Äärellisulotteinen lineaarialgebra, kevät 2015.
Harjoitus 8.
Ratkaisuehdotuksia.

1. Olkoon $L\colon V \to W$ äärellisulotteisten K-vektoriavaruuksien V, W välinen lineaarinen kuvaus.
a) Olkoon U mikä tahansa aliavaruuden $\operatorname{Ker} L$ komplementti avaruudessa V. Osoita, että tällöin rajoittumakuvaus $L|U\colon U \to \operatorname{Im} L$ on isomorfismi.
b) Osoita, että on olemassa avaruuden V kanta E ja avaruuden W kanta E' siten, että $[L]_{E',E}$ on lohkomatriisi muotoa

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

missä I_m on $(m \times m)$-kokoinen yksikkömatriisi jollakin $m \in \mathbb{N}$.

Ratkaisu: a) Olkoon $L' = L|U$ kuvauksena $U \to \operatorname{Im} L$ ajateltuna. Osoitetaan, että L' on injektio. Olkoon $\mathbf{u} \in U$ siten, että $L'(\mathbf{u}) = L(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_W$. Tällöin $\mathbf{u} \in \operatorname{Ker} L$. Näin ollen $\mathbf{u} \in U \cap \operatorname{Ker} L$. Koska $\operatorname{Ker} L$ ja U muodostavat suoran summan (komplementin määritelmän nojalla), Seurauksen 2.156 nojalla kuitenkin pätee $U \cap \operatorname{Ker} L = \{\mathbf{0}_V\}$. Näin ollen $\mathbf{u} = \mathbf{0}_V$. On osoitettu, että kuvauksen L' ydin on triviaali, joten L' on injektio (Propositio 2.55).

Osoitetaan seuraavaksi, että L' on surjektio (kuvauksena $U \to \operatorname{Im} L$) eli $\operatorname{Im} L' = \operatorname{Im} L$. Sisältyvyys $\operatorname{Im} L' \subset \operatorname{Im} L$ on selvä. Kääntäen olkoon $\mathbf{w} \in \operatorname{Im} L$. Tällöin on olemassa $\mathbf{v} \in V$ siten, että $L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Koska $U + \operatorname{Ker} L = V$ (komplementin määritelmän nojalla), on olemassa $\mathbf{u} \in U$, $\mathbf{z} \in \operatorname{Ker} L$ siten, että

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{z}.$$

Tästä seuraa, että

$$\mathbf{w} = L(\mathbf{v}) = L(\mathbf{u} + \mathbf{z}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{z}) = L(\mathbf{u}) = L'(\mathbf{u}).$$

Näin ollen $\mathbf{w} \in \operatorname{Im} L'$ ja ollaan valmiit.

Huomautus: a)-kohdassa avaruuksien V, W äärellisulotteisuutta ei tarvita, kuten todistuksesta näkyy.

b) Proposition 2.159 nojalla avaruuden V aliavaruudella $\operatorname{Ker} L$ on olemassa avaruudessa V komplementti U. Tällöin siis summa $U + \operatorname{Ker} L$ on suora ja $U \oplus \operatorname{Ker} L = V$.

Valitaan avaruuksille U ja $\operatorname{Ker} L$ kummallekin äärellinen kanta, tämä on mahdollista, sillä kumpikin avaruus on äärellisulotteinen (äärellisulotteisen avaruuden V aliavaruuksina). Olkoon siis $E_1 = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ avaruuden U kanta ja olkoon

$E_2 = (\mathbf{v}_{m+1}, \ldots, \mathbf{v}_n)$ avaruuden $\operatorname{Ker} L$ kanta. Osoitetaan, että näiden kantojen "yhdiste" $E = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m+1}, \ldots, \mathbf{v}_n)$ on avaruuden V kanta. Koska $U + \operatorname{Ker} L = V$, jokaisella $\mathbf{v} \in V$ on olemassa esitys

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{z},$$

missä $\mathbf{u} \in U$, $\mathbf{z} \in \operatorname{Ker} L$. Koska E_1 on avaruuden U kanta ja E_2 on avaruuden $\operatorname{Ker} L$ kanta, on olemassa skalaarit $k_1, \ldots, k_m, k_{m+1}, \ldots, k_n \in K$ siten, että

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{m} k_i \mathbf{v}_i, \mathbf{z} = \sum_{i=m+1}^{n} k_i \mathbf{v}_i.$$

Tästä seuraa, että

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{v}_i.$$

On osoitettu, että jono E virittää avaruuden V. Seuraavaksi näytetään, että se on vapaa. Oletetaan, että

$$\sum_{i=1}^{m} k_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=m+1}^{n} k_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}_V$$

joillakin skalaareilla $k_1, \ldots, k_n \in K$. Siirtämällä termejä toiselle puolelle, tämä yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\sum_{i=1}^{m} k_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=m+1}^{n} (-k_i) \mathbf{v}_i.$$

Tässä yhtälön vasemmalla puolella on eräs aliavaruuden U alkio, oikealla puolella taas eräs aliavaruuden $\operatorname{Ker} L$ alkio. Koska nämä alkiot ovat samoja, kyseessä on leikkauksen $U \cap \operatorname{Ker} L$ alkio. Koska summa $U + \operatorname{Ker} L$ on suora, aliavaruuksien U ja $\operatorname{Ker} L$ leikkaus $U \cap \operatorname{Ker} L$ on triviaali (Seuraus 2.156). Näin ollen

$$\sum_{i=1}^{m} k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}_V = \sum_{i=m+1}^{n} (-k_i) \mathbf{v}_i.$$

Koska sekä E_1, että E_2 ovat vapaita, tästä saadaan $k_1 = \ldots = k_m = k_{m+1} = \ldots = k_n = 0_K$. Näin ollen E on vapaa.

Olemme osoittaneet, että E on avaruuden V kanta.

Koska a)-kohdan nojalla $L|U \colon U \to \operatorname{Im} L$ on isomorfismi, L kuvaa aliavaruuden U kannan $E_1 = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)$ erääksi avaruuden $\operatorname{Im} L$ kannaksi $(L(\mathbf{v}_1), \ldots, L(\mathbf{v}_m))$ (on selvä, että isomorfismi kuvaa kannan kannaksi). Koska $\operatorname{Im} L \leq W$, tämä jono voidaan täydentää avaruuden W kannaksi $E' = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{w}_{m+1}, \ldots, \mathbf{m})$, missä $L(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ kaikilla $i = 1, \ldots, m$. Tarkastellaan kuvauksen L matriisia kantojen E ja E' suhteen. Koska

$$L\mathbf{v}_i = \begin{cases} \mathbf{w}_i, & \text{kun } i \leq m, \\ \mathbf{0}_W, & \text{kun } i > m \end{cases},$$

matriisi $[L]_{E',E}$ on lohkomatriisi muotoa

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

missä I_m on $(m \times m)$-kokoinen yksikkömatriisi, $m = \dim U = \dim \operatorname{Im} L$. Surkastuneet erikoistapaukset

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix} \text{ tai}$$

$$\begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}$$

ovat myös mahdollisia, ensimmäinen toteutuu kun $\operatorname{Im} L = W$ eli L on surjektio, toinen taas toteutuu kun $\operatorname{Ker} L$ on triviaali, eli kun L on injektio.

Huomautus: Tehtävän tulos antaa osittaisen syyn sille, miksi Luvussa 3 tutkimme ainoastaan lineaaristen operaattoreiden $L\colon V \to V$ matriisiesityksiä muotoa $[L]_E$ eli saman kannan yli sekä lähtö- että maalipuolella. Nimittäin tämän tehtävän mukaan ongelma muuttuu ”triviaaliksi” jos sallitaan eri kantoja lähtö-ja maalipuolelle - tällöin **jokainen** operaattori voidaan aina esittää muodossa

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ja tämä esitys on niin ”säännöllinen” ja ”yksinkertainen” kuin vain voi kuvitella.

Toinen syy on siinä, että hyvin monessa tilanteessa esityksestä $[L]_{E',E}$ ei ole hyötyä - tarvitsemme nimenomaan informaatiota kaikista mahdollisista esityksestä muotoa $[L]_E$.

2. Osoita todeksi Propositio 2.160: Olkoot $W_1, \ldots, W_n$ vektoriavaruuden V aliavaruuksia siten, että $V = \sum_{i=1}^n W_i$. Oletetaan, että W_i on äärellisulotteinen kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Tällöin myös V on äärellisulotteinen ja

$$\dim V \leq \sum_{i=1}^{n} \dim W_i.$$

Lisäksi tämä epäyhtälö pätee yhtälönä, eli

$$\dim V = \sum_{i=1}^{n} \dim W_i$$

jos ja vain jos summa $\sum_{i=1}^n W_i$ on suora.

Ratkaisu: Valitaan jokaisella $i = 1, \ldots, n$ äärellinen joukko A_i siten, että $W_i = \operatorname{Span}(A_i)$. Tällöin, koska $V = \sum_{i=1}^n W_i$, helposti nähdään, että

$$V = \operatorname{Span}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big).$$

Koska $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ on äärellisten joukkojen äärellisenä yhdisteenä äärellinen, tästä seuraa, että V on äärellisulotteinen. Jos yllä valitaan A_i:ksi avaruuden W_i *kanta*, nähdään, että äärellisulotteisellä avaruudella V on virittävä joukko $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, jonka koolle pätee

$$|A| \leq \sum_{i=1}^n |A_i| = \sum_{i=1}^n \dim W_i.$$

Seurauksesta 2.49 tällöin seuraa, että

$$\dim V \leq \sum_{i=1}^n \dim W_i.$$

Seuraavaksi osoitetaan, että yhtälö

$$\dim V = \sum_{i=1}^n \dim W_i$$

pätee jos ja vain jos summa $\sum_{i=1}^n W_i$ on suora.

Aloitetaan tapauksesta $n = 2$ (tapaus $n = 1$ on triviaali). Harjoituksen 4.3. nojalla pätee

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

Tästä yhtälöstä nähdään, että yhtälö

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$$

pätee jos ja vain jos $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$ eli jos ja vain jos $W_1 \cap W_2$ on triviaali avaruus. Tämä on kuitenkin Seurauksen 2.156 nojalla yhtäpitävä sen kanssa, että summa $W_1 + W_2$ on suora. Väite on osoitettu tapauksessa $n = 2$.

Oletetaan, että väite on tosi tapauksessa $(n-1) \geq 2$ ja osoitetaan, että se on tosi luvulle n. Olkoot siis $W_1, \ldots, W_n$ äärellisulotteisen vektoriavaruuden V aliavaruuksia siten, että $V = \sum_{i=1}^n W_i$. On osoitettava, että yhtälö $\dim V = \sum_{i=1}^n \dim W_i$ pätee jos ja vain jos summa $\sum_{i=1}^n W_i$ on suora. Oletetaan, että summa $\sum_{i=1}^n W_i$ on suora. Olkoon $W' = \sum_{i=1}^{n-1} W_i$. Tällöin selvästi $W' + W_n = V$. Lisäksi Lemmasta 2.155 voidaan päätellä, että $W' \cap W_n = \{\mathbf{0}_V\}$. Näin ollen harjoituksen 4.3 tuloksen avulla saadaan

$$\dim V = \dim W' + \dim W_n - \dim(W' \cap W_n) = \dim W' + \dim W_n.$$

Lemmasta 2.155 (tai suoran summan määritelmästä) helposti seuraa, että aliavaruuksien $W_1, \ldots, W_{n-1}$ summa on suora. Näin ollen induktio-oletuksen nojalla

$$\dim W' = \sum_{i=1}^{n-1} \dim W_i.$$

Yhdistämällä tuloksia saadaan

$$\dim V = \dim W' + \dim W_n = \sum_{i=1}^{n-1} \dim W_i + \dim W_n = \sum_{i=1}^n \dim W_i,$$

mitä pitikin osoittaa.

Oletetaan kääntäen, että summa $\sum_{i=1}^{n} W_i$ ei ole suora. Tällöin Lemman 2.155 nojalla on olemassa $j = 1, \ldots, n$ siten, että $U = (\sum_{i \neq j} W_i) \cap W_j$ ei ole triviaali aliavaruus, joten $\dim U \geq 1$. Harjotuksen 4.3 nojalla saadaan tällöin

$$\dim V = \dim(\sum_{i \neq j} W_i) + \dim W_j - \dim(U) < \dim(\sum_{i \neq j} W_i) + \dim W_j.$$

Tehtävän ensimmäisen osan nojalla

$$\dim(\sum_{i \neq j} W_i) \leq \sum_{i \neq j} \dim W_i.$$

Näin ollen yhdistämällä tuloksia saadaan, että

$$\dim V < \sum_{i \neq j} \dim W_i + \dim W_j = \sum_{i=1}^{n} \dim W_i.$$

Toisin sanoen yhtälö $\dim V = \sum_{i=1}^{n} \dim W_i$ ei päde, kun summa ei ole suora.

3. Lineaarista operaattoria $L \colon V \to V$, jolle pätee $L^2 = L$, sanotaan *projektioksi.* Olkoon $L \colon V \to V$ projektio. Osoita, että
a) $\operatorname{Im} L = \{\mathbf{v} \in V \mid L(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\}$.
b) Aliavaruudet $\operatorname{Im} L$ ja $\operatorname{Ker} L$ muodostavat suoran summan ja

$$\operatorname{Im} L \oplus \operatorname{Ker} L = V.$$

Huom., tässä tehtävässä ei oleteta, että vektoriavaruus V olisi äärellisulotteinen.

Ratkaisu: a) Oletetaan, että $L^2 = L$ ja olkoon $\mathbf{v} \in \operatorname{Im} L$. Tällöin on olemassa $\mathbf{w} \in V$ siten, että $\mathbf{v} = L(\mathbf{w})$. Tästä voidaan päätellä, että

$$L(\mathbf{v}) = L(L(\mathbf{w})) = L^2(\mathbf{w}) = L(\mathbf{w}) = \mathbf{v}.$$

Toisin sanoen

$$\mathbf{v} \in \{\mathbf{v} \in V \mid L(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\}.$$

Kääntäen, on selvä, että jos $L(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, niin $\mathbf{v} \in \operatorname{Im} L$.

b) Osoitetaan seuraavaksi, että $\operatorname{Im} L \oplus \operatorname{Ker} L = V$, eli että summan arvo on koko avaruus V. Olkoon $\mathbf{v} \in V$, tutkitaan onko olemassa sellaisia $\mathbf{w} \in \operatorname{Im} L$, $\mathbf{u} \in \operatorname{Ker} L$ joille pätee

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u}.$$

Jos tällaisia vektoreita on olemassa, a)-kohdan nojalla erityisesti pätee $L(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$, lisäksi ytimen määritelmän mukaan triviaalisti pätee $L(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_V$. Näin ollen ehdosta $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u}$ seuraa tällöin, että

$$L(\mathbf{v}) = L(\mathbf{w}) + L(\mathbf{u}) = \mathbf{w} + \mathbf{0}_V = \mathbf{w}.$$

Näin ollen $\mathbf{w} = L(\mathbf{v})$ on yksikäsitteisesti määrätty. Lisäksi tällöin

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} - L(\mathbf{v})$$

on myös yksikäsitteisesti määrätty. Kääntäen määritellään $\mathbf{w} = L(\mathbf{v})$, $\mathbf{u} = \mathbf{v} - L(\mathbf{v})$. Tällöin selvästi $\mathbf{w} \in \operatorname{Im} L$ ja $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u}$. Lisäksi

$$L(\mathbf{u}) = L(\mathbf{v} - L(\mathbf{v})) = L(\mathbf{v}) - L^2(\mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_V,$$

koska $L^2 = L$. Toisin sanoen $\mathbf{u} \in \operatorname{Ker} L$.

On osoitettu, että jokainen avaruuden V vektori $\mathbf{v}$ voidaan esittää summana $\mathbf{w} + \mathbf{u}$, missä $\mathbf{w} \in \operatorname{Im} L$, $\mathbf{u} \in \operatorname{Ker} L$ ja lisäksi *yksikäsitteisellä tavalla.* Tästä seuraa, että summa $\operatorname{Im} L + \operatorname{Ker} L$ on suora ja sen arvo on koko avaruus V.

4. Olkoon $L\colon V \to V$ lineaarinen kuvaus. Oletetaan, että vektoriavaruus V on äärellisulotteinen. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.

   (1) L on projektio edellisen tehtävän määritelmän mielessä, eli $L^2 = L$.

   (2) $\mathrm{id}_V - L$ on projektio.

   (3) On olemassa avaruuden V aliavaruudet W ja U siten, että $V = W \oplus U$ ja L on tähän esitykseen liittyvä projektiokuvaus $\mathrm{pr}\colon W \oplus U \to V$, $\mathrm{pr}(\mathbf{w} + \mathbf{u}) = \mathbf{w}$ kaikilla $\mathbf{w} \in W$, $\mathbf{u} \in U$.

   (4) Avaruudella V on kanta E siten, että $[L]_E$ on lohkomatriisi muotoa

   $$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

   missä I_m on $(m \times m)$-kokoinen yksikkömatriisi jollakin $m \in \mathbb{N}$.

   Vertaa tulos tehtävän 1 tulokseen. Mikä on tarinan opetus?

Ratkaisu: Edellisen tehtävän määritelmän nojalla kuvaus $(\mathrm{id}_V - L)$ on projektio jos ja vain jos

$$\mathrm{id} - L = (\mathrm{id} - L)^2 = (\mathrm{id} - L)(\mathrm{id} - L) = \mathrm{id} - L - L + L^2.$$

Supistamalla $\mathrm{id} - L$ molemmalta puolelta nähdään, että tämä yhtälö on yhtäpitävä yhtälön $-L + L^2 = 0$ kanssa, mikä on taas yhtäpitävä yhtälön $L^2 = L$ kanssa. Näin ollen $(\mathrm{id}_V - L)$ on projektio jos ja vain L on projektio. On osoitettu, että ehdot (1) ja (2) ovat yhtäpitäviä.

Oletetaan (1). Tällöin edellisen tehtävän mukaan summa $\operatorname{Im} L \oplus \operatorname{Ker} L$ on suora ja sen arvo on koko avaruus V. Lisäksi tällöin kaikilla $\mathbf{w} \in \operatorname{Im} L$, $\mathbf{u} \in \operatorname{Ker} L$ pätee

$$L(\mathbf{w} + \mathbf{u}) = L(\mathbf{w}) + L(\mathbf{u}) = L(\mathbf{w}) = \mathbf{w},$$

missä viimeinen välivaihe seuraa myös edellisestä tehtävästä. Näin ollen (1) implikoi (3).

Oletetaan (3), osoitetaan (1). Oletetaan, että $V = W \oplus U$ ja L on tähän esitykseen liittyvä projektiokuvaus $\mathrm{pr}\colon W \oplus U \to V$, $\mathrm{pr}(\mathbf{w} + \mathbf{u}) = \mathbf{w}$ kaikilla $\mathbf{w} \in W$, $\mathbf{u} \in U$. Olkoon $\mathbf{v} \in V$, tällöin on olemassa (yksikäsitteiset) $\mathbf{w} \in W$, $\mathbf{u} \in U$, siten, että $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u}$. Kuvauksen L määritelmän mukaan tällöin $L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Kuitenkin yhtä hyvin kuvauksen L määritelmän mukaan pätee

$$L(\mathbf{w}) = \mathbf{w},$$

sillä $\mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{0}_V$ on (yksikäsitteinen) vektorin $\mathbf{w}$ esitys alivaruuksien W ja U vektorien summana. Näin ollen

$$L^2(\mathbf{v}) = L(L(\mathbf{w}) = L(\mathbf{w}) = \mathbf{w} = L(\mathbf{v}).$$

Tämä pätee kaikilla $\mathbf{v} \in V$, joten $L^2 = L$.

Huomautus: Yllä emme käyttäneet avaruuden V äärellisulotteisuutta ollenkaan. Näin ollen ehdot (1)-(3) ovat yhtäpitäviä kaikille operaattoreilla $L\colon V \to V$, missä V on mielivaltainen vektoriavaruus. Kuitenkin ehto (4) ei ole määritelty kun avaruus ei ole äärellisulotteinen, sillä kuvauksen matriisi on määritelty (ainakin tällä kurssilla) vain äärellisulotteisessa tapauksessa.

Osoitetaan vielä, että ehto (4) on yhtäpitävä muiden ehtojen kanssa (joita osoitettiin yhtäpitäviksi yllä). Oletetaan, että ehto (3) on voimassa eli on olemassa aliavaruudet $W, U \leq V$ siten, että $V = W \oplus U$ ja L on tähän esitykseen liittyvä projektiokuvaus $\mathrm{pr}\colon W \oplus U \to V$, $\mathrm{pr}(\mathbf{w} + \mathbf{u}) = \mathbf{w}$ kaikilla $\mathbf{w} \in W$, $\mathbf{u} \in U$. Valitaan kanta $E_1 = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ aliavaruudelle W ja vastaavasti kanta $E_2 = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_l)$ aliavaruudelle U. Koska $W \oplus U = V$, kuten tehtävän 1 ratkaisussa helposti nähdään, että näiden kantojen "yhdiste" $E = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_l)$ on avaruuden V kanta. Kuvauksen L määritelmästä helposti seuraa, että $L(\mathbf{w}_i) = \mathbf{w}_i$ kaikilla $i = 1, \dots, n$ ja $L(\mathbf{u}_j) = \mathbf{0}_V$ kaikilla $j = 1, \dots, n$. Näin ollen matriisi $[L]_E = [L]_{E,E}$ on lohkomatriisi muotoa

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

missä I_m on $(m \times m)$-kokoinen yksikkömatriisi.

Kääntäen oletetaan, että

$$[L]_E = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

missä I_m on $(m \times m)$-kokoinen yksikkömatriisi ja E jokin avaruuden V kanta. Koska vastaavuus matriisien ja lineaaristen kuvausten välillä säilyttää kertolaskuja (tarkemmin - Proposition 2.76 nojalla), pätee

$$[L^2]_E = [L]_E^2.$$

Kuitenkin matriisille muotoa

$$A = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

helposti nähdään olevan voimassa $A^2 = A$. Näin ollen

$$[L^2]_E = [L]_E^2 = [L]_E.$$

Koska vastaavuus $\Phi_E \colon L(V) \to M(n \times n; K)$ on bijektiivinen, tästä seuraa, että $L^2 = L$ eli ehto (1).

Tarinan opetus: Tehtävän 1 mukaan *jokainen* lineaarinen kuvaus $L \colon V \to W$, erityisesti mikä tahansa lineaarinen opetus $L \colon V \to V$ voidaan esittää muotoa

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olevana lohkomatriisina, *jos maali-ja lähtöpuolen kantoja saa valita vapaasti.* Jos kuitenkin tarkastellaan lineaarisia operaattoreita $L \colon V \to V$ ja sallitaan vain esityksiä $[L]_E$ eli sama kanta lähtö- ja maalipuolella, niin tällainen esitys voi olla muotoa

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

jos ja vain jos L on projektiokuvaus, eli toteuttaa lisäehdon $L^2 = L$. On selvä, että tämä on hyvin rajoittava ehto - "suurin osa" lineaarisista operaattoreista eivät toteuda tätä ehtoa.

5. Olkoot W, W seuraavia K-vektoriavaruuden K^n aliavaruuksia,

$$W = \{(k_1, \ldots, k_n) \mid k_1 + \ldots + k_n = 0\},$$

$$U = \{(k_1, \ldots, k_n) \mid k_1 = \ldots = k_n\}.$$

Oletetaan, että kunnan K karakteristika on nolla. Osoita, että summa $W + U$ on suora ja että $W \oplus U = K^n$ suoraan määritelmästä lähtien. Anna jokaiselle vektorille $\mathbf{v} \in K^n$ esitys muodossa

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u},$$

missä $\mathbf{w} \in W$, $\mathbf{u} \in U$. Miten käy jos kunnan karakteristika ei ole nolla?

Ratkaisu: Oletetaan, että $n \geq 1$. Olkoon $\mathbf{v} = (k_1, \ldots, k_n)$ avaruuden V vektori. Tutkitaan voidaanko esittää se muodossa

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u},$$

missä $\mathbf{w} \in W$, $\mathbf{u} \in U$ ja jos voidaan, onko tällainen esitys yksikäsitteinen. Oletetaan, että

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u},$$

missä $\mathbf{w} \in W$, $\mathbf{u} \in U$. Olkoot $\mathbf{w} = (k'_1, \ldots, k'_n)$, $\mathbf{u} = (k''_1, \ldots, k''_n)$. Tällöin $k'_1 + \ldots + k'_n = 0$ ja $k''_1 = \ldots = k''_n = k''$. Tästä seuraa, että

$$(k_1 + \ldots + k_n) = (k'_1 + \ldots + k'_n) + (k''_1 + \ldots + k''_n) = nk''.$$

Tässä nk'' on alkion k'' n's monikerta kunnassa K. Koska kunnan K karakteristika oletetaan olevan nolla, $n = n \cdot 1_K \neq 0_K$ kunnassa K, joten voidaan ratkaista

$$k'' = \frac{k_1 + \ldots + k_n}{n}.$$

Näin ollen $\mathbf{u} = (k'', \ldots, k'')$ määräytyy yksikäsitteisesti. Tällöin myös

$$(k'_1, \ldots, k'_n) = \mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u} = (k_1 - k'', \ldots, k_n - k'')$$

on yksikäsitteisesti määrätty. Näin ollen vektorin $\mathbf{v}$ esitys muodossa

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u},$$

missä $\mathbf{w} \in W$, $\mathbf{u} \in U$, on ainakin yksikäsitteinen, joten summa $W + U$ on suora.
Kääntäen olkoon $\mathbf{v} = (k_1, \ldots, k_n) \in V$ ja määritellään

$$k'' = \frac{k_1 + \ldots + k_n}{n},$$

$$\mathbf{u} = (k'', \ldots, k''),$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u} = (k_1 - k'', \ldots, k_n - k'').$$

Tällöin selvästi $\mathbf{u} \in U$ ja $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u}$. Tarkistetaan vielä, että $\mathbf{w} \in W$. Nyt

$$\sum_{i=1}^{n} (k_i - k'') = \sum_{i=1}^{n} k_i - nk'' = 0_K$$

alkion k'' määritelmän nojalla. Toisin sanoen $\mathbf{w} \in W$. Väite on todistettu suoran summan määritelmästä lähtien.

Jos kunnan karakteristika K on jokin alkuluku p, mutta n ei ole jaollinen p:llä, yllä oleva todistus toimii sellaisenaan, joten myös väite pätee myös tässäkin tapauksessa. Jos taas p on luvun n tekijä, niin kaikille $k'' \in K$ pätee

$$k'' + \ldots + k'' = nk'' = 0,$$

joten tässä tapauksessa $U \subset W$, joten erityisesti $W + U = W$. Koska U on kuitenkin epätriviaali aliavaruus (se on itse asiassa 1-ulotteinen), tällöin $U \cap W = U$ on epätriviaali, joten summa ei ole suora. Lisäksi W on avaruuden V aito aliavaruus, joten myöskin väite $W + U = V$ ei ole tosi kun $p|n$.

6. Tarkastellaan seuraavia K-vektoriavaruuden $M(n \times n; K)$ $(n \in \mathbb{N})$ aliavaruuksia,

$$V = \{A \in M(n \times n; K) \mid A = A^T\},$$

$$U = \{A \in M(n \times n; K) \mid A = -A^T\},$$

$$W = \{A = (a_{ij})_{i=1}^{n} \in M(n \times n; K) \mid a_{ij} = 0 \text{ kaikilla } i > j\}.$$

$$Z = \{A = (a_{ij})_{i=1}^{n} \in M(n \times n; K) \mid a_{ij} = 0 \text{ kaikilla } i \leq j\}.$$

Oletetaan, että kunnan K karakteristika ei ole 2. Osoita, että summat $V+U$, $V+Z$, $U+W$ ovat suoria. Osoita, että jokaisen tämän summan arvo on koko avaruus $M(n \times n; K)$. Ovatko summat $V+W$, $U+Z$ tai $W+Z$ suoria? Onko oletus kunnan karakteristikasta tarpeellinen?

Ratkaisu: Oletetaan, että kunnan K karakteristika ei ole kaksi. Olkoon $A \in M(n \times n; K)$ mielivaltainen matriisi. Olkoot $B \in V$, $C \in U$, tutkitaan millä ehdoilla yhtälö $A = B + C$ voi päteä. Oletetaan siis, että $A = B + C$, missä $B = B^T$ ja $C = -C^T$. Ottamalla yhtälön $A = B + C$ kummastakin puolesta transpoosit saadaan

$$A^T = (B+C)^T = B^T + C^T = B - C.$$

Laskemalla yhtälöt $A = B + C$ ja $A^T = B - C$ yhteen saadaan $2B = A + A^T$. Vähentämällä yhtälöstä $A = B + C$ yhtälö $A^T = B - C$ saadaan $2C = A - A^T$. Koska kunnan karakteristika ei ole kaksi, $2 \in K$ on nollasta eroava skalaari, joten sillä voi jakaa. Toisin sanoen saadaan

$$B = (A + A^T)/2, \ C = (A - A^T)/2.$$

Näin ollen B ja C määräytyvät yksikäsitteisesti, joten matriisin A esitys muodossa $A = B + C$, missä $B \in V$ ja $C \in U$ on yksikäsitteinen. Toisin sanoen summa $V + U$ on suora. Kääntäen helposti nähdään, että jokaiselle $A \in M(n \times n; K)$ pätee

$$B^T = (A^T + (A^T)^T)/2 = (A^T + A)/2 = B,$$

$$B^T = (A^T - (A^T)^T)/2 = (A^T - A)/2 = -B,$$

joten $B \in V$, $C \in U$, lisäksi

$$B + C = (A + A^T)/2 + (A - A^T)/2 = (A + A)/2 = A.$$

Näin ollen $V + U = M(n \times n; K)$.

On osoitettu, että summa $V + U$ on suora ja $V \oplus U = M(n \times n; K)$.

Aliavaruuden V alkioita sanotaan *symmetrisiksi matriiseiksi*, aliavaruuden U alkioita vastaavasti *antisymmetrisiksi matriiseiksi*. Neliömatriisi $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ on symmetrinen jos ja vain jos $a_{ij} = a_{ji}$ kaikilla $i, j = 1, \ldots, n$. Vastaavasti A on antisymmetrinen jos ja vain jos $a_{ij} = -a_{ji}$ kaikilla $i, j = 1, \ldots, n$. Jos kunnan K karakteristika on kaksi, jokainen symmetrinen matriisi on antisymmetrinen ja päinvastoin, joten tällöin $V = U$. Koska on aina olemassa symmetrisia ei-nollamtariiseja, esimerkiksi I_n on sellainen, tästä seuraa, että kun kunnan karakteristika on kaksi, summa $V \oplus U$ ei ole suora (koska $V \cap U = V \neq \{0\}$). Kun $n = 1$, jokainen (1×1)-matriisi on triviaalisti symmetrinen, joten tällöin $V + U = V = M(n \times n; K)$ (kun kunnan karakteristika on kaksi). Kun $n \geq 2$, on olemassa ei-symmetrisia $(n \times n)$-kokoisia matriiseja, esim. mikä tahansa matriisi jolle $a_{12} = 1 \neq 0 = a_{21}$. Näin ollen, jos kunnan karakterstika on kaksi, tällöin $V + U = V \neq M(n \times n; K)$.

Seuraavaksi tarkastellaan summaa $V + Z$. Olkoon $A \in M(n \times n; K)$ mielivaltainen ja oletetaan, että $A = B + C$, missä $B \in V$, $C \in Z$. Tällöin kaikilla $i, j = 1, \ldots, n$ pätee $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$. Kun $i \leq j$ pätee $c_{ij} = 0$, joten tällöin $a_{ij} = b_{ij}$. Kun taas $i > j$ pätee edellisen nojalla $b_{ij} = b_{ji} = a_{ji} - c_{ji} = a_{ij}$, sillä matriisi B on symmetrinen ja $c_{ji} = 0$, koska $j < i$. Näin ollen tällöin

$$a_{ij} = b_{ji} + c_{ij} = a_{ji},$$

mistä seuraa, että $c_{ij} = a_{ij} - a_{ji}$. Näin ollen C on yksikäsitteisesti määrätty, joten myös $B = A - C$ on yksikäsitteisesti määrätty. Toisin sanoen summa $V + Z$ on suora. Osoittaakseen, että sen arvo on koko avaruus, kiinnitetään $A \in M(n \times n; K)$ ja asetetaan $C = (c_{ij})$, $B = (b_{ij})$ ehdoilla

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} - a_{ji}, \text{ kun } i > j, \\ 0_K, \text{ kun } i \leq j \end{cases},$$

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ji}, \text{ kun } i > j, \\ a_{ij}, \text{ kun } i \leq j \end{cases}.$$

Tällöin näistä määritelmistä helposti seuraa, että $B \in V$, $C \in Z$ ja $B + C = A$.

Pannaan myös merkille, että edellisessä laskussa kunnan karakteristikan arvolla ei ollut merkitystä, joten väite $V \oplus Z = M(n \times n; K)$ pätee aina.

Tarkastellaan summaa $U + W$. Olkoon $A \in M(n \times n; K)$ mielivaltainen ja oletetaan, että $A = B + C$, missä $B \in U$, $C \in W$. Tällöin kaikilla $i, j = 1, \ldots, n$ pätee $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$. Kun $i > j$ pätee $c_{ij} = 0$, joten tällöin $a_{ij} = b_{ij}$. Kun taas $i \leq j$ pätee $b_{ij} = -b_{ji}$, sillä matriisi B on symmetrinen. Erikoistapauksessa $i = j$ erityisesti $b_{ii} = -b_{ii}$, joten, koska oletamme, että kunnan karakteristika ei ole kaksi, $b_{ii} = 0$. Tästä seuraa, että $a_{ii} = c_{ii}$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Kun $i < j$ pätee $c_{ji} = 0$, joten tällöin

$$b_{ij} = -b_{ji} = -(a_{ji} - c_{ji}) = -a_{ji},$$

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} = a_{ij} + a_{ji}.$$

Erityisesti sekä B ja C määräytyvät yksikäsitteisesti A:n arvoista. Toisin sanoen summa $U + W$ on suora. Osoittaakseen, että sen arvo on koko avaruus, kiinnitetään $A \in M(n \times n; K)$ ja asetetaan $C = (c_{ij})$, $B = (b_{ij})$ ehdoilla

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} + a_{ji}, \text{ kun } i < j, \\ a_{ij}, \text{ kun } i = j, \\ 0_K, \text{ kun } i > j \end{cases},$$

$$b_{ij} = \begin{cases} -a_{ji}, \text{ kun } i < j, \\ 0_K, \text{ kun } i = j, \\ a_{ij}, \text{ kun } i > j \end{cases}.$$

Tällöin näistä määritelmistä helposti seuraa, että $B \in U$, $C \in W$ ja lisäksi $B+C = A$. Näin ollen suoran summan $U \oplus W$ arvo on koko avaruus $M(n \times n; K)$.

Kun kunnan K karakteristika on kaksi, ylläoleva todistus ei toimi. Tutkitaan mitä tapahtuu silloin. Kun kunnan K karaktersitika on kaksi pätee $V = U$, kuten yllä todettiin jo. Tällöin $I_n \in V \cap W = U \cap W$, joten leikkaus $U \cap W$ ei ole triviaali, joten Seurauksen 2.156 nojalla summa $U + W$ ei voi olla suora. Väite $V + Z = U + Z = M(n \times n; K)$ kuitenkin pätee tällöin edelleenkin, sillä yllä annetut määritelmät matriiseille B ja C toimivat myös kunnan karakteristika on kaksi.

Tutkitaan vielä ovatko summat $V + W$, $U + Z$, $W + Z$ suoria. Kuten edellisessä kappaleessa todettiin aina pätee $I_n \in V \cap W$, joten Seurauksen 2.156 nojalla summa $V + W$ ei voi olla suora.

Osoitetaan, että summa $U + Z$ on suora. Olkoon $A = (a_{ij}) \in U \cap Z$. Tällöin erityisesti $a_{ij} = 0$ kun $i \leq j$. Kun taas $i > j$, pätee $a_{ij} = -a_{ji} = -0 = 0$. Näin ollen $A = 0$, joten Seurauksen 2.156 nojalla summa $U + Z$ on suora.

Huomautus: Voidaan osoittaa, että $U + Z = M(n \times n; K)$ jos ja vain jos kunnan K karakteristika on kaksi. Nimittäin jos karakteristika on kaksi, $U = V$ ja väite $V \oplus Z = M(n \times n; K)$ on osoitettu yllä mielivaltaisen kunnan tapauksessa. Kääntäen, jos karakteristika ei ole kaksi, antisymmetrisen matriisin $B \in U$ jokainen lävistäjäalkio on nolla. Koska myös jokaisen $C \in Z$ lävistäjäalkio on nolla, tästä seuraa, että summan $U + Z$ alkion jokainen lävistäjäalkio on nolla. Erityisesti tällöin esimerkiksi $I_n \notin U + Z$.

Summa $W + Z$ on suora, sillä selvästi $W \cap Z = \{0\}$. Lisäksi helposti nähdään myös, että tämän suoran summan arvo on $M(n \times n; K)$. Tämäkin tulos pätee mielivaltaisen kunnan K yli, karakteristikan arvolla ei ole merkitystä.

7.* Olkoon V K-vektoriavaruus ja olkoon $(W_1, \ldots, W_n)$ äärellinen jono sen aliavaruuksia.
a) Oletetaan, että summa $\sum_{i=1}^n W_i$ on suora ja sen arvo $\oplus_{i=1}^n W_i$ on koko avaruus V. Jokaisella $i = 1, \ldots, n$ olkoon $p_j \colon V \to V$ kaavalla

$$p_j(\sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i) = \mathbf{w}_j$$

määritelty lineaarinen projektio. Toisin sanoen p_j on kanoninen projektio $p_j \colon \sum_{i=i}^n W_i = \prod_{i=1}^n W_i \to W_j$, jossa maaliavaruus on vaihdettu koko avaruudeksi V ja on käytetty luonnollista samastusta $\oplus_{i=1}^n W_i = V$. Osoita, että $\sum_{i=1}^n p_i = \mathrm{id}$ ja $p_i p_j = \delta_{ij} p_i$, $i, j = 1, \ldots, n$ (missä δ_{ij} on Kroneckerin delta).
b) Oletetaan kääntäen, että $p_1, \ldots, p_n \colon V \to V$ ovat lineaarisia operaattoreita, joille pätee $\sum_{i=1}^n p_i = \mathrm{id}$ ja $p_i p_j = \delta_{ij} p_i$, $i, j = 1, \ldots, n$. Osoita, että aliavaruudet $W_i = p_i(V)$ muodostavat suoran summan, jonka arvo on koko avaruus V. Osoita myös,

että p_j on tällöin kaavalla

$$p_j(\sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i) = \mathbf{w}_j$$

määritelty kanoninen projektio.

Ratkaisu: a) Olkoon $\mathbf{v} \in V$. Koska $\oplus_{i=1}^n W_i = V$ on olemassa yksikäsitteiset $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ siten, että $\mathbf{w}_i \in W_i$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$ ja $\sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i = \mathbf{v}$. Koska tällöin $p_j(\mathbf{v}) = \mathbf{w}_j$, saadaan, että

$$(\sum_{i=1}^n p_i)(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n p_i(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i = \mathbf{v}.$$

Tämä osoittaa sen, että $\sum_{i=1}^n p_i = \mathrm{id}$. Lisäksi kun $i \neq j$

$$p_i p_j(\mathbf{v}) = p_i(\mathbf{w}_j) = \mathbf{0}_V$$

ja $p_i^2(\mathbf{v}) = p_i(\mathbf{w}_i) = \mathbf{w}_i$, sillä vektorin $\mathbf{v}_j$ esitys summan $\oplus_{i=1}^n W_i$ alkiona on muotoa

$$\mathbf{0}_V + \ldots + \mathbf{0}_V + \mathbf{w}_j + \mathbf{0}_V + \ldots + \mathbf{0}_V.$$

b) Oletetaan, että $p_1, \ldots, p_n \colon V \to V$ ovat lineaarisia operaattoreita, joille pätee $\sum_{i=1}^n p_i = \mathrm{id}$ ja $p_i p_j = \delta_{ij} p_i$, $i, j = 1, \ldots, n$. Olkoon $W_i = p_i(V)$, $i = 1, \ldots, n$. Olkoon $\mathbf{v} \in V$ mielivaltainen ja olkoot $\mathbf{w}_i \in W_i$, $i = 1, \ldots, n$ siten, että $\sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i = \mathbf{v}$. Tällöin jokaisella $i = 1, \ldots, n$ on olemassa $\mathbf{u}_i \in V$ siten, että $\mathbf{w}_i = p_i(\mathbf{u}_i)$. Ottamalla yhtälön $\sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i = \mathbf{v}$ kummastakin puolesta kuvauksen p_j arvo, $j = 1, \ldots, n$, saadaan

$$p_j(\mathbf{v}) = p_j(\sum_{i=1}^n p_i(\mathbf{u}_i)) = \sum_{i=1}^n p_j p_i(\mathbf{u}_i) = p_j(\mathbf{u}_j) = \mathbf{w}_j.$$

Erityisesti komponentit $\mathbf{w}_j = p_j(\mathbf{v})$ ovat yksikäsitteisesti määrättyjä, joten summa $\sum_{i=1}^n W_i$ on suora. Osoitetaan, että tämän summan arvo on koko avaruus V. Olkoon $\mathbf{v} \in V$. Tällöin

$$\mathbf{v} = \mathrm{id}(\mathbf{v}) = (\sum_{i=1}^n p_i)(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n p_i(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i,$$

missä $\mathbf{w}_i = p_i(\mathbf{v}) \in W_i$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Näin ollen $\oplus_{i=1}^n W_i = V$. Lisäksi on näytetty, että jokaisen vektorin $\mathbf{v} \in V$ yksikäsitteinen esitys summan $\oplus_{i=1}^n W_i$ alkiona on $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n p_i(\mathbf{v}_i)$. Tästä seuraa suoraan, että p_j kaavalla

$$p_j(\sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i) = \mathbf{w}_j$$

määritelty kanoninen projektio jokaisella $j = 1, \ldots, n$.

8.* Olkoot K_1, K_2 kuntia. Määritellään niiden suora tulo $(K_1 \times K_2; p_1, p_2)$ siten, että $K_1 \times K_2$ on kunta ja $p_i\colon K_1 \times K_2 \to K_i$, $i = 1, 2$ ovat kuntahomomorfismeja, siten, että $(K_1 \times K_2; p_1, p_2)$ toteuttaa suoran tulon universaaliominaisuuden. Täsmällisesti - jos K on kunta ja $\phi_i\colon K \to K_i$ on kuntahomorfismi, $i = 1, 2$, niin on olemassa yksikäsitteinen kuntahomomorfismi $\phi\colon K \to K_1 \times K_2$ siten, että $\phi_i = p_i \circ \phi$, $i = 1, 2$.
a) Olkoot $K_1 = \mathbb{Z}_p$, $K_2 = \mathbb{R}$, p alkuluku. Osoita, että ei ole olemassa suoraa tuloa $(K_1 \times K_2; p_1, p_2)$.
b) Osoita, että kuntien $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{C}$ suora tulo $(\mathbb{Q} \times \mathbb{C}; p_1, p_2)$ on olemassa ja (isomorfia vaille) on kunta $\mathbb{Q}$.

Ratkaisu: a) Olkoon $K = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{R}$ kunta, joka toteuttaa kuntien $\mathbb{Z}_p$ ja $\mathbb{R}$ suoran tulon määritelmän. Tällöin erityisesti on olemassa projektiokuvaukset $p_1\colon K \to\to \mathbb{Z}_p$, $p_2\colon K \to \mathbb{R}$, jotka ovat nyt kuntien välisiä homomorfismia. Koska kuntien väliset homomorfiset ovat injektiivisia (Seuraus 1.93), K on isomorfinen kunnan $\mathbb{Z}_p$ alikunnan $p_1(K)$ kanssa ja samoin K on isomorfinen kunnan $\mathbb{Z}_p$ alikunnan $p_2(\mathbb{R})$ kanssa. Erityisesti siis kunnilla $\mathbb{Z}_p$ ja $\mathbb{R}$ on (iosmorfiaa vaille) "yhteinen" alikunta K'. Näytetään, että tämä ei ole mahdollista. Kunnan K' nollasta eroava alkio $1 = 1_{\mathbb{Z}_p}$ toteuttaa yhtälön

$$p1 = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{p \text{ kpl}} = 0.$$

Kuitenkin kunnassa $\mathbb{R}$ ainoa alkio jolla on tällainen ominaisuus on nolla-alkio. Saatu ristiriita osoittaa sen, että kuntaa K ei ole olemassa.

b) Olkoon $K = \mathbb{Q} \times \mathbb{C}$ kunta, joka toteuttaa kuntien $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{C}$ suoran tulon määritelmän. Tällöin erityisesti on olemassa projektiokuvaukset $p_1\colon K \to\to \mathbb{Q}$, $p_2\colon K \to \mathbb{C}$, jotka ovat kuntien välisiä homomorfismeja. Erityisesti $K \approx p_1(\mathbb{Q})$, missä $p_1(\mathbb{Q})$ on kunnan $\mathbb{Q}$ alikunta. Osoitetaan, että $p_1(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ osoittamalla, että $\mathbb{Q}$ on ainoa itseensä alikunta. Olkoon Q' kunnan $\mathbb{Q}$ alikunta. Tällöin $1 \in Q'$, joten kaikilla $n \in \mathbb{N}$ myös $n = n \cdot 1 = \overbrace{1 + 1 + \ldots + 1}^{}_{n \text{ kpl}} \in Q'$, mukaanlukien tapaus $n = 0$, sillä $0 = 0 \cdot 1 \in Q'$. Vastaavasti $n = -((-n) \cdot 1) \in Q'$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}, n < 0$, sillä Q' on suljettu vasta-alkioiden suhteen. Näin ollen $\mathbb{Z} \subset Q'$. Koska Q' on alikuntana suljettu käänteisalkioiden suhteen, tästä myös seuraa, että $1/m \in Q'$ kaikilla $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$. Koska Q' on suljettu kertolaskun suhteen, tästä seuraa, että $n/m = n \cdot 1/m \in Q'$ kaikilla $n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$. Toisin sanoen $\mathbb{Q} \subset Q'$. Näin ollen $\mathbb{Q}$ on ainoa itseensä alikunta, joten $p_1(K) = \mathbb{Q}$, eli p_1 on surjektio. Seurauksen 1.93 nojalla se on myös injektio. Näin ollen K on isomorfiaa vaille $\mathbb{Q}$.

Näytetään vielä, että $\mathbb{Q}$ tosiaankin kelpaa kuntien $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{C}$ suoraksi tuloksi. Osoitetaan ensin, että jokaiselle kunnalle K on olemassa korkeintaan yksi kuntahomomorfismi $\mathbb{Q} \to K$, toisin sanoen, että kuntahomomorfismi $f\colon \mathbb{Q} \to K$ on yksikäsitteinen, jos ylipäätän olemassa. Olkoon $f\colon \mathbb{Q} \to K$ kuntahomomorfismi. Tällöin $f(1) = 1_K$, joten, koska f on homomorfismi kaikilla $n, m \in \mathbb{Z}$ pätee

$$f(n/m) = f(n)f(m)^{-1} = f(n \cdot 1)f(m \cdot 1)^{-1} = \frac{n1_K}{m1_K}.$$

Erityisesti f on yksikäsitteisesti määrätty.

Määritellään $p_1 = \mathrm{id}\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $p_2 = \iota\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{C}$, missä $\iota\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ on kunnan $\mathbb{Q}$ upotus kuntaan $\mathbb{C}$. Edellisen nojalla sekä id että ι ovat itse asiassa ainoat mahdolliset kuntahomomorfismit $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ ja $\mathbb{Q} \to \mathbb{C}$.

Oletetaan, että K on kunta ja $\phi_1\colon K \to \mathbb{Q}$, $\phi_2\colon K \to \mathbb{C}$ ovat kuntahomorfismeja. On osoitettava, että on olemassa yksikäsitteinen kuntahomomorfismi $\phi\colon K \to \mathbb{Q}$ siten, että $\phi_i = p_i \circ \phi$, $i = 1, 2$. Koska $\phi_1\colon K \to \mathbb{Q}$ on kuntahomomorfismina injektiivinen, se on kuntaisomorfismi $\phi_1\colon K \approx \phi_1(K)$, missä $\phi_1(K)$ on kunnan $\mathbb{Q}$ alikunta. Edellä on kuitenkin näytetty, että tällöin välttämättä $\phi_1(K) = \mathbb{Q}$. Toisin sanoen $\phi_1\colon K \to \mathbb{Q}$ on kuntien välinen isomorfismi, eli K on $\mathbb{Q}$ isomofiaa vaille. Kuvaus $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ on tällöin kuntahomomorfismi $\mathbb{Q} \to \mathbb{C}$, joten, koska ι on myös tällainen homomorfismi, ja koska isomorfismi $\mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ on yksikäsitteinen, on siis pakko olla $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} = \iota$ eli $\phi_2 = \iota \circ \phi_1$.

Nyt, jos $\phi\colon K \to \mathbb{Q}$ on sellainen kuntahomomorfismi, jolle pätee $\phi_i = p_i \circ \phi$, $i = 1, 2$, niin välttämättä $\phi_1 = p_1 \circ \phi = \mathrm{id} \circ \phi = \phi$. Erityisesti ϕ on yksikäsitteinen. Kääntäen, jos asetetaan $\phi = \phi_1$, niin

$$p_1 \circ \phi = \phi_1, \text{ ja}$$

$$p_2 \circ \phi = \iota \circ \phi_1 = \phi_2.$$

On näytetty, että systeemi $(\mathbb{Q}, \mathrm{id}, \iota)$ toteuttaa kuntien suoran tulon määritelmän.