots + \mathbf{v}_m.$$

Tällöin

$$p(L)(\mathbf{v}) = p(L)(\mathbf{v}_1) + p(L)(\mathbf{v}_2) + \ldots + p(L)(\mathbf{v}_m),$$

joten riittää osoittaa, että $p(L)(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}_V$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Koska polynomien kertolasku on vaihdannainen, $\mathbf{p} = \mathbf{q}(\mathbf{X} - k_i)$, missä $\mathbf{q} = \prod_{j \neq i} (\mathbf{X} - k_j)$. Näin ollen

$$p(L)(\mathbf{v}_i) = q(L)(L - k_i \, \mathrm{id}_V)(\mathbf{v}_i) = q(L)(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_V.$$

On osoitettu, että $p(L)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_V$ kaikilla $\mathbf{v} \in V$, joten $p(L) = 0$, missä $\mathbf{p} = \prod_{i=1}^{m} (\mathbf{X} - k_i)$. Tästä seuraa, että operaattorin L minimipolynomin täytyy olla polynomin $\mathbf{p}$ tekijä. Koska jälkimmäisellä ei ole monikertaisia juuria, ei myöskään minimipolynomilla $\mathbf{m}_L$ voi olla niitä. Tämä periaatteessa riittää jo. Toisaalta Seurauksen 3.87 nojalla jokainen ensimmäisen asteen tekijä $(\mathbf{X} - k_i)$, missä k_i on operaattorin L ominaisarvo, on minimipolynomin $\mathbf{m}_L$ tekijä, joten itse asiassa voidaan myös päätellä, että täytyy olla $\mathbf{m}_L = \mathbf{p}$.

Kääntäen, oletetaan, että

$$\mathbf{m}_L = \prod_{i=1}^{m} (\mathbf{X} - k_i),$$

missä k_i ovat eri alkioita ja osoitetaan, että L on diagonalisoituva. Koska ensimmäisen asteen eri tekijät $(\mathbf{X}-k_i)$, $i=1,\dots,n$ ovat keskenään pareittain jaottomia, iteroimalla induktiolla Lemman 3.89 väite saadaan suora summa-hajotelma

$$V_{\mathbf{m}_L} = \oplus_{i=1}^m V_{(\mathbf{X}-k_i)}.$$

Tässä

$$V_{\mathbf{m}_L} = \operatorname{Ker} m_L(L) = V$$

minimipolynomin määritelmän nojalla ja

$$V_{\mathbf{X}-k_i} = \operatorname{Ker}(L - k_i \operatorname{id}_V) = V_{k_i}$$

on ominaisarvoa k_i vastaava ominaisvektorialiavaruus. Näin ollen V on suora summa ominaisarvoaliavaruuksista, joten L on diagonalisoituva.

2. Operaattorin $L \in L(\mathbb{R}^3)$ matriisi standardikannan suhteen on

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}.$$

Esitä operaattori Jordanin normaalissa muodossa. Anna myös esimerkki kannasta E, jonka suhteen matriisi $[L]_E$ on Jordanin normaalissa muodossa.

Ratkaisu: Aloitetaan laskemalla karakteristinen polynomi. Tämä on suora lasku (tässä kehitetään determinantti ensimmäisen rivin mukaan):

$$\chi_L = \det \begin{bmatrix} \mathbf{X}-4 & 5 & -2 \\ -5 & \mathbf{X}-7 & -3 \\ -6 & 9 & \mathbf{X}-4 \end{bmatrix} =$$

$$(\mathbf{X}-4)\det\begin{bmatrix} \mathbf{X}+7 & -3 \\ 9 & \mathbf{X}-4 \end{bmatrix} - 5\det\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -6 & \mathbf{X}-4 \end{bmatrix} - 2\det\begin{bmatrix} -5 & \mathbf{X}+7 \\ -6 & 9 \end{bmatrix} =$$

$$(\mathbf{X}-4)((\mathbf{X}+7)(\mathbf{X}-4)-(-3)\cdot 9) - 5(-5(\mathbf{X}-4)-(-3)\cdot(-6)) - 2((-5)\cdot 9-(-6)\cdot(\mathbf{X}+7)) = \ldots =$$

$$\mathbf{X}^3 - \mathbf{X}^2 = \mathbf{X}^2(\mathbf{X}-1).$$

Tämän tiedon avulla voidaan periaatteessa helposti selvittää operaattorin minimipolynomi $\mathbf{m}_L$, jonka avulla on puolestaan mahdollista päätellä minkälainen on operaattorin Jordanin normaalissa muodossa oleva esitys. Nimittäin, koska minimipolynomi on karakteristisen polynomin $\chi_L = \mathbf{X}^2(\mathbf{X}-1)$ tekijä, jolla on lisäksi täsmälleen samat juuret kuin viimeksimainitulla (Seuraus 3.87), minimipolynomi $\mathbf{m}_L$ on joko karakteristinen polynomi $\mathbf{X}^2(\mathbf{X}-1)$ tai polynomi $\mathbf{X}(\mathbf{X}-1)$. Suoralla laskulla, nähdään, että operaattorin L matriisille

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$$

ei päde yhtälö $A(A - I_3) = 0$, joten polynomi $\mathbf{X}(\mathbf{X} - 1)$ ei ole minimipolynomi. Näin ollen minimipolynomin täytyy olla sama kuin karakteristinen, eli polynomi $\mathbf{X}^2(\mathbf{X}-1)$. Tästä seuraa, että Jordanin normaalissa muodossa olevalla operaattorin esityksellä on oltava ainakin yksi (1×1)-kokoinen 1-solu sekä ainakin yksi (2×2)-kokoinen 0-solu (kts. Luku 3, sivu 85, ”minimipolynomi Jordanin normaalin muodon avulla”). Mutta koko matriisin on oltava (3×3)-kokoinen, joten siihen ei mahdu enempää soluja. Toisin sanoen operaattorin esitys Jordanin normaalissa muodossa on oltava (solujen permutaatiota vaille) matriisi

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Tämä tarkastelu ei kuitenkaan paljasta mitään mahdollisesta *kannasta*, jonka suhteen operaattorilla L on matriisi (1). Koska pyydettiin myös antamaan esimerkin sellaisesta, täytyy tarkastella asiaa erikseen.

Esitetään eräs tapa etsiä avaruudelle $\mathbb{R}^3$ sellainen kanta E, jonka suhteen $[L]_E$ on Jordanin normaalissa muodossa, vieläpä sellainen tapa, jossa *ei käytetä* minimipolynomia ja itse Jordanin normaalissa muodossa oleva esitys keksitään uudestaan. Lähdetään siis liikkelle siitä tiedosta, että operaattorin L karakteristinen polynomi on polynomi $\mathbf{X}^2(\mathbf{X} - 1)$. Olkoon $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ kanta, jonka suhteen matriisi $[L]_E$ on Jordanin normaalissa muodossa. Tällöin, analysoimalla tekijöiden $\mathbf{X}$ ja $(\mathbf{X} - 1)$ potensseja kuten yllä, nähdään, että (järjestämällä kannan E alkioita sopivasti) matriisi $[L]_E$ on joko matriisi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ tai matriisi } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Huomataan, että kummassakin tapauksessa $\mathbf{e}_1$ on ominaisarvoon 0 liittyvä ominaisvektori, kun taas $\mathbf{e}_3$ on välttämättä ominaisarvoon 1 liittyvä ominaisvektori. Vektori $\mathbf{e}_2$ on puolestaan ominaisarvoon 0 liittyvä ominaisvektori ainoastaan ensimmäisen matriisin kohdalla. Jos tämä matriisi on oikea, operaattori L on diagonalisoituva, jolloin $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ muodostaa kannan aliavaruudelle $\operatorname{Ker} L$ (joka on ominaisarvoon 0 liittyvä aliavaruus). Erityisesti $\operatorname{Ker} L$ on tällöin kaksiulotteinen. Jos taas oikea matriisi on jälkimmäinen, $\operatorname{Ker} L$ on ainoastaan 1-ulotteinen ja $(\mathbf{e}_1)$ muodostaa sen kannan. Lisäksi tällöin vektorille $\mathbf{e}_2$ pätee $L(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1$. Näin ollen vektorit $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ selviävät kun ensin selvitetään aliavaruuden $\operatorname{Ker} L$ kanta (sekä dimensio) ja tarvittaessa vielä ratkaistaan tämän jälkeen yhtälö $L(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_1$.

Aliavaruus $\operatorname{Ker} L$ koostuu tasan lineaarisen yhtälön $L(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ ratkaisuista. Tämä yhtälö on puolestaan ekvivalentti *lineaarisen yhtälöryhmän*

$$\begin{cases} 4x - 5y + 2z = 0, \\ 5x - 7y + 3z = 0, \\ 6x - 9y + 4z = 0 \end{cases}$$

kanssa. Ratkaisemalla tämä yhtälöryhmä esimerkiksi Jordan-Gaussilla nähdään, että sen ratkaisu on muotoa $(t/3, 2t/3, t)$, missä $t \in \mathbb{R}$ on vapaa parametri. Tästä nähdään, että $\operatorname{Ker} L$ on 1-ulotteinen ja eräs sen kanta on $(\mathbf{e}_1)$, missä $\mathbf{e}_1 = (1, 2, 3)$ (vastaa parametrin t arvoa $t = 3$). Näin ollen operaattori L ei voi olla diagonalisoituva (ominaisarvon 0 geometrinen kertaluku 1 pienempi kuin sen algebrallinen kertaluku 2), joten sen Jordanin normaalissa muodossa oleva esitys on

$$[L]_E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Huomaa, että saadaan sama tulos, joka johdettiin aikaisemmin tarkastelemalla minimipolynomia. Vektoriksi $\mathbf{e}_2$ kelpaa mikä tahansa lineaarisen yhtälön $L(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_1$ ratkaisu. Huomaa, että tällä yhtälöllä ei voi olla ratkaisuja joukossa $\operatorname{Ker} L$, joten ratkaisu $\mathbf{e}_2$ varmasti muodostaa vapaan jonon vektorin $\mathbf{e}_1$ kanssa. Yhtälö $L(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_1$ on yhtäpitävä lineaarisen yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 4x - 5y + 2z = 1, \\ 5x - 7y + 3z = 2, \\ 6x - 9y + 4z = 3 \end{cases}$$

kanssa. Tämän ratkaisut ovat muotoa $((t-3)/3, (2t-3)/3, t)$. Valitsemalla $t = 3$ saadaan ratkaisu $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 3)$, käytetään sitä (mikä tahansa toinenkin kelpaisi, tietysti).

Jäljellä on vektorin $\mathbf{e}_3$ selvittäminen. Tämä on ominaisarvoon 1 liittyvä ominaisvektori eli yhtälön $L(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ ratkaisu. Tämäkin palautuu helposti lineaarisen yhtälöryhmään, jonka ratkaisut ovat muotoa (t, t, t), $t \in \mathbb{R}$. Näin ollen vektoriksi $\mathbf{e}_3$ kelpaa esimerkiksi vektori $(1, 1, 1)$.

Tärkeä huomautus: Tällaiset tehtävät sisältävät välttämättä paljon työläitä laskuja, eli lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisemista ja determinanttien laskemista. Tässä vaiheessa on täysin ok (suorastaan suositeltava) laskea tällaisia käyttämällä apuvälineitä eli laskinta, tietokonetta, wolfram alpha jne.

3. Olkoon $A \in M(n \times n; K)$, missä kunta K on algebrallisesti suljettu. Osoittaa, että A ja sen transpoosi A^T ovat similaarisia.

Ratkaisu: Neliömatriisit A ja B ovat similaarisia jos ja vain jos ne esittävät saman operaattorin L (mahdollisesti) eri kannoissa. Virallinen määritelmä on esitetty Luvussa 2 sivulla 61 - samankokoiset neliömatriisit A ja B ovat similaarisia jos on olemassa kääntyvä matriisi X siten, että $A = XBX^{-1}$.

Koska kunta K on algebrallisesti suljettu, jokainen neliömatriisi A on similaarinen Jordanin normaalissa muodossa olevan matriisin kanssa. Tällainen matriisi on muotoa

$$A' = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_l \end{bmatrix},$$

missä

$$A_i = N(k_i, m_i) = \begin{bmatrix} k_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_i \end{bmatrix}$$

on $(m_i \times m_i)$-kokoinen Jordanin k_i-solu jollakin $k_i \in K$, $i = 1, \dots, l$ (Seuraus 3.108). Täsmällisesti sanottuna ajatellaan matriisi A operaattorina $L_A \colon K^n \to K^n$. Tällöin $A = [L_A]_E$, missä E on avaruuden K^n *standardikanta*. Seurauksen 3.108 nojalla avaruudella K^n on olemassa kanta F, jonka suhteen matriisi $[L_A]_F$ on Jordanin normaalissa muodossa oleva matriisi A'. Kannanvaihtokaavan 2.88 nojalla pätee

$$A = XA'X^{-1},$$

missä $X = [E \mid F]$ on kannanvaihtomatriisi. Ottamalla tästä yhtälöstä transpoosit, saadaan (kaavan 2.112 avulla) yhtälö

$$A^T = (X^{-1})^T (A')^T X^T = (X^T)^{-1} (A')^T X^T.$$

Näin ollen A on similaarinen matriisin A' kanssa ja A^T on similaarinen matriisin $(A')^T$ kanssa. Tästä seuraa, että riittää osoittaa, että matriisit A' ja $(A')^T$ ovat similaarisia.

Koska jokainen Jordanin solu sijiatsee symmetrisesti diagonaalin suhteen, helposti nähdään, että matriisin A' transpoosi $(A')^T$ on matriisi

$$(A')^T = \begin{bmatrix} A_1^T & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2^T & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_l^T \end{bmatrix}.$$

Tämä on lohkomatriisi, joka ei ole Jordanin normaalissa muodossa. Se koostuu matriiseista muotoa

$$A_i^T = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & k & & \dots & 0 \\ 0 & 1 & k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k \end{bmatrix}.$$

Tällainen matriisi ei ole yleisesti ottaen Jordanin solu, koska siinä ykköset eivät sijaitse diagonaalin yläpuolella, vaan sen alapuolella. Jälleen kerran helposti nähdään, että riittää näyttää, että A_i ja A_i^T ovat similaarisia kaikilla $i = 1, \dots, n$. Toisin sanoen väite riittää osoitaa vain Jordanin soluille.

Olkoon siis

$$A = N(k,m) = \begin{bmatrix} k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k \end{bmatrix}$$

Jordanin solu. Tällön sen transpoosi on matriisi

$$A^T = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & k & & \dots & 0 \\ 0 & 1 & k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k \end{bmatrix}.$$

Kun tätä matriisia ajatellaan erään lineaarisen operaattorin matriisina $A = [L]_E$ jonkun kannan $E = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ suhteen, niin tälle kannalle pätee

$$L(\mathbf{e}_i) = k\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i+1}, \text{ kun } i = 1, \dots, n-1$$

ja $L(\mathbf{e}_n) = k\mathbf{e}_n$. Järjestetään tämän kannan alkiot uudestaan "käänteisellä järjestyksellä", toisin sanoen tarkastellaan kantaa $E' = (\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$, missä $\mathbf{e}'_j = \mathbf{e}_{n-j+1}$. Toisin sanoen kanta E' on kanta $(\mathbf{e}_n, \dots, \mathbf{e}_1)$. On selvä, että tällä tavalla määriteltynä E' on kanta. Lisäksi se on määritelty sillä tavalla, että

$$L(\mathbf{e}'_i) = k\mathbf{e}'_i + \mathbf{e}_{i-1}, \text{ kun } i = 2, \dots, n$$

ja $L(\mathbf{e}'_1) = k\mathbf{e}_1$. Tämä tarkoittaa sitä, että kuvauksen L matriisi kannassa E' on Jordanin solu

$$\begin{bmatrix} k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k \end{bmatrix}$$

eli matriisi A! Näin ollen kannassa E' transpoosi A^T muuttuu matriisiksi A. Toisin sanoen A ja A^T ovat similaarisia.

4. Operaattorin $L \in L(\mathbb{R}^4)$ matriisi standardikannan suhteen on

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Esitä operaattori Jordanin normaalissa muodossa.

Ratkaisu: Kumpikin matriisi on yläkolmiomatriisi, joten sen diagonaalialkiot ovat vastaavan operaattorin ominaisarvot ja kummankin operaattorin karakteristinen polynomi on $(\mathbf{X}-1)^2(\mathbf{X}-2)^2$. Näin ollen myös Jordanin normaalissa muodossa

diagonaalilla esiintyy tasan kaksi kertaa alkio 1 ja tasan kaksi kertaa alkio 2. Näin ollen vaihtoehdot ovat:
(i) Kaksi (1×1) 1-solua sekä kaksi (1×1) 2-solua.
(ii) Kaksi (1×1) 1-solua sekä yksi (2×2) 2-solu.
(iii) Yksi (2×2) 1-solu sekä kaksi (1×1) 2-solua.
(iv) Yksi (2×2) 1-solu sekä yksi (2×2) 2-solu.
Näitä vastaavat matriisit ovat:

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, (ii) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$(iii) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, (iv) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Nämä kaikki ovat erotettavissa minimipolynomillaan. Nimittäin näiden matriisien minimipolynomit ovat:
(i) $(\mathbf{X} - 1)(\mathbf{X} - 2)$,
(ii) $(\mathbf{X} - 1)(\mathbf{X} - 2)^2$,
(iii) $(\mathbf{X} - 1)^2(\mathbf{X} - 2)$,
(iv) $(\mathbf{X} - 1)^2(\mathbf{X} - 2)^2$.

Näin ollen riittää vain tarkistaa mikä näistä neljästä polynomista kelpaa operaattorin minimipolynomiksi. Suoralla laskulla nähdään, että a)-kohdan matriisille

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ei päde $(A - I)(A - 2I) = 0$, $(A - I)^2(A - 2I) = 0$ eikä $(A - I)(A - 2I)^2 = 0$ (edelleenkin käytännössä tällaisia laskuja kannattaa käydä läpi tietokoneella tai laskimella!). Näin ollen kyseisen operaattorin minimipolynomin täytyy olla $(\mathbf{X} - 1)^2(\mathbf{X} - 2)^2$, joten tämän operaattorin esitys Jordanin normaalissa muodossa on matriisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vastaavalla tavalla nähdään, että b)-kohdan matriisin minimipolynomi on $(X - 1)^2(X - 2)$, mistä seuraa, että vastaavan operaattorin esitys Jordanin normaalissa muodossa on matriisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Toinen tapa olisi laskea ominaisarvoaliavruuksien V_1 ja V_2 dimensiot, kuten edellisessä tehtävässä. Tällöin Jordanin normaali muoto pääteltävissä seuraavien vastaavuuksien kautta:
Matriisin (i) kohdalla pätee $\dim V_1 = \dim V_2 = 2$.
Matriisin (ii) kohdalla pätee $\dim V_1 = 2$, $\dim V_2 = 1$.
Matriisin (iii) kohdalla pätee $\dim V_1 = 1$, $\dim V_2 = 2$.
Matriisin (iv) kohdalla pätee $\dim V_1 = 1$, $\dim V_2 = 1$.

Tarkka perustelu sille, miksi näin, jätetään lukijalle pohdittavaksi. Koska tässä tehtävässä ei pyydetty erikseen keksimään konkrettinen kanta, jossa operaattori on esitettävissä Jordanin normaalissa muodossa, minimipolynomeihin perustuva ratkaisu lienee yksinkertaisempi (ja helpompi ymmärtää) tässä tapauksessa.

5. Sama kuin edellinen tehtävä, paitsi, että operaattorin matriisi on

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ratkaisu: Kummankin matriisin kohdalla karakteristinen polynomi on

$$((\mathbf{X}-1)^2-1)(\mathbf{X}-2)^2 = \mathbf{X}(\mathbf{X}-2)^3.$$

Kuten edellisessä tehtävässä, nähdään, että seuraavat vaihtoehdot ovat mahdollisia:

(i) Minimipolynomi on $\mathbf{X}(\mathbf{X}-2)$, jolloin Jordanin normaali muoto koostuu vain (1×1)-soluista, joista yksi on 0-solu ja kolme 2-solua. Operaattori on tällöin diagonalisoituva.

(ii) Minimipolynomi on $\mathbf{X}(\mathbf{X}-2)^2$, jolloin Jordanin normaali muoto välttämättä sisältää (1×1) 0-solun, yhden (2×2)-kokoisen 2-solun sekä yhden (1×1)-kokoisen 2-solun.

(iii) Minimipolynomi on $\mathbf{X}(\mathbf{X}-2)^3$, jolloin Jordanin normaali muoto koostuu yhdestä (1×1)-kokoisesta 0-solusta ja yhdestä (3×3)-kokoisesta 2-solusta.

Käymällä läpi vaihtoehtoja nähdään, että a)-kohdassa minimipolynomi on $X(X-2)^2$, jolloin Jordanin normaali muoto on

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

b)-kohdassa puolestaan minimipolynomi on $X(X-2)$, jolloin Jordanin normaali muoto on

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

6. Oletetaan, että operaattori $L \in L(\mathbb{C}^5)$ toteuttaa yhtälön $L^3 = L^2$. Mitkä ovat operaattorin L mahdolliset esitykset Jordanin normaalissa muodossa? Esitä kaikki mahdollisuudet.

Ratkaisu: Olkoon $\mathbf{p} = \mathbf{X}^3 - \mathbf{X}^2$, tällöin oletuksen nojalla pätee $p(L) = 0$. Tästä seuraa, että operaattorin L minimipolynomi $\mathbf{m}_L$ on polynomin $\mathbf{p}$ tekijä. Jaetaan tämä polynomi jaottomiin tekijöihin,

$$\mathbf{p} = \mathbf{X}^2(\mathbf{X} - 1).$$

Käydään läpi kaikki polynomin $\mathbf{p}$ (pääpolynomi)tekijät ja mietitään minkälaisilla Jordanin normaalissa muodossa olevilla matriiseilla on juuri tämä miniipolynomi.

(1) $\mathbf{m}_L = 1_K$ on vakiopolynomi. Tämä ei ole mahdollista, sillä tällöin $0 = m_L(L) = 1_K(L) = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^5}$, mikä selvästi ei voi pidä paikkaansa.

(2) $\mathbf{m}_L = \mathbf{X}$. Tämä on mahdollista jos ja vain jos $X(L) = L = 0$, jolloin matriisi on välttämättä nollamatriisi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(3) $\mathbf{m}_L = \mathbf{X} - 1$. Tämä on mahdollista jos ja vain jos $L = \mathrm{id}_V$, jolloin matriisi on välttämättä yksikkömatriisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(4) $\mathbf{m}_L = \mathbf{X}(\mathbf{X} - 1)$. Tällöin L on diagonalisoituva (tehtävä 1) ja sen ominaisarvot ovat 0 ja 1. Vastaava Jordanin muoto on diagonaalimatriisi, jonka diagonaalilla esiintyy ainakin yksi alkio 0 sekä ainakin yksi alkio 1. Vaihtoehdot ovat (diagonaalialkioiden permutaatiota vailla)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(5) $\mathbf{m}_L = \mathbf{X}^2$. Tällöin L sisältää ainakin yhden (2×2)-kokoisen 0-solun ja kaikki muut solut ovat 0-soluja joiden koko on (1×1) tai (2×2). Koska avaruuden dimensio

on 5, (2×2)-kokoisia soluja mahtuu korkeintaan kaksi. Näin ollen vaihtoehdot ovat (solujen permutaatiota vailla)

$$\begin{bmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}.$$

(6) $\mathbf{m}_L = \mathbf{X}^2(\mathbf{X}-1)$. Tällöin L sisältää ainakin yhden (2×2)-kokoisen 0-solun sekä ainakin yhden (1×1)-kokoisen 1-solun. Loput soluista ovat 0-soluja, joiden koko voi olla (1×1) tai (2×2), tai 1-soluja, joiden koko on (1×1). Näin ollen vaihtoehdot ovat (solujen permutaatiota vailla)

$$\begin{bmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix}.$$

Kaiken kaikkia oleellisesti erilaisia vaihtoehtoja on 12. Kääntäen kaikki nämä toteuttavat (operaattoreina) yhtälön $L^3 = L^2$, sillä kaikkien löydettyjen matriisien minimipolynomi on polynomin $\mathbf{X}^3 - \mathbf{X}^2$ tekijä.

7.* Osoita seuraavia materiaalissa ilman todistuksia esitettyjä väiteitä:
a) Oletetaan, että $\mathbf{p}$ on operaattorin L karakteristisen polynomin χ_L ei-vakio tekijä. Tällöin $\operatorname{Ker} p(L)$ on epätriviaali.
b) Esitetään operaattorin L karakteristinen polynomi jaottomien polynomien tulona,

$$\chi_L = \mathbf{p}_1^{l_1}\mathbf{p}_2^{l_2}\cdots\mathbf{p}_m^{l_m}.$$

Proposition 3.90 nojalla V on tällöin suora summa aliavaruuksista $W_i = \operatorname{Ker} p_i^{l_i}(L)$. Päättele a)-kohdan avulla, että operaattorin $L|W_i$ karakteristinen polynomi on $\mathbf{p}_i^{l_i}$ jokaisella i. Johda tästä, että karakteristisella polynomilla ja minimipolynomilla $\mathbf{m}_L$ on samat jaottomat tekijät (renkaassa $K[\mathbf{X}]$).

Ratkaisu: a) Oletetaan, että $\mathbf{p}$ on operaattorin L karakteristisen polynomin χ_L ei-vakio tekijä. Osoitetaan, että $\operatorname{Ker} p(L)$ on epätriviaali. Riittää osoittaa, että $\det p(A) = 0$, missä $A \in M(n\times n; K)$ on operaattorin matriisi (jonkun avaruuden V kannan suhteen). Proposition 3.17 nojalla kunta K voidaan upottaa algebrallisesti suljettuun kuntaan K', jolloin myös matriisi A voidaan ajatella matriisina kunnan K' yli eli matriisirenkaan $M(n\times n; K')$ alkiona. On selvä, että matriisin A karakteristinen polynomi on polynomi χ_L riippumatta siitä, tarkastellaanko sitä kunnan K vai kunnan K' yli. Lisäksi $\det p(A)$ saa saman arvon riippumatta sitä, lasketaan se kunnan K vai kunnan K' yli. Näin ollen riittää osoittaa, että $\det p(A) = 0$ olettamalla, että tarkastelu tapahtuu algebrallisesti suljettuun kunnan yli. Tällöin ei-vakiopolynomilla $\mathbf{p}$ on kuitenkin kunnassa K' ainakin yksi juuri, $\mathbf{p} = \mathbf{q}(\mathbf{X} - a)$ jollakin $a \in K'$, $\mathbf{q} \in K'[\mathbf{X}]$. Tällöin $p(A) = q(A)(A - aI)$, joten

$$\det p(A) = \det q(A) \det(A - aI).$$

Koska $\mathbf{p}$ on karakteristisen polynomin tekijä, sen juuri a on myös karakteristisen yhtälön juuri eli matriisin A ominaisarvo. Tunnetusti tällöin $\det(A - aI) = 0$. Tästä ja edellisestä seuraa, että $\det p(A) = 0$. Todistus on valmis.

b) Oletetaan, että

$$\chi_L = \mathbf{p}_1^{l_1} \mathbf{p}_2^{l_2} \dots \mathbf{p}_m^{l_m},$$

missä $\mathbf{p}_j$ on jaoton polynomi kaikilla $j = 1, \dots, m$. Proposition 3.90 nojalla V on tällöin suora summa aliavaruuksista $W_i = \operatorname{Ker} p_i^{l_i}(L)$, missä W_i on L-invariantti kaikilla $i = 1, \dots, n$. Huomataan heti alkuun, että jokainen aliavaruus W_i on ei-triviaali. Tämä seuraa siitä, että aliavaruus W_i sisältää aliavaruuden $\operatorname{Ker} p_i(L)$, joka on ei-triviaali a-kohdan nojalla.

Valitaan jokaisessa aliavaruudessa W_i kanta ja yhdistetään nämä kannat yhteiseksi koko avaruuden V kannaksi E, nähdään, että operaattorilla L on matriisiesitys $[L]_E$, joka on lohkomatriisi muotoa

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_m \end{bmatrix},$$

missä A_i on rajoittuman $L|W_i \colon W_i \to W_i$ matriisi, erityisesti neliömatriisi. Laskemalla operaattorin L karakteristinen polynomi tämän esityksen avulla, nähdään, että

$$\chi_L = \prod_{i=1}^{m} \chi_{L|W_i}.$$

Toisaalta tiedetään, että $\chi_L = \mathbf{p}_1^{l_1} \mathbf{p}_2^{l_2} \dots \mathbf{p}_m^{l_m}$, joten polynomin $\chi_{L|W_i}$ esitys jaottomien polynomien tulona voi sisältää ainoastaan tekijöitä muotoa $\mathbf{p}_j^{l_j}$. Osoitetaan, että itse asiassa $\chi_{L|W_i}$ ei ole jaollinen polynomilla $\mathbf{p}_j$ kun $i \neq j$. Nimittäin, jos $\mathbf{p}_j$ olisi polynomin $\chi_{L|W_i}$ tekijä, niin a)-kohdan perusteella kuvauksen $p_j(L)$ rajoittumalla aliavaruuteen W_i olisi epätriviaali ydin. Kuitenkin Proposition 3.90 nojalla kuvauksen $p_j(L)$ rajoittuma aliavaruuteen W_i on isomorfismi kun $i \neq j$. Näin ollen $\mathbf{p}_j$ ei voi olla polynomin $\chi_{L|W_i}$ tekijä kun $i \neq j$.

Edellisestä seuraa, että jokaisella $i = 1, \dots, n$ täytyy päteä $\chi_{L|W_i} = \mathbf{p}_i^{k_i}$ jollakin $k_i \leq l_i$. Toisaalta, koska polynomien $\chi_{L|W_i}$ tulo on $\chi_L = \prod_{i=1}^{m} \mathbf{p}_i^{l_i}$, itse asiassa täytyy päteä

$$\chi_{L|W_i} = \mathbf{p}_i^{l_i} \quad \text{kaikilla } i = 1, \dots, m.$$

Tämä on se, mitä pyydettiin osoittamaan. Koska operaattorin minimipolynomi on karakteristisen polynomin tekijä (Seuraus 3.87), tästä myös seuraa, että rajoittuman $L|W_i \colon W_i \to W_i$ minimipolynomi $\mathbf{m}_{L|W_i}$ on polynomi muotoa $\mathbf{p}_i^{l_i'}$, missä $1 \leq l_i' \leq l_i$

jokaisella $i = 1, \dots, n$. Tässä $l'_i \geq 1$, sillä aliavaruus W_i on ei-triviaali (joten minkään operaattorin minimipolynomi siinä ei voi olla vakiopolynomi).

Todistetaan, että operaattorin L minimipolynomi $\mathbf{m}_L$ on polynomien $\mathbf{m}_{L|W_i}$ tulo, $\mathbf{m}_L = \prod_{i=1}^m \mathbf{m}_{L|W_i}$. Koska V on suora summa aliavaruuksista W_i, on selvä, että tulolle $\mathbf{q} = \prod_{i=1}^m \mathbf{m}_{L|W_i}$ pätee $q(L) = 0$. Kääntäen, olkoon $\mathbf{r} \in K[\mathbf{X}]$ mikä tahansa sellainen polynomi, jolle pätee $r(L) = 0$. Tällöin jokaisella $i = 1, \dots, m$ erityisesti $r(L|W_i) = 0$, joten $\mathbf{r}$ on jaollinen polynomilla $\mathbf{m}_{L|W_i} = \mathbf{p}_i^{l'_i}$, kaikilla $i = 1, \dots, m$. Nämä polynomit ovat keskenään jaottomia, joten $\mathbf{r}$ on jaollinen myös niiden tulolla, eli polynomilla $\mathbf{q}$. On osoitettu, että $\mathbf{q} = \prod_{i=1}^m \mathbf{m}_{L|W_i}$ on operaattorin L minimipolynomi.

Osoitetaan vielä, että operaattorin L karakteristisella polynomilla χ_L ja minimipolynomilla $\mathbf{m}_L$ on samat jaottomat tekijät renkaassa $K[\mathbf{X}]$. Koska minimipolynomi on karakteristisen tekijä (Seuraus 3.87), on selvä, että jokainen sen tekijä on myös karakteristisen polynomin tekijä. Kääntäen, olkoon $\mathbf{p}$ jokin karakteristisen polynomin χ_L *jaoton* tekijä. Koska polynomin jako jaottomiin tekijöihin on oleellisesti yksikäsitteinen, $\mathbf{p} = k\mathbf{p}_i$ jollakin $i = 1, \dots, m$ ja $k \in K$, $k \neq 0_K$. Edellä on osoitettu, että

$$\mathbf{m}_L = \prod_{i=1}^m \mathbf{m}_{L|W_i} = \prod_{i=1}^m \mathbf{p}_i^{l'_i},$$

missä $l'_i \geq 1$ kaikilla $i = 1, \dots, m$. Toisin sanoen $\mathbf{p}_i$ on minimipolynomin tekijä, joten myös $\mathbf{p}$ on minimipolynomin tekijä.

8.* Olkoon $\mathbf{p} = \mathbf{X}^n + a_{n-1}\mathbf{X}^{n-1} + \dots + a_1\mathbf{X} + a_0$ polynomirenkaan $K[\mathbf{X}]$ pääpolynomi. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Osoita, että $\chi_A = \mathbf{p}$.
b) Oletetaan, että $\mathbf{p}$ on jaoton. Olkoon $L\colon V \to V$ operaattori, jonka matriisi (jonkun kannan suhten) on A. Osoita, että V:llä ei ole epätriviaaleja aitoja aliavaruuksia, jotka olisivat L-invariantteja.

Ratkaisu: a) Osoitetaan, että matriisin

$$A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

karakteristinen polynomi on $\mathbf{p} = \mathbf{X}^n + a_{n-1}\mathbf{X}^{n-1} + \dots + a_1\mathbf{X} + a_0$ induktiolla luvun n suhteen. Kun $n = 1$ kyseessä on (1×1)-matriisi $[-a_0]$, jonka karakteristinen polynomi on selvästi $(\mathbf{X}+a_0)$. Kun $n=2$ kyseessä on (2×2)-matriisi muotoa

$$\begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tämän karakteristinen polynomi on

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{X}+a_1 & -1 \\ a_0 & \mathbf{X} \end{bmatrix} = \mathbf{X}(\mathbf{X}+a_1)+a_0 = \mathbf{X}^2+a_1\mathbf{X}+a_0.$$

Oletetaan, että väite pätee arvolla $(n-1)$ ja osoitetaan se arvolle n. Matriisin A karakteristinen polynomi on

$$\det(\mathbf{X}I_n - A) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{X}+a_{n-1} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-2} & \mathbf{X} & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ a_0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{X} \end{bmatrix}.$$

Kehittämällä tämä viimeisen rivin suhteen, nähdään, että

$$\chi_A = (-1)^{n+1}a_0 \det B + (-1)^{n+n}\mathbf{X}\det C,$$

missä B on matriisi, joka saadaan matriisista $\mathbf{X}I_n - A$ poistamalla siitä ensimmäinen sarake sekä viimeinen rivi. Tällöin B on alakolmiomatriisi, jonka diagonaalialkiot ovat kaikki (-1),

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{X} & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}.$$

Tällöin B^T on yläkolmiomatriisi, jonka diagonaalialkiot ovat (-1). Koska yläkolmiomatriisin determinantti on sen diagonaalialkioiden tulo, saadaan, että
$\det B = \det B^T = (-1)^{n-1}$.

Matriisi C puolestaan on matriisi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}+a_{n-1} & -1 & \dots & \\ a_{n-1} & \mathbf{X} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & 0 & \dots & -1 \\ a_1 & 0 & \dots & \mathbf{X} \end{bmatrix},$$

joka on samantyyppinen kuin A, paitsi, että se on pienempikokoinen.Induktioletuksen nojalla pätee

$$\det C = \mathbf{X}^{n-1} + a_{n-1}\mathbf{X}^{n-2} + \ldots + a_1.$$

Näin ollen

$$\chi_A = (-1)^{n+1}(-1)^{n-1}a_0 + (-1)^{n+n}\mathbf{X}(\mathbf{X}^{n-1} + a_{n-1}\mathbf{X}^{n-2} + \ldots + a_1) =$$

$$\mathbf{X}^n + a_{n-1}\mathbf{X}^{n-1} + \ldots + a_1\mathbf{X} + a_0 = \mathbf{p}.$$

b) Oletetaan, että $\mathbf{p}$ on jaoton. Olkoon $L\colon V \to V$ operaattori, jonka matriisi (jonkun kannan suhten) on A kuten a)-kohdassa. Tällöin a)-kohdan perustella operaattorin L karakteristinen polynomi on $\mathbf{p}$.

Osoitetaan, että avaruudella V ei ole epätriviaaleja aitoja aliavaruuksia, jotka olisivat L-invariantteja. Olkoon W L-invariantti ja oletetaan, että

$$0 < \dim W < \dim V = n.$$

Tällöin L voidaan esittää (jossakin toisessa kannassa, mahdollisesti) lohkomatriisina muotoa

$$\begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}, \tag{2}$$

missä B on rajoittuman $L|W\colon W \to W$ matriisi. Tämä matriisi on $(m \times m)$-kokoinen, missä $m = \dim W$. Käyttämällä operaattorille L matriisiesitystä 2 nähdään, että

$$\mathbf{p} = \chi_L = \chi_B \chi_D.$$

Koska $\dim W = m$, polynomin χ_B aste on m, joten polynomin χ_D aste on $n - m$. Koska $0 < m < n$, kumpikin polynomi χ_D ja χ_B on polynomin $\mathbf{p}$ epätriviaali tekijä. Tämä on kuitenkin ristiriidassa sen kanssa, että $\mathbf{p}$ on jaoton. Näin ollen W ei voi olla olemassa.