Äärellisulotteinen lineaarialgebra, kevät 2015.
Harjoitus 9.
Ratkaisuehdotuksia

1. Olkoon $L\colon K^{\mathbb{N}} \to K^{\mathbb{N}}$ kaavalla

$$L(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

määritelty "siirto-operaattori". Osoita, että skalaarikunnan K jokainen alkio $k \in K$ on tämän operaattorin ominaisarvo. Onko vastaava ominaisarvoaliavaruus V_k äärellisulotteinen? Jos on, niin mikä on sen dimensio?

Ratkaisu: Olkoon $k \in K$ ja olkoon $\mathbf{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$. Koska määritelmän mukaan $L(\mathbf{x})) = (x_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}$, ehto $L(\mathbf{x})) = k\mathbf{x}$ on yhtäpitävä sen kanssa, että $x_{i+1} = kx_i$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Jos tämä ehto on voimassa, induktiolla helposti nähdään, että $x_i = k^i x_0$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Kääntäen jonolle $\mathbf{x} = (k^i x)_{i\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$, missä $x \in K$ on mielivaltainen, selvästi pätee $x_{i+1} = kx_i$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Näin ollen

$$(K^{\mathbb{N}})_k = \{(k^i x)_{i\in\mathbb{N}} \mid x \in K\}.$$

Koska tämän osajoukon vektoreilla on "yksi vapausaaste", eli $x = x_0 \in K$ määrää sen alkion yksikäsitteisesti, näyttää siltä, että $\dim(K^{\mathbb{N}})_k = 1$. Osoitetaan tämä täsmällisesti. Olkoon $\mathbf{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in (K^{\mathbb{N}})_k$. Tällöin $x_i = k^i x_0$, joten $\mathbf{x} = x_0(1, k, k^2, \ldots,)$. Tästä nähdään, että

$$(K^{\mathbb{N}})_k = \mathrm{Span}\{\mathbf{x}(k)\},$$

missä $\mathbf{x}(k) = (1, k, k^2, \ldots,)$. Koska tämä vektori eroaa nollasta kaikilla $k \in K$, aliavaruus $(K^{\mathbb{N}})_k$ on 1-ulotteinen jokaisella $k \in K$. Erityisesti tästä seuraa, että jokainen kunnan K alkio k on operaattorin L ominaisarvo. Vastaava aliavaruus on edellisen nojalla aina äärellisulotteinen, itse asiassa tasan 1-ulotteinen.

2. Neliömatriisia A sanotaan symmetriseksi jos $A^T = A$. Olkoon $A \in M(2 \times 2; \mathbb{R})$ symmetrinen (2×2)-kokoinen matriisi. Osoita, että A on diagonalisoituva. Onko samanlainen tulos voimassa kun $\mathbb{R}$ korvataan kunnalla $\mathbb{C}$? Entäs kun se korvataan kunnalla $\mathbb{Q}$?

Ratkaisu: Symmetrinen (2×2)-kokoinen $\mathbb{R}$-kertoiminen matriisi on matriisi muotoa

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix},$$

missä $a, b, c \in \mathbb{R}$. Matriisin ominaisarvot ovat yhtälön $\det(kI_2 - A) = 0$ ratkaisuja, joka tässä tapauksessa on yhtälö

$$(k - a)(k - c) - b^2 = k^2 - (a + c)k + (ac - b^2) = 0.$$

Tämän toisen asteen yhtälön diskriminantti on

$$D = (a+c)^2 - 4(ac-b^2) = a^2+2ac+c^2-4ac+4b^2 = a^2-2ac+c^2+4b^2 = (a-c)^2+4b^2 \geq 0,$$

joten yhtälöllä on ainakin yksi ratkaisu. Ratkaisut eli ominaisarvot ovat

$$k = \frac{1}{2}(a + c \pm \sqrt{D}).$$

Jos $b \neq 0$, pätee $D = (a - c)^2 + 4b^2 > 0$, jolloin ratkaisuja on tasan kaksi. Tässä tapauksessa matriisilla on siis tasan kaksi eri ominaisarvoa. Koska matriisi A vastaa kuvausta $L_A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kaksiulotteisessa avaruudessa 2, Lemman 3.13. nojalla A on tällöin diagonalisoituva.

Jos taas $b = 0$, matriisi on valmiiksi diagonaalimatriisi

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}.$$

Näin ollen A on joka tapauksessa diagonalisoituva.

Jos matriisin alkiot a, b, c ovat kompleksilukuja, sama ratkaisu toimii, sillä toisen asteen yhtälö ratkaistaan $\mathbb{C}$:ssä samalla tavalla kuin $\mathbb{R}$:ssä. Itse asiassa kompleksilukujen tapauksessa determinantin merkillä ei ole merkitystä, eihän merkin käsite edes määritelty kompleksiluvuille. Tarkemmin sanottuna olkoon yleisesti K mikä tahansa kunta, *jonka karateristika ei ole kaksi* ja tarkstellaan toisen asteen yhtälöä $ax^2 + bx + c = 0_K$, missä $a, b, c \in K$, $a \neq 0_K$. Tällöin kunnassa K tämä yhtälö voidaan ratkaista samalla "neliöksi täydentämisen" tempulla kuin $\mathbb{R}$:ssä:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0_K &\Leftrightarrow \\ x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} &\Leftrightarrow \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &\Leftrightarrow \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}. \end{aligned}$$

Huomaa, että oletusta karakteristikasta tarvitaan, sillä yllä jaetaan 2:llä. Viimeinen välivaihe osoittaa sen, että jos ratkaisu x on olemassa, niin $b^2 - 4ac$ on *neliö* kunnassa K, toisin sanoen on olemassa $y \in K$ siten, että $y^2 = b^2 - 4ac$. Kääntäen, jos yhtälön diskriminantti $D = b^2 - 4ac$ on neliö kunnassa K, yhtälöllä $y^2 == D$ on kunnassa K korkeintaan kaksi ratkaisua - jos y_0 on yksi niistä, niin $y_1 = -y$ on toinen. Tämä johtuu siitä, että yhtälö $y^2 = y_0^2$ on yhtäpitävä yhtälön

$$(y - y_0)(y + y_0) = 0_K$$

kanssa, mistä saadaan nollasäännöllä (joka on aina voimassa kunnassa) $y = \pm y_0$. Näin ollen yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0_K$ on olemassa ratkaisuja K:ssä jos ja vain jos kunnassa K on olemassa y_0 jolle $y_0^2 = b^2 - 4ac$, jolloin ratkaisut ovat

$$x = \frac{-b \pm y_0}{2a}.$$

Ratkaisuja on tasan yksi jos ja vain jos $y_0 = 0$, mikä on mahdollista jos ja vain jos $D = b^2 - 4ac$.

Kunnassa $\mathbb{C}$ jokaisella alkiolla $z \in \mathbb{C}$ on olemassa neliöjuuri. Tämä nähdään esimerkiksi esittämällä z ”polaarikoordinaaristossa” eli muodossa

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

missä $r = |z| \geq 0$ ja α on tason $z = (x, y)$ pisteen ”vaihekulma”.Tämän jälkeen huomataan, että

$$y = \sqrt{r}(\cos(\alpha/2) + i\sin(\alpha/2))$$

on pisteen z neliöjuuri kunnassa $\mathbb{C}$. Tämän tiedon nojalla helposti nähdään, että edellä esitetty todistus sille, että jokainen symmetrinen matriisi $\mathbb{R}$:n yli on diagonalisoituva, toimii yhtä hyvin $\mathbb{C}$:ssä (käy yksityiskohtia läpi).

Kunnassa $\mathbb{Q}$ taas on olemassa alkioita, joilla ei ole neliöjuuria, myös positiivisia sellaisia, kuuluisin esimerkin on 2, jonka neliöjuuri tunnetusti ei ole rationaaliluku. Jos esimerkiksi symmetrista matriisia

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tarkastellaan joukon $M(n \times n; \mathbb{Q})$ matriisina, se ei ole diagonalisoituva ($\mathbb{Q}$:n suhteen). Nimittäin sen karakteristinen yhtälö on $\det(kI_n - A) = (k-2)(k-1) - 1 = k^2 - 3k + 1 = 0$ ja tämän ratkaisut $\mathbb{R}$:ssä $(3 \pm \sqrt{5})/2$ eivät ole rationaalisia, sillä $\sqrt{5}$ ei ole rationaaliluku. Toisin sanoen karakteristisella yhtälöllä ei ole tarkasteltavassa kunnassa ratkaisuja, joten matriisilla ei myöskään ole ominaisarvoja. Erityisesti se ei ole diagonalisoituva.

Huomautus: Luvussa 4 osoitetaan myöhemmin yleisesti sisätuloavaruuksien teorian avulla, että mikä tahansa (mielivaltaisen kokoinen) symmetrinen matriisi $\mathbb{R}$:n yli on diagonalisoituva.

3. Olkoon $L \colon V \to V$ lineaarinen operaattori ja oletetaan, että $\dim V = n \in \mathbb{N}$. Olkoon $f \in V^*$ operaattorin $L^* \colon V^* \to V^*$ ominaisvektori. Osoita, että $\operatorname{Ker} f$ on $(n-1)$-ulotteinen avaruuden V aliavaruus, joka on invariantti operaattorin L suhteen. Lisää pohdittavaa: Osaatko todistaa Proposition 3.22 väite tämän tehtävän tuloksen avulla?

Ratkaisu: Oletusten nojalla $f \neq 0$ ja on olemassa $k \in K$ siten, että

$$f \circ L = L^*(f) = kf.$$

Osoitetaan ensin tämän avulla, että aliavaruus $\operatorname{Ker} f$ on L-invariantti. Oletetaan, että $\mathbf{v} \in \operatorname{Ker} f$. Tällöin $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_V$ ja edellisestä seuraa, että

$$f(L(\mathbf{v})) = kf(\mathbf{v}) = k\mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V.$$

Toisin sanoen $L(\mathbf{v}) \in \operatorname{Ker} f$, mikä osoittaa väitteen. Jäljellä on sen osoittaminen, että $\dim \operatorname{Ker} f = n - 1$. Proposition 2.92 nojalla pätee

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V = n.$$

Lisäksi $\operatorname{Im} f$ on 1-ulotteisen K-avaruuden K aliavaruus, joten nolla- tai yksiulotteinen. Jos $\dim \operatorname{Im} f = 0$, $f = 0$, mikä on ristiriidassa oltusten kanssa (ominaisvektori ei ole koskaan nollavektori). Näin ollen $\dim \operatorname{Im} f = 1$, mistä seuraa edellisen nojalla, että $\dim \operatorname{Ker} f = n - 1$.

Osoitetaan vielä miten tämän tuloksen avulla voidaan osoittaa Proposition 3.22 väite todeksi. Olkoon K algebrallisesti suljettu kunta ja olkoon V epätriviaali äärellisulotteinen K-vektoriavaruus. Tällöin sen duaali V^* on myös epätriviaali äärellisulotteinen K-vektoriavaruus, joten, koska K on algebrallisesti suljettu, jokaisen operaattorin $L\colon V \to V$ duaalikuvauksella $L^*\colon V^* \to V^*$ on olemassa ainakin yksi ominaisarvo $f \in V^*$, $f \neq 0$. Näin ollen, jos $L\colon V \to V$ on epätriviaalin äärellisulotteisen K-vektoriavaruuden operaattori, tehtävän väitteen nojalla avaruudella V on olemassa aliavaruus W_{n-1}, joka on invariantti operaattorin L suhteen ja jolle $\dim W_{n-1} = \dim V - 1$. Soveltamalla sama tulos operaattorin $L|W_{n-1}\colon W_{n-1} \to W_{n-1}$, nähdään, että on olemassa L-invariantti aliavaruus $W_{n-2} \leq W_{n-1} \leq V$ jolle $\dim W_{n-2} = \dim W - 1 = \dim W - 2$. Jatkamalla tällä tavalla induktiivisesti, nähdään, että on olemassa ketju L-invariantteja aliavaruksia

$$W_1 \leq W_2 \leq \ldots \leq W_{n-2} \leq W_{n-1},$$

joille $\dim W_i = i$, $i = 1, \ldots, n-1$. Lemman 3.19 avulla tästä voidaan päätellä Proposition 3.22 väite.

4. Olkoot $L\colon V \to W$, $L'\colon W \to V$ lineaarisia kuvauksia K-vektoriavaruuksien V, W välillä.
a) Olkoon $k \in K$, $k \neq 0_K$. Osoita, että k on operaattorin $LL'\colon W \to W$ ominaisarvo jos ja vain jos k on operaattorin $L'L\colon V \to V$ ominaisarvo.
b) Oletetaan, että V ja W ovat äärellisulotteisia ja lisäksi $\dim V = \dim W$. Osoita, että tällöin kunnan K nolla-alkio on operaattorin $LL'\colon W \to W$ ominaisarvo jos ja vain jos se on operaattorin $L'L\colon V \to V$ ominaisarvo. Osoita vastaesimerkillä, että tämä väite ei välttämättä pidä paikkaansa jos oletus $\dim V = \dim W$ ei ole voimassa.

Ratkaisu: a) Oletetaan, että $k \neq 0_K$ on operaattorin LL' ominaisarvo. Tällöin on olemassa $\mathbf{w} \in W, \mathbf{w} \neq \mathbf{0}_V$ siten, että $LL'(\mathbf{w}) = k\mathbf{w}$. Tästä seuraa, että

$$L'L(L'(\mathbf{w})) = L'(k\mathbf{w}) = kL'\mathbf{w},$$

joten $\mathbf{v} = L'(\mathbf{w})$ toteuttaa ominaisarvoon k liittyvän operaattorin $L'L$ ominaisvektorin määritelmän, paitsi, että pitää vielä tarkistaa, että $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$. Tämä menee vasta-oletuksen kautta: jos $\mathbf{v} = L'(\mathbf{w}) = \mathbf{0}_V$, niin saadaan

$$k\mathbf{w} = LL'(\mathbf{w}) = L(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W.$$

Mutta tämä ei ole mahdollista, sillä oletuksen mukaan $k \neq 0_K$ ja $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}_V$, joten niiden tulo ei myöskään voi olla nolla-vektori (vektoriavaruuden "nollasääntö").

Näin ollen nolla-alkiosta eroava operaattorin $L'L$ ominaisarvo on myös operaattorin LL' ominaisarvo. Käänteinen suunta seuraa tästä symmetrian nojalla.

b) Olkoon $F\colon V \to V$ K-vektoriavaruuden V operaattori. Tällöin kunnan nolla-alkio 0_K on operaattorin F ominaisarvo jos ja vain jos on olemassa $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$ siten, että $F(\mathbf{v}) = 0_K\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$, toisin sanoen jos ja vain jos jokin nollasta eroava vektori kuvautuu nolla-vektoriksi. Tämä on tunnetutusti yhtäpitävä sen kanssa, että F on injektio.

Oletetaan, että $\dim V = \dim W$ ja 0_K on operaattorin LL' ominaisarvo. Edellisen mukaan tämä tarkoittaa sitä, että operaattori $LL'\colon W \to W$ ei ole injektio. Koska W on äärellisulotteinen, tämä on tunnetusti yhtäpitävä sen kanssa, että operaattori LL' ei ole bijektio (Seuraus 2.94). Tästä puolestaan seuraa, että ainakin toinen kuvauksista L, L' ei ole bijektio, sillä jos kumpikin olisi bijektio, niiden yhdiste olisi myös bijektio. Oletetaan, että L ei ole bijektio. Tällöin (Seuraus 2.94) se ei ole injektio, joten on olemassa $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$ siten, että $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_V$. Tällöin myös $(L'L)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_V$, joten $L'L$ ei ole injektio. Oletetaan, että L' ei ole bijektio. Tällöin L' ei ole surjektio (Seuraus 2.94), joten myös $L'L$ ei ole surjektio (sillä selvästi $\operatorname{Im} L'L \subset \operatorname{Im} L'$). Seurauksen 2.94 nojalla tästä seuraa, että $L'L$ ei ole injektio. Joka tapauksessa siis $L'L$ ei ole injektio. Yllä on osoitettu, että nolla-alkio on tällöin operaattorin $L'L$ ominaisarvo. On osoitettu, että nolla-alkio on operaattorin $L'L$ ominaisarvo jos se on operaatorin LL' ominaisarvo. Käänteinen suunta on symmetrinen.

Kun $\dim V \neq \dim W$ on mahdollista, että nolla-alkio on operaattorin $L'L$ ominaisarvo, mutta ei ole operaattorin LL' ominaisarvo. Esimerkiksi olkoon $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$, $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $L(x, y) = x$, $L'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $L'(x) = (x, 0)$. Tällöin $L'L(x, y) = (x, 0)$, joten $L'L$ ei ole injektio, sillä esimerkiksi $L'L(0, 1) = (0, 0)$, joten 0 on operaattorin $L'L$ ominaisarvo. Sen sijaan $LL'(x) = x$, joten LL' on identtinen kuvaus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, erityisesti bijektio, eikä 0 ole sen ominaisarvo. Samanlainen esimerkki toimii minkä tahansa kunnan K yli, jos $\mathbb{R}$ korvataan ylläs kunnalla K.

5. Olkoon $L\colon M(n \times n; K) \to M(n \times n; K)$, $L(X) = X^T$. Osoita, että 1_K ja (-1_K) ovat operaattorin L ainoat ominaisarvot. Mitkä ovat näihin ominaisarvoihin liittyvät ominaisarvoaliavaruudet? Onko L diagonalisoituva?

Ratkaisu: Oletetaan, että $n \geq 2$ eli ei olla surkastuneessa tapauksessa $n = 0$ eikä tapauksessa $n = 1$, jolloin L on identtinen operaattori (jonka ainoa ominaisarvo on kunnan ykkönen).

Olkoon $k \in K$ operaattorin L ominaisarvo. Olkoon $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ $(n \times n)$-

kokoinen K-kertoiminen matriisi, jolle pätee

$$A^T = L(A) = kA, A \neq 0.$$

Tällöin kaikilla $i, j = 1, \ldots, n$ pätee $a_{ji} = ka_{ij}$. Tästä seuraa, että kaikilla $i, j = 1, \ldots, n$ pätee

$$a_{ij} = ka_{ji} = k^2 a_{ij}.$$

Koska $A \neq 0$, on olemassa $i, j = 1, \ldots, n$ siten, että $a_{ij} \neq 0_K$. Tästä seuraa jakamalla a_{ij}, että $k^2 = 1$ eli $k^2 - 1_K = 0_K$. Koska kunnassa pätee $k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$ ja lisäksi kunnassa on voimassa nolla-sääntö, tästä seuraa, että $k = \pm 1_K$. Näin ollen operaattorilla ei ainakaan voi olla muita ominaisarvoja paitsi $k = \pm 1$. Vastaavat ominaisarvoaliavaruudet ovat aliavaruudet

$$V = \{A \in M(n \times n; K) \mid A = A^T\},$$

$$U = \{A \in M(n \times n; K) \mid A = -A^T\},$$

jotka ovat tuttuja harjoituksesta 8.6. Kyseenomaisessa harjoituksessa on osoitettu, että kunnan karakteristikan olleessaan kakkosesta eroava $U \oplus V = M(n \times n; K)$. Näin ollen kun kunnan karakteristika ei ole kaksi, operaattori on diagonalisoituva. Kun taas kunnan karakteristika on kaksi (ja $n \geq 2$) pätee $U = V \neq M(n \times n; K)$, joten silloin operaattori ei ole diagonalisoituva.

6. Osoita, että jokainen algebrallisesti suljettu kunta on ääretön. (HUOM. alg. suljetun kunnan määritelmä Luvun 3 sivulla 18 on korjattu materiaalin päivitetyssä versiossa 12.3. Edellisen version määritelmä ei ollut oikea).

   Ratkaisu: Olkoon $K = \{x_1, \ldots, x_n\}$ äärellinen kunta. Tällöin kuvaus $p \colon K \to K$, $p(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_n) + 1$ on polynomifunktio, joka on esitetettävissä muodossa, jonka aste on $n \geq 2$. Koska $p(x) = 1$ kaikilla $x \in K$, funktiolla p ei kuitenkaan ole juuria kunnassa K. Väite seuraa.

   Jos käyttää vaihtoehtoisesti algebrallisesti suljetun kunnan määritelmää, joka perustuu abstrakteihin algebrallisiin polynomeihin (Luku 3, sivu 46), polynomiksi $\mathbf{p} \in K[\mathbf{X}]$ on otettava agebrallinen polynomi $\mathbf{p} = (\mathbf{X} - x_1) \ldots (\mathbf{X} - x_n) + 1$.

7.* a) Olkoon

$$P_m = \{p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ on polynomi, jonka aste on korkeintaan } m\}$$

ja olkoon $\mathcal{D} \colon P_m \to P_m$, $\mathcal{D}(p) = p'$ derivaatta-operaattori. Esimerkissä 3.2. todettiin, että P_n on invariantti operaatorin $\mathcal{D}$ suhteen kaikilla $0 \leq n \leq m$. Osoita kääntäen, että avaruudella P_m ei ole muita epätriviaaleja $\mathcal{D}$-invariantteja aliavaruuksia. (Vihje: osoita, että invariantti aliavaruus W sisältää l-asteisia polynomeja f_l kaikilla $l = 0, \ldots, n$, missä n on sopiva luku. Osoita tämän avulla, että $W = P_n$).

Ratkaisu: Olkoon $W \leq P_m$ invariantti operaattorin $\mathcal{D}$ suhteen. Oletetaan, että W ei ole triviaali aliavaruus $\mathbf{0}_V$. Valitaan tällöin aliavaruudessa W sellainen alkio p, jonka aste polynomina on suurin (kaikista W:n alkioista). Oletetaan, että $\deg p = n \leq m$ ja merkitään $p = p_n$. Tällöin polynomin p_n määritelmän nojalla $W \subset P_n$. Osoitetaan, että itse asiassa $W = P_n$. Koska W on invariantti derivaatta-operaattorin suhteen, $p_{n-1} = \mathcal{D}(p_n) \in W$. Tässä p_{n-1} on polynomi, jonka aste on tasan $(n-1)$. Ottamalla polynomin p_{n-1} derivaatta, saadaan p_{n-2}-asteinen polynomi, joka on aliavaruuden W alkio jne. Jatkamalla tällä tavalla päädytään siihen, että jokaisella $0 \leq l \leq n$ aliavaruudesta W löytyy alkio p_l, jonka aste on tasan l. Osoitetaan, että tällöin on pakko olla $P_n \subset W$. Tarkemmin sanottuna osoitetaan, että

$$\operatorname{Span}(p_0, \ldots, p_n) = P_n,$$

mikä selvästi riittää. Koska $p_l \in P_n$ kaikilla $0 \leq l \leq n$, triviaalisti $\operatorname{Span}(p_0, \ldots, p_n) \subset P_n$. Koska $\dim P_n = n+1$ (harj. 6.2), riittää vielä näyttää, että $\dim \operatorname{Span}(p_0, \ldots, p_n) = n+1$. Tämän osoittamiseksi taas riittää näyttää, että tämän aliavaruuden virittävä on $(p_0, \ldots, p_n)$ on vapaa. Oletetaan siis, että polynomien muodostama jono $(p_0, \ldots, p_n)$ on vapaa, kun $\deg p_l = l$, $0 \leq l \leq n$. Osoitetaan tämä induktiolla n:n suhteen. Kun $n = 0$, jonossa on yksi 0-asteinen polynomi, eli vakiopolynomi, joka ei ole nolla-polynomi (nolla-polynomin aste ei ole nolla, vaan miinus ääretön). Tällainen jono on tunnetusti vapaa. Oletetaan, että väite on tosi luvulle $(n-1)$ ja olkoon $(p_0, \ldots, p_n)$ jono, jossa $\deg p_l = l$, $0 \leq l \leq n$. Oletetaan, että $r_0, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ ovat sellaisia, että

$$r_0 p_0 + r_1 p_1 + \ldots + r_{n-1} p_{n-1} + r_n p_n = 0.$$

Olkoon a polynmomin p_n johtava kerroin, jolloin $p_n = a x^n + q$, missä q on polynomi, jonka aste on korkeintaan $(n-1)$. Tällöin voidaan kirjoittaa

$$(r_0 p_0 + r_1 p_1 + \ldots + r_{n-1} p_{n-1} + r_n q) + r_n a x^n = 0,$$

missä polynomin $r_0 p_0 + r_1 p_1 + \ldots + r_{n-1} p_{n-1} + r_n q$ aste on korkeintaan $(n-1)$. Koska $\mathbb{R}$-asteisen polynomin kertoimet ovat yksikäsitteisesti määrättyjä (harj. 6.2.), tästä seuraa, että $r_n a = 0$. Koska $a \neq 0$ (johtavan kertoimen määritelmän nojalla), tästä saadaan $r_n = 0$. Näin ollen

$$r_0 p_0 + r_1 p_1 + \ldots + r_{n-1} p_{n-1} = 0.$$

Induktio-oletuksen nojalla $r_0 = r_1 = \ldots = r_{n-1}$. On osoitettu, että jono $(p_0, \ldots, p_n)$ on vapaa.

8.* Olkoon $L\colon V \to V$ äärellisulotteisen K-vektoriavaruuden V operaattori. Oletetaan, että $k \in K$ on sellainen, että k^2 on operaattorin L^2 ominaisarvo. Osoita, että ainakin toinen alkioista k ja $(-k)$ on operaattorin L ominaisarvo.

Ratkaisu: Koska $L^2 - k^2 \operatorname{id}_V = (L - k \operatorname{id})(L + k \operatorname{id})$ (tarkista ja mieti!), Proposition 2.144 nojalla

$$0_K = \det(L^2 - k^2 \operatorname{id}_V) = \det(L - k \operatorname{id}) \det(L + k \operatorname{id})$$

Koska $\det(L - k\,\mathrm{id}), \det(L + k\,\mathrm{id}) \in K$, kunnan nolla-säännöstä seuraa, että $\det(L - k\,\mathrm{id}) = 0$ tai $\det(L + k\,\mathrm{id}) = 0_K$. Edellisestä tapauksessa k on ominaisarvo, jälkimmäisessä $(-k)$ on ominaisarvo.