Äärellisulotteinen lineaarialgebra, kevät 2015.
Harjoitus 7.
Ratkaisuehdotuksia.

1. Olkoon $E = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m)$ K-vektoriavaruuden V kanta ja olkoon $\varepsilon = (\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^m)$ kannan E duaalikanta. Olkoon $F \colon V \times V \to K$ bilineaarinen muoto. Harjoituksen 6.5 nojalla on olemassa lineaarinen kuvaus $\tilde{F} \colon V \to V^*$, $\tilde{F}(\mathbf{v})(\mathbf{v}') = F(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$.

   Muodon F *matriisi* kannan E suhteen määritellään $(n \times n)$-neliömatriisina $[F]_E = A = (a_{ij}) \in M(n \times n; K)$, jolle pätee $a_{ij} = F(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ kaikilla $i, j = 1, \ldots, n$. Osoita, että
$$[F]_E = [\tilde{F}]^T_{\varepsilon,E}$$

   Ratkaisu: Olkoon $[\tilde{F}]_{\varepsilon,E} = (b_{ij})^n_{i,j=1}$. Määritelmän mukaan tämä tarkoittaa täsmälleen sitä, että kaikilla $j = 1, \ldots, n$ pätee
$$\tilde{F}(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^n b_{ij}\varepsilon_i.$$
   Olkoon $k = 1, \ldots, n$, tällöin edellisestä saadaan
$$a_{jk} = F(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k) = \tilde{F}(\mathbf{v}_j)(\mathbf{v}_k) = (\sum_{i=1}^n b_{ij}\varepsilon_i)(\mathbf{v}_k) = \sum_{i=1}^n b_{ij}\delta_{ik} = b_{kj}.$$
   Koska tämä pätee kaikilla $j, k = 1, \ldots, n$, transpoosin määritelmän mukaan
$$[F]_E = [\tilde{F}]^T_{\varepsilon,E}$$

2. Olkoon V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus ja olkoot E, E' sen (eri) kannat. Olkoon $F \colon V \times V \to K$ bilineaarinen muoto. Osoita, että
$$[F]_{E'} = A^T[F]_E A,$$
   missä A on eräs kannanvaihtomatriisi. Mistä kannanvaihtomatriisista on kyse?

   Ratkaisu: Käytetään edellistä tehtävää ja kannanvaihtokaavaa (2.87). Olkoon ε' kannan E' duaalikanta. Tällöin kannanvaihtokaavan (2.87) nojalla pätee
$$[\tilde{F}]_{\varepsilon',E'} = [\varepsilon' \mid \varepsilon][\tilde{F}]_{\varepsilon,E}[E \mid E'].$$
   Olkoon $A = [E \mid E']$. Tällöin määritelmän mukaan $A = [\mathrm{id}_V]_{E,E'}$. Samalla tavalla pätee $[\varepsilon' \mid \varepsilon] = [\mathrm{id}_{V^*}]_{\varepsilon',\varepsilon}$. Koska identtisen kuvauksen $\mathrm{id} \colon V \to V$ duaalikuvaus $\mathrm{id}^* \colon V^* \to V^*$ on identtinen kuvaus $\mathrm{id}_{V^*} \colon V^* \to V^*$, Proposition 2.108 nojalla pätee
$$[\varepsilon' \mid \varepsilon] = [\mathrm{id}_{V^*}]_{\varepsilon',\varepsilon} = [\mathrm{id}_V]_{E,E'} = A^T.$$
   Näin ollen
$$[\tilde{F}]_{\varepsilon',E'} = A^T[\tilde{F}]_{\varepsilon,E}A.$$
   Ottamalla tästä transpoosit, saadaan edellisen tehtävän ja yhtälön (2.122) nojalla
$$[F]_{E'} = ([\tilde{F}]_{\varepsilon',E'})^T = (A^T[\tilde{F}]_{\varepsilon,E}A)^T = A^T[\tilde{F}]^T_{\varepsilon,E}(A^T)^T = A^T[F]_E A.$$

3. Olkoon K kunta, $n \geq 2$, $i \in [n]$. Määritellään kuvaus $F\colon M(n \times n; K) \to K$ kaavalla

$$F(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}).$$

Osoita, että kuvaus F toteuttaa kaikki Lauseessa 2.138 mainitut determinantin ominaisuudet, toisin sanoen on multilineaarinen ja alternoiva muoto matriisin sarakkeiden suhteen, jolle pätee lisäksi yhtälö $F(I_n) = 1_K$. Tässä A_{ij} on $(n-1) \times (n-1)$ alimatriisi, joka saadaan poistamalla A:stä i:nnes rivi ja j:nnes sarake.

Ratkaisu: Olkoon $k = 1, \ldots, n$. Olkoot B ja C matriisit, joilla on samat sarakkeet, paitsi k'nnes sarake. Olkoon A matriisi, jonka sarakkeille pätee $c_l(A) = c_l(B) = c_l(C)$ kun $l \neq k$ ja $c_k(A) = c_k(B) + c_k(C)$. Meidän on osoitettavaa, että

$$F(A) = F(B) + F(C).$$

Olkoot $i, j = 1, \ldots, n$. Kun $j \neq k$, alimatriiseilla A_{ij}, B_{ij} ja C_{ij} on sama suhde kuin matriiseillä A, B ja C, eli niillä samat sarakkeet yhtä sareketta lukuunottamatta. Tämä sarake on puolestaan matriisin A_{ij} kohdalla vastaavien matriisien B_{ij}ja C_{ij} sarakkeiden summa. Koska kuvaus det on multilineaarinen sarakkeiden suhteen, tästä saadaan tällöin

$$\det(A_{ij}) = \det(B_{ij}) + \det(C_{ij}).$$

Lisäksi tällöin pätee $a_{ij} = b_{ij} = c_{ij}$, joten loppujen lopuksi saadaan

$$a_{ij} \det(A_{ij}) = b_{ij} \det(B_{ij}) + c_{ij} \det(C_{ij}).$$

Olkoon $j = k$. Tällöin matriisit A_{ij}, B_{ij} ja C_{ij} ovat samoja. Lisäksi pätee $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$, joten edelleenkin pätee

$$a_{ij} \det(A_{ij}) = b_{ij} \det(B_{ij}) + c_{ij} \det(C_{ij}).$$

Joka tapauksessa siis

$$a_{ij} \det(A_{ij}) = b_{ij} \det(B_{ij}) + c_{ij} \det(C_{ij})$$

kaikilla $i, j = 1, \ldots, n$. Tästä seuraa kuvauksen F määritelmän nojalla

$$F(A) = F(B) + F(C).$$

Multilineaarisuutta skalaarikertolaskun suhteen näytetään samalla tavalla.

Kun $A = I_n$ on yksikkömatriisi, pätee $a_{ij} = 0$ paitsi silloin kun $i = j$. Lisäksi matriisi A_{ii} on yksikkömatriisi I_{n-1}. Tämän nojalla saadaan

$$F(I_n) = (-1)^{2i} \det(I_{n-1}) = 1.$$

Jäljellä on sen osoittaminen, että F on alternoiva (sarakkeiden suhteen). Oletetaan, että matriisin A kaksi saraketta $c_k(A)$ ja $c_l(A)$ ovat samoja, $k \neq l$. Voidaan olettaa, että $k < l$. Kun $j \neq k, l$, matriisissa A_{ij} on kaksi samaa saraketta, joten sen determinaantti on nolla. Tästä seuraa, että

$$F(A) = (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik}) + (-1)^{i+l} a_{il} \det(A_{il}).$$

Koska $c_k(A) = c_l(A)$, erityisesti pätee $a_{ik} = a_{il}$. Näin ollen

$$F(A) = (-1)^i a_{ik}((-1)^k \det(A_{ik}) + (-1)^l \det(A_{il}).$$

Riittää siis osoittaa, että

$$(-1)^k \det(A_{ik}) + (-1)^l \det(A_{il}) = 0.$$

Tämä on yhtäpitävä yhtälön

$$\det A_{il} = (-1)^{k-l+1} \det(A_{ik}) = (-1)^{l-k-1} \det(A_{ik})$$

kanssa.

Matriisi A_{il} voidaan ajatella syntyvän matriisista A_{ik}, kun jälkimmäisessä siirretään matriisin sarake numero $(l-1)$ (alkuperäisen matriisin A l's sarake $c_l(A)$) sarakkeeksi, jonka numero on k. Muut sarakkeet tällöin "pysyvät paikallaan" toisensa nähden.

Tällainen sarakkeen siirto vastaa joukon $[n-1]$ permutaatiota σ, joka saadaan suorittamalla $(l-k-1)$ vaihdosta - ensin vaihdetaan $(l-1)$-sarake ja $(l-2)$-sarake keskenään, sitten $(l-2)$-sarake ja $(l-3)$-sarake ja niin edelleen, kunnes loppuksi vaihdetaan sarakkeet numero $(k+1)$ ja k. Tästä nähdään, että tämän permutaation merkki on $(-1)^{l-k-1}$. Koska determinantti on antisymmetrinen kuvaus, tästä seuraa, että

$$\det A_{il} = (-1)^{l-k-1} \det A_{ik}.$$

Tämä on juuri se, mitä pitikin näyttää.

4. Olkoon $A \in M(n \times n; K)$ neliömatriisi. Osoita, että $\det A = 0$ jos ja vain jos sen sarakkeiden muodostama jono $(c_1(A), \ldots, c_n(A))$ on sidottu (avaruudessa K^n).

Ratkaisu: Olkoon $A \in M(n \times n; K)$ neliömatriisi. Tällöin on olemassa kanoninen siihen liittyvä kuvaus $L_A \colon K_n \to K^n$. Tämä kuvaus on määritelty niin, että $L_A(\mathbf{e}_i) = c_i(A)$, kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Tässä $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ on avaruuden K^n standardikanta. Tästä seuraa, että $\operatorname{Im} L_A = \operatorname{Span}(c_1(A), \ldots, c_n(A))$. Koska jonossa $(c_1(A), \ldots, c_n(A))$ on sama määrä alkioita kuin avaruuden K^n dimensio (eli n), Seurauksen 2.49 nojalla tämä jono on vapaa jos ja vain jos se virittää koko avaruuden V, toisin sanoen jos ja vain jos $\operatorname{Im} L_A = K^n$. Toisin sanoen jono $(c_1(A), \ldots, c_n(A))$ on vapaa jos ja vain jos $\operatorname{Im} L_A = V$, eli jos ja vain jos L_A on surjektio. Toisaalta, koska L_A on kuvaus $K^n \to K^n$, Seurauksen 2.49 nojalla L_A on surjektio jos ja vain jos se on bijektio. Toisin sanoen, jono $(c_1(A), \ldots, c_n(A))$ on vapaa jos ja vain jos L_A on kääntyvä kuvaus.

Koska A on kuvauksen L_A matriisi standardikannan suhteen ja koska vastaavuus matriisien ja lineaaristen kuvausten välillä on algebra-isormorfismi, L_A on kääntyvä kuvaus jos ja vain jos A on kääntyvä matriisi. Toisaalta Proposition 2.145 nojalla A on kääntyvä jos ja vain jos sen determinantti on nollasta eroava, $\det A \neq 0$.

Näin ollen, on osoitettu, että sarakkeiden muodostama jono $(c_1(A), \ldots, c_n(A))$ on vapaa jos ja vain jos $\det A \neq 0$. Tämä on ekvivalenttia tehtävän väitteen kanssa.

5. Olkoon $A = (a_{ij})_{i,j=1\ldots,n} \in M(n \times n; K)$ neliömatriisi. Sen *jälki* (engl. *trace*) $tr(A)$ määritellään kaavalla
$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$
a) Olkoot $A \in M(n \times m; K)$ ja $B \in M(m \times n; K)$. Osoita, että $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
b) Olkoon V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus ja olkoon E sen kanta. Olkoon $L\colon V \to V$ lineaarinen endomorfismi. Määritellään kuvauksen L jälki kaavalla $\operatorname{tr} L = \operatorname{tr}[L]_E$. Osoita, että määritelmä ei riipu kannan valinnasta.

Ratkaisu: a) Suoran määritelmästä saadaan, käyttämällä kunnan kertolaskun vaihdannaisuutta, että
$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} (BA)_{jj} = \operatorname{tr}(BA).$$
b) Olkoon F jokin toinen avaruuden V kanta, on osoitettava, että $\operatorname{tr}[L]_F = \operatorname{tr}[L]_E$.

Kannanvaihtokaavan (2.88) nojalla pätee $[L]_F = A[L]_E A^{-1}$, missä $A = [E' \mid E]$ on kannanvaihtomatriisi. a)-kohdan tuloksen avulla tästä saadaan
$$\operatorname{tr}[L]_F = \operatorname{tr}((A[L]_E)A^{-1}) = \operatorname{tr}(A^{-1}A[L]_E) = \operatorname{tr}[L]_E.$$

6. Olkoon K kunta ja $L\colon M(n \times n; K) \to K$ lineaarinen kuvaus (eli duaali-avaruuden $M(n \times n; K)^*$ alkio). Osoita, että on olemassa yksikäsitteinen matriisi $A \in M(n \times n; K)$ siten, että $L(X) = \operatorname{tr}(AX)$ kaikilla $X \in M(n \times n; K)$ kahdella eri tavalla seuraavien ohjeiden mukaisesti.

   (i) Merkitään L_A:llä kuvausta $X \mapsto \operatorname{tr}(AX)$. Osoita, että kuvaus $A \mapsto L_A$ on lineaarinen injektio $M(n \times n; K) \to M(n \times n; K)^*$. Päättele väite tämän avulla.

   (ii) Osoita, että kuvaus $A \mapsto L_A$ kuvaa avaruuden $M(n \times n; K)$ standardikanta (E_{ij}) erään sen (toisen) kannan duaalikannaksi. Päättele väite tästä. (Vihje: laske $L_{E_{ij}}(E_{kl})$).

Ratkaisu:

Huomautus: Tässä tehtävässä merkintä L_A tarkoittaa tehtävänannosta määriteltyä kuvausta $L_A\colon M(n \times n; K) \to K$ joka on määritelty ehdolla $L_A(X) = \operatorname{tr}(AX)$.

Kyseessa siis ei ole matriisiin A liitetty kanoninen kuvaus, jota kurssin materiaalissa myös merkitään symbolilla L_A.

(i) Osoitetaan ensin, että kuvaus $L_A\colon M(n \times n; K) \to K$, $L_A(X) = \mathrm{tr}(AX)$ on K-lineaarinen jokaisella $A \in M(n \times n; K)$. Ensinnäkin jälkikuvaus $\mathrm{tr}\colon M(n \times n; K) \to K$ on K-lineaarinen, sillä

$$\mathrm{tr}(X+Y) = \sum_{i=1}^{n}(x_{ii} + y_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} x_{ii} + \sum_{i=1}^{n} y_{ii} = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B),$$

$$\mathrm{tr}(kX) = \sum_{i=1}^{n}(kx_{ii}) = k(\sum_{i=1}^{n} x_{ii}) = k\,\mathrm{tr}(A),$$

kaikilla $X, Y \in M(n \times n; K)$, $k \in K$.

Kuvaus $X \mapsto AX$ on myös K-lineaarinen kuvaus $M(n \times n; K) \to M(n \times n; K)$, tämä seuraa algebran $M(n \times n; K)$ ominaisuuksista:

$$A(X+Y) = AX + AY,$$

$$A(kX) = k(AX).$$

Näin ollen kuvaus L_A on lineaarinen kahden lineaarisen kuvauksen yhdisteenä. Erityisesti L_A on aina duaalin $M(n \times n; K)^*$ alkio. Voidaan siis määritellä kuvaus $\Psi\colon M(n \times n; K) \to M(n \times n; K)^*$, $\Psi(A) = L_A$. Osoitetaan, että Ψ on lineaarinen kuvaus. Olkoot $A, B \in M(n \times n; K)$, $k \in K$. Tällöin kaikilla $X \in M(n \times n; K)$ pätee (koska tr on lineaarinen, kuten yllä näytettiin)

$$\Psi(A+B)(X) = \mathrm{tr}((A+B)X) = \mathrm{tr}(AX + BX) = \mathrm{tr}(AX) + \mathrm{tr}(BX) =$$

$$= \Psi(A)(X) + \Psi(B)(X) = (\Psi(A) + \Psi(B))(X),$$
$$\Psi(kA)(X) = \mathrm{tr}((kA)X) = k\,\mathrm{tr}(AX) = (k\Psi(A))(X).$$

Koska tämä pätee kaikilla $X \in M(n \times n; K)$, saadaan

$$\Psi(A+B) = \Psi(A) + \Psi(B),$$

$$\Psi(kA) = k\Psi(A).$$

Näin ollen Ψ on lineaarinen kuvaus.

Osoitetaan, että Ψ on injektio. Olkoon A sellainen neliömatriisi, jolle pätee $\Phi(A) = L_A = 0$. Tämä tarkoittaa sitä, että $\mathrm{tr}(AX) = 0$ kaikilla matriiseilla $X \in M(n \times n; K)$. Valitaan X:ksi "alkeismatriisi" $E_{ij} = (\delta_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ (standardikannan alkio). Matrisin AE_{ij} kaikki sarakkeet ovat nollia, paitsi j'nnes sarake, joka on sama kuin A:n i'nnes sarake. Näin ollen ainoa nollasta eroava matriisin AE_{ij} diagonaalialkio on alkio a_{ji} (joka on matriisin $B = AE_{ij}$ alkio b_{jj}). Tästä seuraa, että

$$0 = \mathrm{tr}(AE_{ij}) = a_{ij}.$$

Tämä pätee kaikille $i, j = 1, \ldots, n$, joten $A = 0$. On näytetty, että kuvauksen Ψ ydin on triviaali, joten Ψ on lineaarinen injektio.

Avaruus $M(n \times n; K)$ on äärellisulotteinen, joten (Lause 2.105) myös sen duaali $M(n \times n; K)^*$ on äärellisulotteinen ja itse asiassa pätee

$$\dim M(n \times n; K) = \dim M(n \times n; K)^* = n^2.$$

Näin ollen dimensiosyistä mikä tahansa lineaarinen injektio $M(n \times n; K) \to M(n \times n; K)$ on myös bijektio (Seuraus 2.94). Näin ollen edellisestä seuraa, että kuvaus Ψ on bijektio. Tämä tarkoittaa sitä, että jokainen duaalin $M(n \times n; K)^*$ alkio eli K-lineaarinen kuvaus $M(n \times n; K) \to K$ on muotoa $X \mapsto \operatorname{tr}(AX)$ jollakin $A \in M(n \times n; K)$, missä A on jopa yksikäsitteinen (injektivisyyden nojalla).

(ii) Osoitetaan, että kuvaus $\Psi\colon M(n \times n; K) \to M(n \times n; K)^*$, $\Psi(A)(X) = \operatorname{tr}(AX)$ (joka on yllä osoitettu jo lineaariseksi) kuvaa erään kannan erääksi kannaksi. Tämä selvästi implikoi, että Ψ on isomorfismi. Tarkastellaan avaruuden $M(n \times n; K)$ "standardikantaa" $E_{ij} = (\delta_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$. Kaikilla $i, j, k, l = 1, \ldots, n$ pätee määritelmän mukaan

$$\Psi(E_{ij})(E_{kl}) = \operatorname{tr}(E_{ij}E_{kl}).$$

Helposti nähdään, että matriisi $E_{ij}E_{kl}$ on nollamatriisi kun $k \neq j$. Kun taas $k = j$ pätee $E_{ij}E_{kl} = E_{ij}E_{jl} = E_{il}$. Tämän matriisin kaikki diagonaalialkiot, ja siten myös jälki, ovat nolla-alkioita kun $i \neq l$. Kun taas $i = l$ ainoa nollasta eroava diagonaalialkio on 1_K kohdassa (ii). Näin ollen

$$\Psi(E_{ij})(E_{kl}) = \operatorname{tr}(E_{ij}E_{kl}) = \begin{cases} 1, & \text{kun } k = j, l = i \\ 0, & \text{muuten} \end{cases}.$$

Tästä nähdään, että joukko $\Psi(E_{ij})$ on kannan (E_{ji}) (huom. järjestys "käännetty") duaalikanta. Erityisesti se on kanta.

7.* Olkoon V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus, olkoon $E = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ jono avaruuden V vektoreita. Olkoot $L_1, \ldots, L_n \in V^*$ mielivaltaiset. Määritellään matriisi $A = (a_{ij}) \in M(n \times n; K)$ ehdolla $a_{ij} = L_i(\mathbf{v}_j)$.
a) Oletetaan, että jono E on sidottu. Osoita, että $\det A = 0_K$. (Vihje: käytä tehtävää 4).
b) Oletetaan, että jono $(L_1, \ldots, L_n)$ on avaruuden V^* kanta. Osoittaa, että jono E on sidottu jos ja vain jos $\det A = 0$.

Huomautus: Alkuperäisestä tehtävänannossa b)-kohdassa oletuksena virheellisesti annettiin liaan lievä "jono $(L_1, \ldots, L_n)$ on vapaa", vaikka tarkoitus oli olettaa, että tämä jono on duaaliavaruuden kanta.

Ratkaisu: a) Tehtävän 4 nojalla riittää todistaa, että matriisin A sarakkeet ovat sidottuja. Koska jono $E = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ oletetaan olevan sidottu, on olemassa epätriviaali lineaarinen kombinaatio

$$k_1\mathbf{v}_1 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}_V,$$

missä $k_l \neq 0_K$ jollakin $l = 1, \ldots, n$. Tästä seuraa, että kaikilla $i = 1, \ldots, n$ pätee

$$k_1 L_i(\mathbf{v}_1) + \ldots + k_n L_i(\mathbf{v}_n) = 0_K.$$

Jokaisella $j = 1, \ldots, n$ matriisin A sarake $c_j(A)$ on (K^n:n alkiona) jono $c_j(A) = (L_1(\mathbf{v}_1), L_2(\mathbf{v}_1), \ldots, L_n(\mathbf{v}_1) \in K^n$. Alkion $k_1 c_1(A) + \ldots + k_n c_n(A) \in K^n$ i'nnes komponentti on

$$k_1 L_i(\mathbf{v}_1) + \ldots + k_n L_i(\mathbf{v}_n),$$

joka on yllä osoitettu nollaksi, kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Näin ollen

$$k_1 c_1(A) + \ldots + k_n c_n(A) = \mathbf{0}_{K^n}.$$

Koska tässä $k_l \neq 0_K$ jollakin $l = 1, \ldots, n$, kombinaatio on epätriviaali, joten A:n sarakkeiden muodostama jono $(c_1(A), \ldots, c_n(A))$ on sidottu. Tehtävän 4 nojalla $\det A = 0$.

b) Oletetaan, että jono $(L_1, \ldots, L_n)$ on duaaliavaruuden V^* kanta. Kohdan a)-nojalla riittää osoittaa, että ehdosta $\det A = 0$ seuraa, että jono E on sidottu. Jos $\det A = 0$, tehtävän 4 nojalla matriisin A sarakkeiden muodostama jono $(c_1(A), \ldots, c_n(A))$ on sidottu. Toisin sanoen on olemassa epätriviaali lineaarinen kombinaatio

$$k_1 c_1(A) + \ldots + k_n c_n(A) = \mathbf{0}_{K^n},$$

missä $k_l \neq 0_K$ jollakin $l = 1, \ldots, n$. Koska tämän yhtälön kummallakin puolella esiintyy eräs avaruuden K^n alkio, toisin sanoen n-paikkainen jono, tästä seuraa, että tämän jonon i'nnes komponentti on

$$k_1 L_i(\mathbf{v}_1) + \ldots + k_n L_i(\mathbf{v}_n)$$

on kunnan K nolla-alkio, kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Koska L_i on lineaarinen kuvaus, tästä seuraa, että kaikilla $i = 1, \ldots, n$ pätee

$$L_i(k_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + k_n \mathbf{v}_n) = 0_K.$$

Olkoon $\mathbf{w} = k_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + k_n \mathbf{v}_n \in V$. Edellisen nojalla $L_i(\mathbf{w}) = 0_K$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Oletusten mukaan jono $(L_1, \ldots, L_n)$ on duaaliavaruuden V^* kanta. Tästä voidaan helposti seuraa, että $L(\mathbf{w}) = 0_K$ kaikilla $L \in V^*$. Nimittäin, jos $L\colon V \to K$ on lineaarinen, on olemassa lineaarinen esitys muotoa

$$L = a_1 L_1 + \ldots + a_n L_n,$$

$a_1, \ldots, a_n \in K$. Koska $L_i(\mathbf{w}) = 0_K$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$, tästä seuraa, että $L(\mathbf{w}) = 0_K$.

On osoitettu, että $L(\mathbf{w}) = 0_K$ kaikilla $L \in V^*$. Osoitetaan tämän avulla, että $\mathbf{w} = \mathbf{0}_V$. Olkoon $\Phi\colon V \to V^{**}$ kanoninen isomorfismi avaruuden V ja sen biduaalin välillä. Proposition 2.121 nojalla Φ on isomorfismi, erityisesti injektio. Kuvauksen Φ määritelmän nojalla

$$\Phi(\mathbf{w})(L) = L(\mathbf{w}) = 0_K$$

kaikilla $L \in V^*$. Näin ollen $\Phi(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$. Koska Φ on injektio, tästä seuraa, että $\mathbf{w} = \mathbf{0}_V$.

On osoitettu, että

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}_V.$$

Tämä nolla-vektorin esitys on epätriviaali. Tästä seuraa, että jono $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ on sidottu.

8.* Sanomme matriisia $A = (a_{ij}) \in M(n \times m; \mathbb{Q})$ kokonaislukukertoimiseksi jos $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Kaikkien kokonaislukukertoimisten $(n \times m)$-kokoisten matriisien muodostamaa joukkoa merkitään $M(n \times m; \mathbb{Z})$.

Olkoon p alkuluku ja $n \in \mathbb{N}$. Jokaisella $A \in M(n \times n; \mathbb{Z})$ määritellään matriisi $A_p \in M(n \times n; \mathbb{Z}_p)$ asettamalla $A_p = ([a_{ij}])$, missä $[a]$ on kokonaisluvun $a \in \mathbb{Z}$ luokka tekijäjoukossa $\mathbb{Z}_p$. Toisin sanoen muutetaan matriisin jokainen alkio vastaavaksi kokonaisluvuksi modulo p.
a) Osoita, että kaikilla $A \in M(n \times n; \mathbb{Z})$ pätee $\det A_p = [\det A] = (\det A)_p$.
b) Olkoon $A \in M(n \times n; \mathbb{Z})$ kokonaislukukertoiminen neliömatriisi, joka on kääntyvä ($\mathbb{Q}$-algebran $M(n \times n; \mathbb{Q})$ alkiona). Osoita, että on olemassa vain äärellinen määrä alkulukuja p, joilla matriisi A_p ei ole kääntyvä.

Ratkaisu: a) Kaavan 2.139 nojalla pätee

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \ldots a_{\sigma(n)n}.$$

Huomataan, että kun A on kokonaislukukertoiminen, $\det A$ on tämän kaavan nojalla kokonaisluku, $\det A \in \mathbb{Z}$. Näin ollen $(\det A)_p$ on hyvinmääritelty. Siirtymällä tässä kokonaislukuihin modulo p saadaan saman tuloksen nojalla

$$(\det(A))_p = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma)[a_{\sigma(1)1}][a_{\sigma(2)2}] \ldots [a_{\sigma(n)n}] = \det A_p.$$

b) Matriisi A_p ei ole kääntyvä jos ja vain jos $\det A_p = 0_p$ (Propositio 2.145). Edellisen kohdan nojalla toisaalta $\det A_p = (\det A)_p$. Kokonaislukujen modulo n määritelmän mukaan tästä seuraa, että A_p ei ole kääntyvä jos ja vain jos $\det A$ on jaollinen luvulla p. Koska A on kääntyvä, $\det A \neq 0$. Toisin sanoen $\det A$ on nollasta eroava kokonaisluku. Tunnetusti jokainen nollasta eroava kokonaisluku on jaollinen vain äärellisen monella alkuluvulla. Väite seuraa tästä.