Äärellisulotteinen lineaarialgebra, kevät 2015.
Harjoitus 11.
Ratkaisuehdotuksia.

Kaikissa tehtävissä V tarkoittaa äärellisulotteista K-vektoriavaruutta ja $L\colon V \to V$ tarkoittaa sen operaattoria, ellei muuta mainitaan.

1. Olkoon $\mathbf{v} \in V$.
a) Osoita, että
$$I = \{\mathbf{p} \in K[\mathbf{X}] \mid p(L)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_V\}$$
on polynomialgebran $K[\mathbf{X}]$ ideaali ja $I \neq \{\mathbf{0}\}$. Teorian mukaan tällä ideaalilla on tällöin yksikäsitteinen pääpolynomi-virittäjä $\mathbf{m}_{L,\mathbf{v}}$, jota sanotaan vektorin $\mathbf{v}$ *minimipolynomiksi operaattorin L suhteen.*
b) Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ olkoon $E_n = (\mathbf{v}, L(\mathbf{v}), \ldots, L^n(\mathbf{v}))$. Olkoon $n \geq 0$ sellainen, että jono E_n on sidottu, mutta jono E_{n-1} on vapaa. Osoita, että polynomin $\mathbf{m}_{L,v}$ aste on tasan n. Miten todistuksen avulla voidaan käytännössä laskea $\mathbf{m}_{L,\mathbf{v}}$?

Ratkaisu: Olkoot $\mathbf{p}, \mathbf{p}' \in I$, $\mathbf{q} \in K[\mathbf{X}]$. Tällöin
$$(p + p')(L)(\mathbf{v} = p(L)(\mathbf{v}) + p'(L)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_V,$$
$$(qp)(L)(\mathbf{v}) = q(L)(p(L)(\mathbf{v})) = q(L)(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_V,$$
joten $\mathbf{p} + \mathbf{p}', \mathbf{qp} = \mathbf{pq} \in I$. Lisäksi selvästi nolla-polynomi kuuluu joukkoon I ja valitsemalla yllä $\mathbf{q}$ vakiopolynomiksi -1_K nähdään myös, että $-\mathbf{p} = \mathbf{qp} \in I$ kun $\mathbf{p} \in I$. Näin ollen I on polynomirenkaan $K[\mathbf{X}]$ ideaali. Valitsemalla polynomiksi $\mathbf{q}$ vakiopolynomi $\mathbf{q} = k \in K$, nähdään myös, että I on suljettu skalaarikertolaskun suhteen, joten se on myös vektoriavaruuden $K[\mathbf{X}]$ aliavaruus. Näin ollen I on myös polynomialgebran $K[\mathbf{X}]$ ideaali (huom, mikä tahansa polynomirenkaan $K[\mathbf{X}]$ ideaali on automaattisesti myös aliavaruus, kuten todistuksesta nähdään).

Olkoon $E_n = (\mathbf{v}, L(\mathbf{v}), \ldots, L^n(\mathbf{v}))$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Huom, tapausta $n = 0$ vastaa yhden alkion jono $E_0 = (\mathbf{v})$. Koska avaruus V on äärellisulotteinen, jono E_n ei voi olla vapaa jokaisella $n \in \mathbb{N}$, itse asiassa sen täytyy olla sidottu ainakin heti kun $n \geq \dim V$. Erityisesti on olemassa pienin sellainen $n \in \mathbb{N}$, jolle jono $E_n = (\mathbf{v}, L(\mathbf{v}), \ldots, L^n(\mathbf{v}))$ on sidottu. Jos $n = 0$, tämä tarkoittaa sitä, että jono $E_0 = (\mathbf{v})$ on sidottu, mikä on mahdollista ainoastaan kun $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$. Tässä tapauksessa $E_{-1} = ()$ voidaan tulkita tyhjäksi jonoksi, joka on aina triviaalisti vapaa. Toisaalta selvästi $I = K[\mathbf{X}]$ kun $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$ ja ideaali $K[\mathbf{X}]$ on 0-asteisen pääpolynomin 1_K virittämä (vakiopolynomi ykkönen). Näin ollen väite pätee erikoistapauksessa $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$.

Olkoon sitten $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$, tällöin välttämättä $n > 0$, joten myös $n - 1 \geq 0$ ja luvun n valinnan perusteella jono $E_{n-1} = (\mathbf{v}, L(\mathbf{v}), \ldots, L^{n-1}(\mathbf{v}))$ on vapaa. Koska jono $E_n = (\mathbf{v}, L(\mathbf{v}), \ldots, L^n(\mathbf{v}))$ on sidottu, on olemassa $a_0, \ldots, a_n \in K$ siten, että

(1) $$a_0\mathbf{v} + a_1L(\mathbf{v}) + \ldots + a_nL^n(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_V$$

ja kertoimet $a_0, \ldots, a_n$ eivät kaikki ole nollia. Tällöin täytyy olla $a_n \neq \mathbf{0}$, sillä muuten saadaan nollavektorille epätriviaali esitys muotoa

$$a_0\mathbf{v} + a_1L(\mathbf{v}) + \ldots + a_{n-1}L^{n-1}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_V,$$

mikä on ristiriidassa sen kanssa, että jono $E_{n-1} = (\mathbf{v}, L(\mathbf{v}), \ldots, L^{n-1}(\mathbf{v}))$ on vapaa. Näin ollen täytyy olla $a_n \neq 0_K$, joten sillä voi jakaa. Jakamalla yhtälö 1 alkiolla a_n saadaan yhtälö

$$c_0\mathbf{v} + c_1L(\mathbf{v}) + \ldots + c_{n-1}L^{n-1}(\mathbf{v}) + L^n(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_V,$$

missä $c_i = a_i/a_{n-1}$, $i = 1, \ldots, n-1$. Tästä nähdään, että ei-nolla pääpolynomi $\mathbf{p} = c_0 + c_1\mathbf{X} + \ldots + c_{n-1}\mathbf{X}^{n-1} + \mathbf{X}^n$ kuuluu ideaalin I. Erityisesti I ei ole triviaali ideaali $\{0\}$. Osoitetaan, että $\mathbf{p}$ on itse asiassa tämän ideaalin virittäjä. Koska polynomirenkaan (epätriviaalin) ideaalin virittäjä on sen asteeltaan pienin nollasta eroava alkio, riittää osoittaa, että ideaali I ei sisällä k-asteista polynomia $\mathbf{q} = b_0 + b_1\mathbf{X} + \ldots + b_k\mathbf{X}^k$, missä $k \in \mathbb{N}, k < n$. Tehdään vasta-oletus, olkoon $\mathbf{q} = b_0 + b_1\mathbf{X} + \ldots + b_k\mathbf{X}^k \in I$, $k < n$. Ideaalin I määritelmän nojalla tämä tarkoittaa sitä, että

$$b_0\mathbf{v} + b_1L(\mathbf{v}) + \ldots + b_kL^k(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_V.$$

Koska polynomi $\mathbf{q}$ ei ole nolla-polynomi, tässä ainakin yksi kerroin b_i eroaa nollasta, joten kyseessä on nollavektorin epätriviaali esitys jonon $E_k = (\mathbf{v}, L(\mathbf{v}), \ldots, L^k(\mathbf{v}))$ alkioilla. Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä $k < n$, joten jono E_k on vapaa. Näin ollen myös kohdan b) väite on todistettu.

Tämän perusteella nähdään myös, että käytännössä minimipolynomin $\mathbf{m}_{L,\mathbf{v}} = c_0 + c_1\mathbf{X} + \ldots + c_{n-1}\mathbf{X}^{n-1} + \mathbf{X}^n$ kertoimet $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ voidaan löytää seuraavasti. Ensin testataan alkaen arvosta $n = 0$ onko jono $E_0, E_1, \ldots, E_k, \ldots, E_{n-1}$ vapaa, kunnes törmätään ensimmäistä kertaa sidottuun jonoon E_n. Sen jälkeen ratkaistaan yhtälö

$$c_0\mathbf{v} + c_1L(\mathbf{v}) + \ldots + c_{n-1}L^{n-1}(\mathbf{v}) + L^n(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_V,$$

joka palauttuu käytännössä erääseen yhtälöryhmään. Tämän ratkaisu antaa halutut kertoimet $c_0, \ldots, c_n$. Menetelmästä annetaan konkrettinen esimerkki seuraavan tehtävän ratkaisun yhteydessä.

2. Olkoon $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ operaattori, jonka matriisi standardikannan $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ suhteen on

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Laske edellisen tehtävän b)-kohdassa löydetyn menetelmän avulla alkion $\mathbf{e}_1$ minimipolynomi $\mathbf{m}_{L,\mathbf{e}_1}$ operaattorin L suhteen. Osaatko päätellä sen jälkeen suoraan mikä on operaattorin L minimipolynomi $\mathbf{m}_L$? Entä karakteristinen polynomi χ_L?

Ratkaisu: Käytetään edellisen tehtävän b)-kohdassa esitettyä menetelmää. Tutkitaan jonoja $E_k = (\mathbf{e}_1, L(\mathbf{e}_1), \ldots, L^k(\mathbf{e}_1))$ arvoilla $k = 0, 1, 2, \ldots$ niin kauan kunnes törmätään ensimmäistä kertaa sidottuun jonoon. Koska avaruuden $\mathbb{R}^3$ dimensio on kolme, ainakin jonon E_3 (jossa 4 jäsentä) täytyy olla sidottu, joten riittää tarkastella vapautta käytännössä arvoon $k = 2$ asti. Jono $E_0 = (\mathbf{e}_1)$ on triviaalisti vapaa, sillä $\mathbf{e}_1 \neq \mathbf{0}$. Jonon $E_1 = (\mathbf{e}_1, L(\mathbf{e}_1))$ vapauden tarkistamiseksi pitää ensin selvittää $L(\mathbf{e}_1)$. Sen arvo poimitaan suoraan matriisin A ensimmäisestä sarakkeesta,

$$L(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2.$$

Näin ollen $E_1 = (\mathbf{e}_1, 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$. Helposti nähdään, että tämä jono on vapaa, sillä jos

$$\mathbf{0}_V = a\mathbf{e}_1 + b(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = (a + 2b)\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2,$$

standardikannan vapauden perusteella saadaan $a + 2b = b = 0$. Näistä selvästi seuraa $a = b = 0$. Näin ollen jono E_1 on vapaa.

Seuraavaksi tarkistetaan samalla tavalla jonon $E_2 = (\mathbf{e}_1, L(\mathbf{e}_1), L^2(\mathbf{e}_1))$ vapautta. Ensin lasketaan

$$L^2(\mathbf{e}_1) = L(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = 2L(\mathbf{e}_1) + L(\mathbf{e}_2) =$$

$$2(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + (-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

Kyseessä on siis jono $(\mathbf{e}_1, 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$. Helposti nähdään (tämä täytyy tietysti käydä läpi!), että tämä jono on vapaa. Koska vapaassa jonossa E_2 on kolme alkiota ja koko avaruuden dimensio on kolme, tämän jonon täytyy olla avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta ja seuraavan jonon E_3 täytyy olla sidottu. Näin ollen pienin $n \in \mathbb{N}$ jolle E_n on sidottu on arvo $n = 3$. Edellisen tehtävän nojalla minimipolynomin $\mathbf{m}_{L,\mathbf{e}_1}$ on oltava tasan 3-asteinen eli muotoa

$$\mathbf{m}_{L,\mathbf{e}_1} = a + b\mathbf{X} + c\mathbf{X}^2 + \mathbf{X}^3$$

(muista, että minimipolynomi on sovittu olemaan pääpolynomi. Minimipolynomin määritelmän perusteella täytyy päteä

$$a\mathbf{e}_1 + bL(\mathbf{e}_1) + cL^2(\mathbf{e}_1) + L^3(\mathbf{e}_1) = \mathbf{0}_V. \tag{2}$$

Sijoitetaan tähän edellä lasketut $L(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $L^2(\mathbf{e}_1) = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, sekä $L^3(\mathbf{e}_1)$, joka täytyy laskea,

$$L^3(\mathbf{e}_1) = L(L^2(\mathbf{e}_1)) = L(3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = 3L(\mathbf{e}_1) + 2L(\mathbf{e}_2) + L(\mathbf{e}_3) =$$

$$3(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + 2(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) + (-2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3.$$

Sijoittamalla näitä yhtälöön 2 ja sieventämällä saadaan yhtälö

$$(a + 2b + 3c + 4)\mathbf{e}_1 + (b + 2c + 1)\mathbf{e}_2 + (c - 4)\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}_V.$$

Koska standardikanta on vapaa, tämä on ekvivalentti yhtälöryhmän

$$\begin{cases} a + 2b + 3c + 4 = 0, \\ b + 2c + 1 = 0, \\ c + 3 = 0. \end{cases}$$

Tämä on helppo ratkaista (valmiiksi porrasmuodossa), ratkaisut ovat $c = -3$, $b = 5$, $a = -5$. Näin ollen vektorin $\mathbf{e}_1$ minimipolynomi $\mathbf{m}_{L,\mathbf{e}_1}$ operaattorin L suhteen on kolmannen asteen polynomi

$$\mathbf{X}^3 - 3\mathbf{X}^2 + 5\mathbf{X} - 5.$$

Olkoon $\mathbf{m}_L$ operaatorin L minimipolynomi. Tällöin $m_L(L) = 0$, joten erityisesti $m_L(L)(\mathbf{e}_1) = \mathbf{0}_V$. Näin ollen polynomi $\mathbf{m}_L$ kuuluu ideaaliin

$$I = \{\mathbf{p} \in K[\mathbf{X}] \mid p(L)(\mathbf{e}_1) = \mathbf{0}_V\},$$

jonka virittää polynomi $\mathbf{m}_{L,\mathbf{e}_1}$. Tästä seuraa, että $\mathbf{m}_{L,\mathbf{e}_1}$ on polynomin $\mathbf{m}_L$ tekijä. Erityisesti $3 = \deg \mathbf{m}_{L,\mathbf{e}_1} \leq \deg \mathbf{m}_L$. Toisaalta Cayley-Hamiltonin Lauseesta seuraa, että $\mathbf{m}_L$ on karakteristisen polynomin tekijä ja $\deg \mathbf{m}_L \leq \deg \chi_L = 3$. Näin ollen $\mathbf{m}_{L,\mathbf{e}_1} \mid \mathbf{m}_L \mid \deg \chi_L$, missä kaikilla kolmella polynomilla lisäksi on pakko olla sama aste 3. Koska tiedetään, että nämä polynomit ovat pääpolynomit, ainoa mahdollinen johtopäätös on se, että ne ovat samoja. Näin ollen

$$\chi_L = \mathbf{m}_L = \mathbf{m}_{L,\mathbf{e}_1} = \mathbf{X}^3 - 3\mathbf{X}^2 + 5\mathbf{X} - 5.$$

Karakteristinen polynomi voi myös helposti laskea determinanttina, mutta tässä tehtävässä sitä ei tarvita, koska se voidaan päätellä suoraan kuten yllä. Sen laskeminen determinanttina on kuitenkin mainoa tapa tarkistaa, että lasku varmasti meni oikein.

Tässä tehtävässä siis operaattorin minimipolynomi pystyttiin laskemaan erään vektorin minimipolynomina. Yleisesti ottaen näin ei tarvitse olla. Vektorin minimipolynomi $\mathbf{m}_{L,\mathbf{v}}$ on kyllä aina operaattorin minimipolynomin $\mathbf{m}_L$ tekijä, mutta niiden ei tarvitse olla samoja. Voidaan osoittaa, että mille tahansa operaattorille $L\colon V \to V$ on aina olemassa sellainen vektori $\mathbf{v} \in V$ jolle $\mathbf{m}_{L,\mathbf{v}} = \mathbf{m}_L$, mutta sellaisen vektorin löytäminen ei ole aivan itsestään selvä. Tehtävissä 5, 6 ja 7 esitetään (joitakin) tuloksia, joiden avulla tämä väite voidaan osoittaa todeksi sekä käytännön menetelmiä, joilla sellainen vektori voidaan löytää.

3. Osoita, että operaattori L on kääntyvä jos ja vain jos sen minimipolynomin $\mathbf{m}_L = \sum_{i=0}^{n} a_i \mathbf{X}^i$ vakiokerroin a_0 ei ole kunnan nolla-alkio. Miten todistuksen avulla voidaan käytännössä laskea kääntyvän operaattorin käänteiskuvaus L^{-1} kun $\mathbf{m}_L$ on tiedossa? Laske havaintojesi avulla edellisen tehtävän matriisin A käänteismatriisi.

Ratkaisu: Koska $\mathbf{m}_L = \sum_{i=0}^{n} a_i \mathbf{X}^i$ on operaattorin L minimipolynomi, pätee

$$L^n + a_{n-1}L^{n-1} + \ldots + a_1 L + a_0 \operatorname{id}_V = 0.$$

Siirtämällä ”vakiotermi” $a_0 \operatorname{id}_V$ toiselle puolelle ja ottamalla L ”yhteiseksi tekijäksi” vasemmalla puolella, saadaan yhtälö

$$L(L^{n-1} + a_{n-1}L^{n-2} + \ldots + a_2 L + a_1) = -a_0 \operatorname{id}_V . \tag{3}$$

Olkoon $\mathbf{q} = \mathbf{X}^{n-1} + a_{n-1}\mathbf{X}^{n-2} + \ldots + a_1$. Tällöin $\mathbf{q} \in K[\mathbf{X}]$ ja $\deg \mathbf{q} = n-1 < \deg \mathbf{m}_L$. Merkitään $L' = q(L) = L^{n-1} + a_{n-1}L^{n-2} + \ldots + a_1 \in L(V)$. Tällöin yhtälö 3 voidaan kirjoittaa muodossa $LL' = -a_0 \operatorname{id}_V$.

Jos $a_0 = 0_K$, edellisestä seuraa, että $LL' = 0$. Tästä seuraa, että L ei ole kääntyvä, sillä jos L^{-1} olisi olemassa, kertomalla yhtälö $LL' = 0$ vasemmalta operaattorilla L^{-1}, saattaisiin yhtälö $q(L) = L' = 0$. Tämä on kuitenkin ristiriidassa minimipolynomin määritelmän kanssa, sillä $\deg \mathbf{q} = n-1 < \deg \mathbf{m}_L$ ja myös $\deg \mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ (koska $\mathbf{q}$ on itse asiassa pääpolynomi). Näin ollen ehdosta $a_0 = 0_K$ seuraa, että L ei ole kääntyvä.

Jos taas $a_0 \neq 0_K$, yhtälöstä $LL' = -a_0 \operatorname{id}_V$ saadaan jakamalla $(-a_0)$:llä yhtälö $LL'' = \operatorname{id}_V$, missä

$$L'' = -\frac{1}{a_0}L = (-1/a_0)L^{n-1} - (a_{n-1}/a_0)L^{n-2} - \ldots - (a_1/a_0).$$

Operaattorilla L on siis "oikeanpuoleinen käänteisalkio" L''. Koska $L\colon V \to V$ on äärellisulotteisen vektoriavaruuden operaattori, tästä seuraa, että L on kääntyvä ja L'' on sen käänteisoperaattori (vrt. Seuraus 2.95, jossa sama asia on esitetty matriisien kielellä).

Ratkaisusta näkee myös, että tapauksessa $a_0 \neq 0_K$ operaattorin L käänteiskuvaus saadaan kaavalla

$$L^{-1} = (-1/a_0)L^{n-1} - (a_{n-1}/a_0)L^{n-2} - \ldots - (a_1/a_0),$$

missä $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ ovat operaattorin L minimipolynomin $\mathbf{m}_L$. Näin ollen, jos $\mathbf{m}_L$ on tiedossa, L^{-1} voidaan laskea suoraan tällä kaavalla.

Esimerkiksi edellisen tehtävän operaattorin $L \in L(\mathbb{R}^3)$ minimipolynomi osattiin laskea - se oli polynomi $\mathbf{X}^3 - 3\mathbf{X}^2 + 5\mathbf{X} - 5$. Tämän tuloksen tehtävän avulla nähdään, että operaattorin L käänteiskuvaus on operaattori

$$L^{-1} = -\frac{1}{-5}(L^2 - 3L + 5\operatorname{id}_V) = \frac{1}{5}L^2 - \frac{3}{5}L + \operatorname{id}_V.$$

Operaattorin L matriisi standardikannan suhteen oli matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Siirtymällä yllä operaattoreista matriiseihin, nähdään, että A on kääntyvä matriisi, jonka käänteismatriisi on $A^{-1} = \frac{1}{5}A^2 - \frac{3}{5}A + I_3$. Suoralla laskulla saadaan

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Olkoon S $\mathbb{R}$-kertoiminen $(n \times n)$-matriisi, jonka jokainen alkio on 1,

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Oletetaan, että $n \geq 2$.
a) Osoita suoralla laskulla, että $S^2 = nS$ ja päättele tästä, että matriisin S minimipolynomi on $\mathbf{X}^2 - n\mathbf{X}$. Päättele tästä suoraan matriisin S ominaisarvot.
b) Laske jokaisen matriisin S ominaisarvon geometrinen kertaluku. Pystytkö päättelemään tästä mitkä ovat matriisin S ominaisarvojen algebralliset kertaluvut?
c) Onko S diagonalisoituva? Mikä on sen karakteristinen polynomi?

Ratkaisu: a) Matriisille $S = (s_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ pätee $s_{ij} = 1$ kaikilla $i, j = 1, \dots, n$, joten matriisien kertolaskun määritelmän nojalla nähdään, että $S^2 = A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ on sellainen matriisi, jolle pätee

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} s_{ik}s_{kj} = \sum_{k=1}^{n} 1 = n = n \cdot 1 = n \cdot s_{ij}$$

kaikilla $i, j = 1, \dots, n$. Näin ollen $S^2 = A = nS$. Tämä voidaan kirjoittaa muodossa $S^2 - nS$ tai jopa muodossa

$$(\mathbf{X}^2 - n\mathbf{X})(S) = 0.$$

Tästä nähdään, että polynomi $\mathbf{X}^2 - n\mathbf{X}$ on ainakin jaollinen matriisin S minimipolynomilla, lisäksi se on pääpolynomi. Jos $\mathbf{X}^2 - n\mathbf{X}$ ei ole S:n minimipolynomi, jokin sen aito tekijä myös nollaa matriisi S. Mutta $\mathbf{X}^2 - n\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{X} - n)$, missä kummankin polynomin arvo matriisissa S ei ole nolla, $\mathbf{X}(S) = S \neq 0$, $(\mathbf{X} - n)(S) = S - nI_n \neq 0$ (tässä viimeisessä tarvitaan oletusta $n \geq 2$). Näin ollen polynomi $\mathbf{X}^2 - n\mathbf{X}$ on matriisin S minimipolynomi.

Seurauksen 3.87 mukaan matriisin S ominaisarvot ovat täsmälleen sen minimipolynomin $\mathbf{X}^2 - n\mathbf{X}$ juuret ($\mathbb{R}$:ssä). Selvästi polynomilla $\mathbf{X}^2 - n\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{X} - n)$ on tasan kaksi juurta, $r_0 = 0$ ja $r_n = n$.

b) Ajatellaan matriisi S lineaarisena kuvauksena $L_S \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Aloitetaan ominaisarvosta 0, koska sitä vastaava ominaisarvoaliavaruus V_0 on tämän kuvauksen ydin $\operatorname{Ker} L_S$, joten sen dimension laskiessa voidaan soveltaa esimerkiksi Proposition 2.92 tulosta.

Koska kuvauksen L_S matriisi avaruuden $\mathbb{R}^n$ standarikannan $E = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ suhteen on S, kaikilla $j = 1, \dots, n$ pätee $L_S(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i$. Merkitään $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i$. Edellisestä seuraa, että $\operatorname{Im} L_S = \operatorname{Span}(\mathbf{x})$, toisin sanoen $\operatorname{Im} L_S$ on yhden alkion virittämä eli tasan 1-ulotteinen. Koska (Propositio 2.92) on voimassa yhtälö

$$\dim \operatorname{Ker} L_S + \dim \operatorname{Im} L_S = \dim \mathbb{R}^n = n,$$

edellisestä seuraa, että ominaisarvoaliavaruuden $V_0 = \operatorname{Ker} L_S$ dimensio on $n - \dim \operatorname{Im} L_S = n - 1$. Tämä on siis ominaisarvon 0 geometrinen kertaluku.

Ominaisarvoaliavaruuden V_0 lisäksi matriisilla S on toinen ominaisarvoaliavaruus V_n, joka vastaa ominaisarvoa n. Lemman 3.7 nojalla summa $V_0 + V_n$ on suora. Koska tämä summa on n-ulotteisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus, Proposition 2.160 nojalla pätee

$$\dim V_n + \dim V_0 \leq n,$$

mistä seuraa, että $\dim V_n \leq n - (n-1) = 1$. Toisaalta ominaisarvoaliavaruutena V_n ei voi olla triviaali, joten täytyy olla $\dim V_n = 1$. Näin ollen aliavaruuden $V_0 \oplus V_n$ dimensio on tasan $(n-1) + 1 = n$, mistä seuraa, että sen täytyy olla koko avaruus $\mathbb{R}^n$. Erityisesti matriisi S on diagonalisoituva määritelmän mukaan. Lemmasta 3.81 tällöin seuraa, että jokaisen sen ominaisarvon geometrinen kertaluku on sama kuin sen algebrallinen kertaluku. Näin ollen ominaisarvon 0 algebrallinen kertaluku on $n-1$ ja ominaisarvon n algebrallinen kertaluku on 1. Tästä seuraa suoraan algebrallisen kertaluvun määritelmän mukaan, että matriisin S karakteristisen polynomin on oltava polynomi

$$\chi_S = \mathbf{X}^{n-1}(\mathbf{X} - n).$$

5. Oletetaan, että vektorin $\mathbf{v} \in V$ minimipolynomi $\mathbf{m}_{L,\mathbf{v}}$ operaattorin L suhteen on esitettävissä tulona $\mathbf{m}_{L,\mathbf{v}} = \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2$, missä $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in K[\mathbf{X}]$ ovat pääpolynomeja. Olkoon $\mathbf{w} = p_1(L)(\mathbf{v})$. Osoita, että vektorin $\mathbf{w}$ minimipolynomi operaattorin L suhteen on polynomi $\mathbf{p}_2$.

Ratkaisu:

$$p_2(L)(\mathbf{w}) = p_2(p_1(L)(\mathbf{v}))) = (p_2 \circ p_1(L))(\mathbf{v}) = (p_2p_1)(L)(\mathbf{v}) = m_{L,\mathbf{v}}(L)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_V,$$

joten polynomin $\mathbf{p}_2$ arvo L:ssä ainakin nollaa vektorin $\mathbf{w}$. Olkoon $\mathbf{q}$ mikä tahansa polynomi, jolle pätee $q(L)(\mathbf{w}) = \mathbf{0}_V$. Tällöin siis

$$\mathbf{0}_V = q(L)(\mathbf{w}) = q(L)p_1(L)(\mathbf{v}) = (p_1q)(L)(\mathbf{v}).$$

Tästä ja vektorin $\mathbf{v}$ minimipolynomin $\mathbf{m}_{L,\mathbf{v}}$ määritelmästä seuraa, että $\mathbf{m}_{L,\mathbf{v}} = \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2$ jakaa polynomin $\mathbf{p}_1\mathbf{q}$. Toisin sanoen on olemassa polynomi $\mathbf{s} \in K[\mathbf{X}]$ siten, että

$$\mathbf{p}_1\mathbf{q} = \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{s}.$$

Koska $\mathbf{p}_1$ ei pääpolynomina voi olla nollapolynomi, se voidaan supistaa (polynomirengas on kokonaisalue), jolloin saadaan yhtälö

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}_2\mathbf{s}.$$

Näin ollen mielivaltainen polynomi $\mathbf{q}$ jonka arvo L:ssä nollaa vektorin $\mathbf{w}$ on jaollinen polynomilla $\mathbf{p}_2$. On siis osoitettu, että $\mathbf{p}_2$ on asteeltaan pienin ei-nollapolynomi, jonka arvo L:ssä nollaa vektorin $\mathbf{w}$, joten sen täytyy olla sen minimipolynomi operaatorin L suhteen.

6. Olkoot $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ja oletetaan, että polynomit $\mathbf{p}_1 = \mathbf{m}_{L,\mathbf{v}}$, $\mathbf{p}_2 = \mathbf{m}_{L,\mathbf{w}}$ ovat keskenään jaottomia. Tällöin (Lemma 3.45) on olemassa polynomit $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ siten, että

$$\mathbf{q}_1\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}_2\mathbf{p}_2 = 1.$$

a) Olkoon $\mathbf{u} = q_1(L)(\mathbf{w}) + q_2(L)(\mathbf{v})$. Osoita, että $p_1(L)(\mathbf{u}) = \mathbf{w}$ ja $p_2(L)(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$.
b) Osoita, että vektorin $\mathbf{u}$ minimipolynomi operaattorin L suhteen on $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2$.

Ratkaisu: a) Oletuksista seuraa, että pätee

$$q_1(L)p_1(L) + q_2(L)p_2(L) = \mathrm{id}_V\,.$$

Lisäksi minimipolynomin määritelmän mukaan pätee

$$p_1(L)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_V = p_2(L)(\mathbf{w}).$$

Hyödyntämällä näitä tietoja saadaan

$$p_1(L)(\mathbf{u}) = p_1(L)(q_1(L)(\mathbf{w}) + q_2(L)(\mathbf{v})) = p_1(L)q_1(L)(\mathbf{w}) + p_1(L)q_2(L)(\mathbf{v}) =$$

$$p_1q_1(L)(\mathbf{w}) + q_2(L)p_1(L)(\mathbf{v}) = p_1q_1(L)(\mathbf{w}) = (\mathrm{id}_V - q_2(L)p_2(L))(\mathbf{w}) =$$
$$\mathbf{w} - q_2(L)p_2(L)(\mathbf{w}) = \mathbf{w}.$$

Samalla tavalla nähdään, että $p_2(L)(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$.

b)Käyttämällä a)-kohdan tulosta (tai suoraan vektorin $\mathbf{u}$ määritelmästä) nähdään, että

$$(p_1p_2)(L)(\mathbf{u}) = p_2(L)(\mathbf{w}) = \mathbf{0}_V.$$

Näin ollen tulo $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2$ ainakin kuuluu ideaaliin

$$I = \{\mathbf{p} \in K[\mathbf{X}] \mid p(L)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_V\}.$$

Osoitetaan, että polynomi $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2$ virittää tämän ideaalin. Riittää näyttää, että jokainen tämän ideaalin alkio on jaollinen polynomilla $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2$. Olkoon siis $\mathbf{q} \in K[\mathbf{X}]$ sellainen, että $q(L)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_V$. Tällöin

$$q(L)(\mathbf{v}) = q(L)p_2(L)(\mathbf{u}) = p_2(L)q(L)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_V,$$

joten $\mathbf{q}$ kuuluu ideaalin

$$\{\mathbf{p} \in K[\mathbf{X}] \mid p(L)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_V\},$$

jonka virittää vektorin $\mathbf{v}$ minimipolynomi operaattorin L suhteen, eli polynomi $\mathbf{p}_1$. Näin ollen $\mathbf{q}$ on jaollinen polynomilla $\mathbf{p}_1$.

Samalla tavalla nähdään, että $q(L)(\mathbf{w}) = \mathbf{0}_V$, mistä seuraa, että $\mathbf{q}$ on jaollinen polynomilla $\mathbf{p}_2$. Toisin sanoen on osoitettu, että $\mathbf{q}$ on jaollinen kummallakin polynomilla $\mathbf{p}_1$ ja $\mathbf{p}_2$. Yleisesti ottaen tästä ei välttämättä seuraa, että polynomin $\mathbf{q}$ täytyy olla jaollinen niiden tulolla, mutta erikoistapauksessa, jossa polynomit $\mathbf{p}_1$

ja $\mathbf{p}_2$ ovat *keskenään jaottomia*, tämä pätee. Osoitetaan tämä väite[1]. Koska $\mathbf{q}$ on jaollinen polynomilla $\mathbf{p}_2$, on olemassa polynomi $\mathbf{s}$ siten, että $\mathbf{q} = \mathbf{s}\mathbf{p}_2$. Tästä seuraa, että polynomi $\mathbf{p}_1$ jakaa tulon $\mathbf{s}\mathbf{p}_2$. Lisäksi se on keskenään jaoton tämän tulon toisen tekijän kanssa $\mathbf{p}_2$. Lemmasta 2.46 tällöin seuraa, että $\mathbf{p}_1$ on välttämättä polynomin $\mathbf{s}$ tekijä eli $\mathbf{s} = \mathbf{t}\mathbf{p}_1$ jolakin $\mathbf{t} \in K[\mathbf{X}]$. Toisin sanoen $\mathbf{q} = \mathbf{t}(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2)$, mistä nähdään, että $\mathbf{q}$ on jaollinen polynomilla $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2$. Tämä on se, mitä piti todistaa. Näin ollen vektorin $\mathbf{u}$ minimipolynomi operaattorin L suhteen on $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2$.

7.* Olkoon $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ operaattori, jonka arvot standardikannan alkioissa ovat $L(\mathbf{e}_1) = (1,0,1,0)$, $L(\mathbf{e}_2) = (0,3,0,-1) = L(\mathbf{e}_4)$, $L(\mathbf{e}_3) = (3,0,-1,0)$. Osoita, että $\mathbf{X}^2 - 4$ on vektorin $\mathbf{e}_1$ sekä vektorin $\mathbf{e}_3$ minimipolynomi operaattorin L suhteen, ja $\mathbf{X}(\mathbf{X}-2)$ on vektorin $\mathbf{e}_2$ sekä vektorin $\mathbf{e}_4$ minimipolynomi operaattorin L suhteen. Etsi sen jälkeen tehtävien 4 ja 5 avulla sellaisia vektoreita $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, joille pätee $\mathbf{m}_{L,\mathbf{v}} = \mathbf{X}$ ja $\mathbf{m}_{L,\mathbf{w}} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^2-4)$ (huomaa, että polynomit $\mathbf{X}, \mathbf{X}^2-4$ ovat keskenään jaottomia!). Päättele, että operaattorin L minimipolynomi $\mathbf{m}_L$ on $\mathbf{X}(\mathbf{X}^2-4)$.

Ratkaisu: Aloitetaan vektorin $\mathbf{e}_1$ minimipolynomista. Riittää todistaa, että $(L^2 - 4\,\mathrm{id}_V)(\mathbf{e}_1) = \mathbf{0}_V$ ja mikään nollasta eroava (korkeintaan) ensimmäisen asteen polynomi $\mathbf{p} = a + b\mathbf{X}$ ei toteuda ehtoa $p(L)(\mathbf{e}_1) = (a\,\mathrm{id}_V + bL)(\mathbf{e}_1) = \mathbf{0}_V$. Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$ mielivaltaiset. Tällöin

$$(a\,\mathrm{id}_V + bL)(\mathbf{e}_1) = a\mathbf{e}_1 + b(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) = (a+b)\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_3.$$

Koska jono $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ on vapaa, tämä voi olla nollavektori jos ja vain jos $a + b = b = 0$, eli jos ja vain jos $a = b = 0$. Näin ollen mikään nollasta eroava korkeintaan ensimmäisen asteen polynomi $\mathbf{p}$ ei toteuda ehtoa $p(L)(\mathbf{e}_1) = \mathbf{0}_V$. Laskemalla saadaan (laskuvälivaiheet sivutetaan)

$$L^2(\mathbf{e}_1) = L(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) = \ldots = 4\mathbf{e}_1.$$

Näin ollen $(L^2 - 4\,\mathrm{id}_V)(\mathbf{e}_1) = \mathbf{0}_V$. Tästä ja edellisestä seuraa, että vektorin $\mathbf{e}_1$ minimipolynomin operaattorin L suhteen on oltava polynomi $\mathbf{X}^2 - 4$. Samalla tavalla nähdään (laskut sivutetaan), että $\mathbf{X}^2 - 4$ on myös vektorin $\mathbf{e}_3$ minimipolynomi operaattorin L suhteen kun taas $\mathbf{X}(\mathbf{X}-2)$ on sekä vektorin $\mathbf{e}_2$, että vektorin $\mathbf{e}_4$ minimipolynomi operaattorin L suhteen.

Koska vektorin $\mathbf{e}_2$ minimipolynomin operaattorin L suhteen voidaan esittää tulona $\mathbf{X}(\mathbf{X}-2)$, tehtävän 5 nojalla nähdään, että vektorin $\mathbf{v} = (L - 2\,\mathrm{id}_V)(\mathbf{e}_2)$ minimipolynomi on $\mathbf{X}$. Suoralla laskulla saadaan (yksityiskohdat sivutetaan), että

$$\mathbf{v} = (L - 2\,\mathrm{id}_V)(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4 = (0,1,0,-1).$$

[1] Vertaa analogiseen tulokseen kokonaisluvuille - jos n on jaollinen sekä luvulla k, että luvulla l ja lisäksi tiedetään, että k ja l ovat keskenään jaottomia, niin n on jaollinen niiden tulolla kl. Esimerkiksi jos n on jaollinen sekä kahdella, että kolmella, se on jaollinen myös kuudella. Jos luvut eivät ole keskenään jaottomia, tämä tulos ei välttämättä päde, esimerkiksi 12 on jaollinen 6:llä ja 3:llä, mutta ei ole jaollinen niiden tulolla 18

Nyt vektorin $\mathbf{v}$ minimipolynomi $\mathbf{X}$ ja esimerkiksi vektorin $\mathbf{e}_1$ minimopolynomi $\mathbf{X}^2-4$ ovat keskenään jaottomia, joten tehtävän 5 nojalla on olemassa sellainen $\mathbf{w}$, jonka minimipolynomi operaattorin L suhteen on näiden polynomien tulo eli $\mathbf{X}(\mathbf{X}^2-4)$. Tehtävässä 5 annetaan myös konkrettinen resepti sille, miten sopiva $\mathbf{w}$ voidaan selvittää. Etsitään ensin polynomit $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ joille pätee

$$\mathbf{q}_1\mathbf{X} + \mathbf{q}_2(\mathbf{X}^2 - 4) = 1$$

ja asetetaan sen jälkeen $\mathbf{w} = q_1(L)(\mathbf{e}_1) + q_2(L)(\mathbf{v})$. Polynomit $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ voi löytää esimerkiksi Euclidin algoritmin versiolla polynomeille (kts. tehtävä 3.4, jossa tämä algoritmi sovelletaan kokonaislukuihin, mutta polynomeille se menee samalla tavalla). Toinen tapa on vain "arvata" sopivat polynomit, tässä tapauksessa se ei ole vaikeata koska polynomit $\mathbf{X}$ ja $(\mathbf{X}^2-4)$ ovat suhteellisen yksinkertaisia. Näin saadaan, että esimerkiksi polynomit $\mathbf{q}_1 = \frac{1}{4}\mathbf{X}$ ja $\mathbf{q}_2 = -\frac{1}{4}$ (vakiopolynomi) käyvät eli toteuttavat yhtälön

$$\mathbf{q}_1\mathbf{X} + \mathbf{q}_2(\mathbf{X}^2 - 4) = 1.$$

Näin ollen vektorin

$$\mathbf{w} = q_1(L)(\mathbf{e}_1) + q_2(L)(\mathbf{v}) = \frac{1}{4}(L(\mathbf{e}_1) - \mathbf{v}) = \frac{1}{4}(1, -1, 1, 1)$$

minimipolynomi on $\mathbf{p} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^2-4)$. Osoitetaan vielä, että tämä on itse asiassa operaattorin L minimipolynomi $\mathbf{m}_L$. Standardikannan jokaisen vektorin $\mathbf{e}_i$ minimipolynomi on tämän polynomin tekijä, joten $p(L)(\mathbf{e}_i) = \mathbf{0}_V$, $i = 1, \ldots, 4$. Koska kannan vektorit virittävät koko avaruus $\mathbb{R}^4$, tästä seuraa, että $p(L)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_V$ kaikilla $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$, joten $p(L) = 0$. Minimipolynomin määritelmän nojalla tämä tarkoittaa sitä, että p on jaollinen operaattorin L minimipolynomilla $\mathbf{m}_L$. Toisaalta $\mathbf{p}$ on erään vektorin $\mathbf{w}$ minimipolynomi, joten se on triviaalisti operaattorin L minimipolynomin tekijä. Polynomit $\mathbf{m}_L$ ja $\mathbf{p} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^2-4)$ ovat siis toistensa tekijöitä, lisäksi kumpikin pääpolynomi. Tämä on selvästi mahdollista vain jos ne ovatkin sama polynomi. Näin ollen operaattorin L minimipolynomi $\mathbf{m}_L$ on $\mathbf{X}(\mathbf{X}^2-4)$.

Periaatteessa samalla tavalla kuin tässä tehtävässä voidaan osoittaa seuraava väite. Olkoon L äärellisulotteisen vektoriavaruuden V operaattori. Tällöin on olemassa $\mathbf{w} \in V$ siten, että polynomi $\mathbf{m}_{L,\mathbf{v}}$ on sama kuin operaattorin L minimipolynomi $\mathbf{m}_L$. Käytännössä tämä vektori $\mathbf{w}$ voidaan löytää seuraavalla reseptillä.

- Kiinnitetään avaruudelle V jokin kanta $E = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ ja selvitetään jokaisen tämän kannan vektorin minimipolynomi $\mathbf{p}_i = \mathbf{m}_{L,\mathbf{e}_i}$ (esimerkiksi tehtävässä 1 esitetyn menetelmän avulla).
- Polynomit $\mathbf{p}_i$ eivät välttämättä ole keskenään jaottomia, mutta niiden *pienin yhteinen jaettava* $\mathbf{p}$ voidaan esittää tulona $\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\ldots\mathbf{p}'_n$, missä $\mathbf{p}'_i \mid \mathbf{p}_i$ ja polynomit $\mathbf{p}'_i$ ovat kaikki keskenään jaotomia.
- Tehtävän 4 väitteen avulla saadaan jokaisella $i = 1, \ldots, n$ vektori $\mathbf{v}_i$ jonka minimipolynomi L:n suhteen on $\mathbf{p}'_i$.

– Koska polynomit $\mathbf{p}'_i$ ovat keskenään jaottomia, iteroimalla tehtävän 5 konstruktio saadaan laskettua $\mathbf{w} \in V$ jonka minimipolynomi L:n suhteen on tulo $\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2 \ldots \mathbf{p}'_n$. Tämä tulo on kannan vektorien minimipolynomien pienin yhteinen jaettava, joten helposti nähdään, että tämä tulo kelpaa itse asiassa operaattorin L minimipolynomiksi koko avaruuden suhteen.