Äärellisulotteinen lineaarialgebra, kevät 2015.
Harjoitus 6.
Ratkaisuehdotuksia.

Muistutus: *Kroneckerin delta* δ_{ij} määritellään seuraavasti:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jos } i = j, \\ 0, & \text{jos } i \neq j. \end{cases}$$

1. Olkoon V vektoriavaruus ja olkoot $\mathbf{v}_i \in V$, $i = 1, \ldots, n$. Osoita, että jono $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ on vapaa jos ja vain jos kaikilla $i = 1, \ldots, n$ on olemassa $L_i \in V^*$ siten, että $L_j(\mathbf{v}_i) = \delta_{ij}$ kaikilla $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Ratkaisu: Oletetaan, että jono $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ on vapaa. Tällöin se voidaan täydentää koko avaruuden V kannaksi $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}, \ldots, \mathbf{v}_m)$ (Proposition 2.48). Olkoon $(L_1, \ldots, L_m)$ tämän kannan duaalikanta. Tällöin duaalikannan konstruktion perusteella erityisesti pätee $L_j(\mathbf{v}_i) = \delta_{ij}$ kaikilla $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Kääntäen oletetaan, että kaikilla $i = 1, \ldots, n$ on olemassa $L_i \in V^*$ siten, että $L_j(\mathbf{v}_i) = \delta_{ij}\mathbf{v}_i$ kaikilla $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Osoitetaan, että jono $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ on vapaa. Olkoon

$$k_1\mathbf{v}_1 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}_V$$

nolla-vektorin lineaarinen esitys, $k_i \in K$, $i = 1, \ldots, n$. Soveltamalla tämän yhtälön kumpaankin puoleen kuvausta L_i saadaan

$$k_i = L_i(k_1\mathbf{v}_1 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n) = L_i(\mathbf{0}_V) = 0_K.$$

Koska tämä pätee kaikilla $i = 1, \ldots, n$, on osoitettu, että nolla-vektorin esitys on triviaali. Toisin sanoen jono $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ on vapaa.

2. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja olkoon

$$P_n = \{p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid p \textit{ on polynomifunktio, jonka aste on korkeintaan } n\}.$$

Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Jokaisella $k = 0, \ldots, n$ määritellään $L_k \colon P_n \to \mathbb{R}$ kaavalla

$$L_k(p) = \frac{p^{(k)}(a)}{k!}, p \in P_n.$$

Tässä $p^{(k)}$ on kuvauksen $p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ k's derivaatta-funktio, missä nollas derivaatta tulkitaan olevan funktio itse.
Osoita, että $E = (1, x - a, (x - a)^2, \ldots, (x - a)^n)$ on $\mathbb{R}$-vektoriavaruuden P_n kanta.
Osoita, että jono $(L_0, \ldots, L_n)$ on kannan E duaalikanta.
Tässä $(x - a)^k$ on luonnollisesti kuvaus, joka kuvaa $x \in \mathbb{R}$ alkioksi $(x - a)^k$.

Ratkaisu: Tarkastellaan ensin tapausta $a = 0$. Tällöin $E = (1, x, x^2, \ldots, x^n)$. Jokainen polynomi $p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jonka aste on korkeintaan n on määritelmän mukaan lineaarinen kombinaatio jonon E funktioista, sillä tällaisen polynomin määritelmän mukaan on olemassa $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ siten, että

$$p(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n.$$

Näin ollen $P_n = \mathrm{Span}(1, x, x^2, \dots, x^n)$. Erityisesti P_n on äärellisulotteinen $\mathbb{R}$-vektoriavaruus ja lisäksi $\dim P_n \leq n+1$.

Olkoon nyt $a \in \mathbb{R}$ mielivaltainen. Osoitetaan edellisen tehtävän avulla, että jono $(1, x-a, (x-a)^2, \dots, (x-a)^n)$ on vapaa avaruudessa P_n. Induktiolla helposti nähdään, että polynomille $p_l(x) = (x-a)^l$ pätee

$$p_l^{(k)}(x) = \begin{cases} l(l-1)\ldots(l-k+1)(x-a)^{l-k}, \text{ kun } l \geq k, \\ 0, \text{ kun } l < k. \end{cases}$$

Erityisesti

$$p_l^{(k)}(a) = \begin{cases} l!, \text{ kun } l = k, \\ 0, \text{ muuten }. \end{cases}$$

Huomaa, että tässä siis tulkitaan $(x-a)^0 = 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Edellisestä seuraa, että

$$L_k(p_l) = \delta_{kl},$$

kaikilla $k, l = 0, \dots, n$. Lisäksi derivaatan lineaarisuudesta helposti seuraa, että L_k on lineaarinen kuvaus $P_n \to K$, toisin sanoen duaaliavaruuden P_n^* alkio. Tehtävän 1 nojalla tämä implikoi sen, että jono $(1, x-a, (x-a)^2, \dots, (x-a)^n)$ on vapaa avaruudessa P_n. Koska tässä jonossa on tasan $(n+1)$ alkiota, Seurauksen 2.4 nojalla $\dim P_n \geq n+1$. Koska epäyhtälö $\dim P_n \leq n+1$ on osoitettu aikaisemmin, voidaan päätellä, että $\dim P_n = n+1$. Tällöin Seurauksen 24. nojalla voidaan lisäksi päätellä, että jono $E = (1, x-a, (x-a)^2, \dots, (x-a)^n)$ on avaruuden P_n kanta (koska se on vapaa jono, jonka pituus sama kuin avaruuden dimensio).

Koska kaikilla $k, l = 0, \dots, n$ pätee $L_k(p_l) = \delta_{kl}$, jono $(L_0, \dots, L_n)$ on kannan E duaalikanta, duaalikannan määritelmän nojalla.

3. Olkoon $E = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$ äärellisulotteisen K-vektoriavaruuden V kanta ja olkoon $\varepsilon = (\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^m)$ kannan E duaalikanta.
a) Osoita, että kaikilla $\mathbf{v} \in V$ pätee

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^j(\mathbf{v})\mathbf{e}_j.$$

Sovella tämä yhtälö edellisen tehtävän tilanteeseen.
b) Olkoon $L \in V^*$. Osoita, että vektorin L koordinaatit kannassa ε ovat skalaarit $L(\mathbf{e}_i)$, toisin sanoen pätee yhtälö

$$L = \sum_{i=1}^{m} L(\mathbf{e}_i)\varepsilon_i.$$

Ratkaisu: Esitetään avaruuden V vektori $\mathbf{v}$ kannassa E, eli muodossa

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{m} k_j \mathbf{e}_j,$$

missä $k_i \in K$ kaikilla $j = 1, \ldots, m$.

Duaalikannan määritelmän nojalla jokaisella $i = 1, \ldots, m$ pätee

$$\varepsilon^i(\mathbf{v}) = \varepsilon^i(\sum_{j=1}^{m} k_j \mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{m} k_j \varepsilon^i(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{m} k_j \delta_{ij} = k_i.$$

Näin ollen

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^j(\mathbf{v})\mathbf{e}_j.$$

Sovelletaan tämä tulos edellisen tehtävän tilanteeseen eli tapauksessa $V = P_n$, $E = (1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n)$. Tällöin duaalikanta on jono $(L_0, \ldots, L_n)$, missä

$$L_k(p) = \frac{p^{(k)}(a)}{k!}, p \in P_n.$$

Näin ollen tämän tehtävän a)-kohdan nojalla jokaiselle polynomille $p \in P_n$ pätee

$$p(x) = \sum_{j=0}^{m} L^j(p)(x-a)^j = \sum_{j=0}^{m} \frac{p^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^j,$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Saadaan siis *Taylorin sarjan* tyyppinen esitys polynomille.

b) Olkoon $L \in V^*$. Merkitään

$$L' = \sum_{i=1}^{m} L(\mathbf{e}_i)\varepsilon_i,$$

tällöin $L' \in V^*$. Olkoon $j = 1, \ldots, m$. Tällöin duaalikannan määritelmän nojalla

$$L'(\mathbf{e}_j) = (\sum_{i=1}^{m} L(\mathbf{e}_i)\varepsilon_i)(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} L(\mathbf{e}_i)\varepsilon_i(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} L(\mathbf{e}_i)\delta_{ij} = L(\mathbf{e}_j).$$

Koska kuvausten L ja L' arvot kannan alkioissa ovat samat, Proposition 2.57 (yksikäsitteisyys) nojalla pätee $L = L'$.

4. Osoita Proposition 2.119 väite todeksi:
Olkoot V, W K-vektoriavaruudet ja olkoot $\Phi_V \colon V \to V^{**}$, $\Phi_W \colon W \to W^{**}$ kanoniset kuvaukset. Olkoon $L \colon V \to W$ K-lineaarinen kuvaus. Osoita, että

$$L^{**} \circ \Phi_V = \Phi_W \circ L,$$

toisin sanoen diagrammi

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\Phi_V"] & W \arrow[d, "\Phi_W"] \\
V^{**} \arrow[r, "L^{**}"] & W^{**}.
\end{tikzcd}$$

kommutoi.

Ratkaisu: On osoitettava, että

$$L^{**} \circ \Phi_V = \Phi_W \circ L.$$

Tässä yhtälön kummallakin puolella esiintyy kuvaus $V \to W^{**}$. Näin ollen pitää osoittaa, että kaikilla $\mathbf{v} \in V$ pätee yhtälö

$$(L^{**} \circ \Phi_V)(\mathbf{v}) = (\Phi_W \circ L)(\mathbf{v}), \text{ eli yhtälö}$$

$$L^{**}(\Phi_V(\mathbf{v})) = \Phi_W(L(\mathbf{v})).$$

Tämän yhtälön kummallakin puolella taas esiintyy eräs biduaalin W^{**} alkio, eli (lineaarinen) kuvaus $W^* \to K$. Näin ollen riittää osoittaa, että kummankin kuvauksen $L^{**}(\Phi_V(\mathbf{v})$ ja $\Phi_W(L(\mathbf{v}))$ arvo mielivaltaisessa duaalin alkiossa $L' \in W^*$ on sama. Olkoon siis $L' \colon W \to K$ duaalin W^* alkio. Tutkitaan ensin lauseketta $L^{**}(\Phi_V(\mathbf{v}))$. Tässä L^{**} on kuvauksen $L^* \colon W^* \to V^*$ duaalikuvaus $(L^*)^*$, joka on tällöin kuvaus $V^{**} \to W^{**}$. Kanonisen kuvauksen $\Phi_V \colon V \to V^{**}$ määritelmän mukaan tiedetään, että $\Phi_V(\mathbf{v})$ on (lineaarinen) kuvaus $V^* \to K$ (eli duaalin V^{**} alkio). Kuvauksen duaalikuvauksen määritelmän nojalla tällöin pätee

$$L^{**}(\Phi_V(\mathbf{v})) = (L^*)^*(\Phi_{(}\mathbf{v})) = \Phi_V(\mathbf{v}) \circ L^*.$$

Näin ollen, kun L' on duaalin W^* alkio eli lineaarinen kuvaus $W \to K$, saadaan

$$L^{**}(\Phi_V(\mathbf{v}))(L') = \Phi_V(\mathbf{v}) \circ L^*(L') = \Phi_V(\mathbf{v})(L^*(L')).$$

Edelleenkin duaalikuvauksen määritelmän nojalla pätee $L^*(L') = L'L$, joten

$$L^{**}(\Phi_V(\mathbf{v}))(L') = \Phi_V(\mathbf{v})(L'L).$$

Kanonisen kuvauksen määritelmän nojalla tästä saadaan loppujen lopuksi

$$L^{**}(\Phi_V(\mathbf{v}))(L') = \Phi_V(\mathbf{v})(L'L) = L'L(\mathbf{v}).$$

Seuraavaksi lasketaan $\Phi_W(L(\mathbf{v}))(L')$, kun L' on duaalin W^* alkio eli lineaarinen kuvaus $W \to K$. Tämä on hieman yksinkertaisempaa kuin edellinen lasku. Nimittäin $\mathbf{w} = L(\mathbf{v})$ on jokin vektoriavaruuden W alkio, joten kanonisen kuvauksen Φ_W määritelmän nojalla pätee

$$\Phi_W(L(\mathbf{v}))(L') = \Phi_W(\mathbf{w})(L') = L'(\mathbf{w}) = L'(L(\mathbf{v})) = L'L(\mathbf{v}).$$

Ollaan osoitettu, että jokaisella $\mathbf{v} \in V$ ja $L' \in W^*$ pätee

$$L^{**}(\Phi_V(\mathbf{v}))(L') = \Phi_W(L(\mathbf{v}))(L').$$

Koska kiinteällä $\mathbf{v}$ sekä $L^{**}(\Phi_V(\mathbf{v})$ ja $\Phi_W(L(\mathbf{v}))$ ovat kuvauksia $W^* \to K$ (eli biduaalin W^{**} alkioita), tästä seuraa, että kaikilla $\mathbf{v} \in V$ pätee

$$L^{**}(\Phi_V(\mathbf{v})) = \Phi_W(L(\mathbf{v}))$$

eli

$$(L^{**} \circ \Phi_V)(\mathbf{v}) = (\Phi_W \circ L)(\mathbf{v}).$$

Koska tämä on totta kaikilla $\mathbf{v}$, on voimassa yhtälö

$$L^{**} \circ \Phi_V = \Phi_W \circ L.$$

Muistutus: kun X ja Y ovat joukkoja merkintä Y^X tarkoittaa kaikkien kuvausten $X \to Y$ muodostamaa joukkoa,

$$Y^X = \{f \colon X \to Y\}.$$

5. Olkoot V, U, W K-vektoriavaruuksia. Olkoon $F \colon V \times U \to W$ kuvaus. Jokaisella $\mathbf{v} \in V$ määritellään $F_{\mathbf{v}} \colon U \to W$ kaavalla

$$F_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = F(\mathbf{v}, \mathbf{u}).$$

Koska $F_{\mathbf{v}} \in W^U$ kaikilla $\mathbf{v} \in V$, voidaan määritellä kuvaus $\tilde{F} \colon V \to W^U$ kaavalla $\tilde{F}(\mathbf{v}) = F_{\mathbf{v}}$. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.

(i) Kuvaus F on bilineaarinen.

(ii) $F_{\mathbf{v}} \in L(U, W)$ kaikilla $\mathbf{v} \in V$ ja kuvaus $\tilde{F} \colon V \to L(U, W)$ on lineaarinen.

Ratkaisu: Tutkitaan ehtoa (ii) tarkemmin. Vaatimus ”$F_{\mathbf{v}} \in L(U, W)$ kaikilla $\mathbf{v} \in V$” tarkoittaa tasan sitä, että kaikilla $\mathbf{v} \in V$, kaikilla $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in U$ ja kaikilla $k \in K$ pätee

$$F(\mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{u}') = F_{\mathbf{v}}(\mathbf{u} + \mathbf{u}') = F_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) + F_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}') = F(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + F(\mathbf{v}, \mathbf{u}'), \tag{1}$$

$$F(\mathbf{v}, k\mathbf{u}) = F_{\mathbf{v}}(k\mathbf{u}) = kF_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = kF(\mathbf{v}, \mathbf{u}). \tag{2}$$

Toisin sanoen ehto ”$F_{\mathbf{v}} \in L(U, W)$ kaikilla $\mathbf{v} \in V$” tarkoittaa sitä, että kuvaus F on lineaarinen toisen muuttujan suhteen. Oletetaan, että tämä ehto on voimassa, tällöin kuvausta $\tilde{F}$ voidaan ajatella kuvauksena $\tilde{F} \colon V \to L(U, W)$. Tässä sekä V, että $L(U, W)$ ovat K-vektoriavaruuksia. Lisäksi kuvaus $\tilde{F}$ on tällöin lineaarinen kuvaus jos ja vain jos kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$, $k \in K$ pätee

$$\tilde{F}(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = \tilde{F}(\mathbf{v}) + \tilde{F}(\mathbf{v}'), \tag{3}$$

$$\tilde{F}(\mathbf{v}) = k\tilde{F}(\mathbf{v}). \tag{4}$$

Näiden yhtälöiden kumpikin puoli on eräs kuvaus $U \to W$. Koska kaksi kuvausta ovat samoja jos ja vain jos niillä on samat arvot kaikilla lähtöjoukon alkioilla, yhtälöt 3-4 ovat voimassa jos ja vain jos kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$, $k \in K$ ja jokaisella $\mathbf{u} \in U$ pätee
(5)
$$F(\mathbf{v}+\mathbf{v}', \mathbf{u}) = \tilde{F}(\mathbf{v}+\mathbf{v}')(\mathbf{u}) = (\tilde{F}(\mathbf{v})+\tilde{F}(\mathbf{v}'))(\mathbf{u}) = \tilde{F}(\mathbf{v})(\mathbf{u})+\tilde{F}(\mathbf{v}')(\mathbf{u}) = F(\mathbf{v}, \mathbf{u})+F(\mathbf{v}', \mathbf{u}),$$

(6)
$$F(k\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \tilde{F}(k\mathbf{v})(\mathbf{u}) = k(\tilde{F}(\mathbf{v}))(\mathbf{u}) = kF(\mathbf{v}, \mathbf{u}).$$

Toisin sanoen toinen ehdon (ii) osa on yhtä pitävä sen kanssa, että kuvaus F on lineaarinen ensimmäisen muuttujan suhteen.

On näytetty, että ehto (ii) on yhtä pitävä kuvauksen F bilineaarisuuden kanssa.

6. Jatkoa edelliselle tehtävälle. Määritellään kuvaus $\Psi\colon L(V, U; W) \to L(V, L(U, W))$, $\Psi(F) = \tilde{F}$. Edellisen tehtävän nojalla tämä kuvaus on hyvin määritelty. Osoita, että Ψ on K-vektoriavaruuksien isomorfismi.

Ratkaisu: Tarkastellaan yleisempää astelmaa ja määritellään kuvaus $\Psi\colon W^{V\times U} \to (U^W)^V$ kaavalla $\Psi(F) = \tilde{F}$. Tällöin tehtävän kuvaus on tämän kuvauksen rajoittuma. Osoitetaan, että Ψ on K-vektoriavaruuksen isomorfismi. Mietitään ensin tarkemmin mistä vektoriavaruuksista on kyse.

Kun Y on K-vektoriavaruus ja X mielivaltainen joukko, joukossa
$$Y^X = \{f\colon X \to Y\}$$
voidaan määritellä luonnollinen vektoriavaruuden struktuuri, jossa laskutoimituksia määritellään "pisteittäin", eli kaavoilla
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(kf)(x) = kf(x),$$
kaikilla $f, g \in Y^X$, $x \in X$. Helposti nähdään, että Y^X on K-vektoriavaruus näiden laskutoimitusten suhteen (vrt. esim. 2.4(2), jossa tarkastellaan tämän konstruktion erikoistapausta, jossa $Y = K$ on skalaarikunta).

Olkoot V, U, W K-vektoriavaruuksia. Tällöin edellisen nojalla U^W ja $W^{V\times U}$ ovat K-vektoriavaruuksia pisteittäisten laskutoimitusten suhteen. Koska U^W on K-vektoriavaruus, samalla periaatteella myös $(U^W)^V$ on vektoriavaruus. Luentomateriaalissa määritelty avaruus $L(V, U; W)$ (bilineaaristen kuvausten $V \times U \to W$ muodostama vektoriavaruus) on tällöin vektoriavaruuden $W^{V\times U}$ *aliavaruus*. Samoin vektoriavaruus $L(V, L(U, W))$ (lineaaristen kuvausten $V \to L(U, W)$ muodostama aliavaruus) on avaruuden $(U^W)^V$ aliavaruus.

Tutkitaan onko kuvaus $\Psi\colon W^{V\times U} \to (U^W)^V$, $\Psi(F) = \tilde{F}$ lineaarinen. Olkoot $F, F'\colon V\times U \to W$ kuvauksia ja olkoon $k \in K$. Tällöin kaikilla $\mathbf{v} \in V$ pätee
$$\Psi(F+F')(\mathbf{v}) = F \tilde{+} F'(\mathbf{v}) = (F+F')_{\mathbf{v}}.$$

Toisaalta jokaisella $\mathbf{u} \in U$ pätee kuvausten (pisteittaisen) yhteenlaskun määritelmän nojalla

$$(F+F')_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = (F+F')(\mathbf{v},\mathbf{u}) = F(\mathbf{v},\mathbf{u})+F'(\mathbf{v},\mathbf{u}) = F_{\mathbf{v}}(\mathbf{u})+F'_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = (F_{\mathbf{v}}+F'_{\mathbf{v}})(\mathbf{u}).$$

Koska tämä pätee kaikilla $\mathbf{u} \in U$, saadaan kaikilla $\mathbf{v} \in V$ yhtälö

$$\Psi(F + F')(\mathbf{v}) = (F + F')_{\mathbf{v}} = F_{\mathbf{v}} + F'_{\mathbf{v}} = (\Psi(F) + \Psi(F'))(\mathbf{v}).$$

Koska tämä pätee kaikilla $\mathbf{v} \in V$, saadaan

$$\Psi(F + F') = \Psi(F) + \Psi(F').$$

Yhtälö $\Psi(kF) = k\Psi(F)$ osoitetaan samalla tavalla. Näin ollen Ψ on lineaarinen.

Olkoon $G \in V \times U^W$ vektoriavaruuden $(U^W)^V$ alkio. Tällöin jokaisella $\mathbf{v}$ kuvaus $G(\mathbf{v})$ on kuvaus $U \to W$. Erityisesti $G(\mathbf{v})(\mathbf{u})$ on määritelty jokaisella $\mathbf{u} \in U$ ja on avaruuden W alkio. Määritellään kuvaus $\Phi\colon (U^W)^V \to W^{V\times U}$ kaavalla

$$\Phi(G)(\mathbf{v},\mathbf{u}) = (G(\mathbf{v}))(\mathbf{u}), \mathbf{v} \in V, \mathbf{u} \in U.$$

Osoitetaan, että kuvaus Φ on kuvauksen Ψ käänteiskuvaus. Olkoon $F \in W^{V\times U}$ ja olkoot $\mathbf{v} \in V, \mathbf{u} \in U$. Tällöin

$$\Phi(\Psi(F))(\mathbf{v},\mathbf{u}) = (\Psi(F)(\mathbf{v}))(\mathbf{u}) = F(\mathbf{v},\mathbf{u}).$$

Koska tämä pätee kaikilla $\mathbf{v} \in V, \mathbf{u} \in U$, tästä seuraa, että

$$\Phi(\Psi(F)) = F.$$

Tämä taas pätee kaikilla $F \in W^{V\times U}$, joten $\Phi\circ\Psi = \mathrm{id}$. Samalla tavalla nähdään, että $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$. Näin ollen Ψ on bijektio. On osoitettu, että Ψ on K-vektoriavaruuksien $W^{V\times U}$ ja $(U^W)^V$ välinen isomorfismi.

Olkoon $F \in W^{V\times U}$. Edellisen tehtävän nojalla $\Psi(F)$ on avaruuden $L(V, L(U, W))$ alkio jos ja vain jos $F \in L(V, U; W)$. Näin ollen isomorfismi Ψ määrittelee rajoittuman $\Psi\colon L(V, U; W) \to L(V, L(U, W))$, joka on myös vektoriavaruuksien välinen isomorfismi.

7.* Olkoon V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus. Oletetaan, että $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ on eräs duaalin V^* kanta. Osoita, että on olemassa yksikäsitteinen avaruuden V kanta $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ siten, että $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ on tämän kannan duaalikanta.

Ratkaisu: Proposition 2.121 nojalla on olemassa kanoninen isomorfismi $\Phi\colon V \to V^{**}$, $\Phi(\mathbf{v})(L) = L(\mathbf{v})$. Jos $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ on avaruuden V kanta, siten, että $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ on tämän kannan duaalikanta, niin kaikilla $i, j = 1, \ldots, n$ pätee

$$\Phi(\mathbf{e}_i)(L_j) = L_j(\mathbf{e}_i) = \delta_{ij}.$$

Tämä tarkoittaa sitä, että jono $(\Phi(\mathbf{e}_1), \dots, \Phi(\mathbf{e}_n))$ on kannan $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ duaalikanta (duaalissa $(V^*)^*$). Koska duaalikanta on yksikäsitteinen ja Φ on isomorfismi (erityisesti bijektio), tästä seuraa, että etsitty kanta on yksikäsitteinen - sen täytyy olla kannan $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ duaalikannan ”alkukuva” bijektiossa Φ. Kääntäen olkoon $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ kannan $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ duaalikanta. Koska Φ on bijektio, jokaisella $i = 1, \dots, n$ on olemassa $\mathbf{e}_i \in V$, siten, että $\Phi(\mathbf{e}_i) = \varepsilon_i$. Koska Φ on isomorfismi, jono $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ on avaruuden V kanta. Lisäksi kaikilla $i, j = 1, \dots, n$ pätee tällöin

$$L_j(\mathbf{e}_i) = \Phi(\mathbf{e}_i)(L_j) = \varepsilon^i(L_j) = \delta_{ij},$$

joten $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ on kannan $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ duaalikanta.

8.* Olkoon V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus ja olkoon $E = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$ sen kanta. Olkoon $\varepsilon = (\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^m)$ tämän kannan duaalikanta.
Määritellään lineaarinen isomorfismi $L_E \colon V \to V^*$ siten, että kaikilla $i = 1, \dots, m$ pätee $L_E(\mathbf{e}_i) = \varepsilon^i$.
a) Osoita esimerk(e)illä, että L ei yleensä ole ”kanoninen” eli voi hyvinkin rippua kannan valinnasta. Toisin sanoen näytä, että jos E' on toinen kanta, niin voi olla, että $L_E \neq L_{E'}$. Yritä keksiä mahdollisimman yleispäteviä esimerkkejä.
b) Olkoon $\Phi \colon V \to V^{**}$ kanoninen kuvaus, $\Phi(\mathbf{v})(L) = L(\mathbf{v})$. Olkoot E ja ε kuten a)-kohdassa. Osoita, että $\Phi = L_\varepsilon L_E$, toisin sanoen Φ kuvaa kannan E sen duaalikannan duaalikannaksi.

Ratkaisu: Ratkaisu: a) Jos $V = \{0\}$ on triviaali 0-ulotteinen vektoriavaruus, $V = V^* = \{0\}$ jolloin on olemassa vain yksi isomorfismi $V \to V^*$. Toisin sanoen tässä epämielenkiintoisessa tapauksessa isomorfismi L_E on yksikäsitteinen. Suljettaan tämä tapaus tarkastelusta pois.

Olkoon V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus, $\dim V \geq 1$ ja olkoon $E = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$ jokin sen kanta. Tällöin helposti nähdään, että smillä tahansa skalaarilla $k \neq 0_K$ jono $E' = (k\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$ on myös avaruuden V kanta. Nyt

$$L_E(\mathbf{e}_1)(k\mathbf{e}_1) = \varepsilon^1(k\mathbf{e}_1) = k, \text{ ja}$$

$$L_{E'}(\mathbf{e}_1)(k\mathbf{e}_1) = 1/k.$$

Näin ollen, jos kunnasta K löytyy alkio $k \neq 0$ jolle $k \neq 1/k$, toisin sanoen jolle $k^2 \neq 1_K$, niin $L_E \neq L_{E'}$. Yhtälö $k^2 = 1$ voidaan kirjoittaa muotoon $(k-1)(k+1) = k^2 - 1 = 0$. Koska kunnassa on voimassa nollansääntö, tästä seuraa, että joko $k - 1 = 0$ tai $k + 1 = 0$, eli $k = \pm 1$. Jokaisessa kunnassa on ainakin alkiot $0, 1, -1$, joista ensimmäinen on varmasti eri kuin muut, mutta 1 voi olla sama kuin -1. Tästä nähdään välittömästi, että kun kunnassa on enemmän kuin kolme alkiota, saadaan yllä annetulla konstruktiolla esimerkki kahdesta kannasta E, E', joille $L_E \neq L_{E'}$. Jos kunnassa on korkeintaan kolme alkiota (jolloin $K = \mathbb{Z}_2$ tai $K = \mathbb{Z}_3$) tämä konstruktio ei anna tarvittavaa esimerkkiä.

Tarkastellaan seuraavaksi toisentyyppista konstruuktiota, joka toimii jokaisessa äärellisulotteisessa K-vektoriavaruudessa V, jonka ulottuvuus on ainakin kaksi. Nimittäin olkoon $m \geq 2$ ja olkoon $E = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m)$ avaruuden V kanta. Tällöin (tarkista!) jono $E' = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m)$ on myös avaruuden V kanta. Olkoon $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ kannan E duaalikanta ja vastaavasti $(\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_m)$ kannan E duaalikanta. Tällöin

$$L_E(\mathbf{e}'_1)(\mathbf{e}'_1) = \varepsilon^1(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + \varepsilon^2(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = 2, \text{ ja}$$

$$L_{E'}(\mathbf{e}'_1)(\mathbf{e}'_1) = 1.$$

Koska kunnassa ei koskaan päde $2 = 1$ (sillä muuten $1 = 0$), saadaan esimerkki, jossa $L_E \neq L_{E'}$.

On löydetty esimerkkejä kannoista E, E', joille $L_E \neq L_{E'}$ kun $\dim V \geq 2$ tai kun skalaarikunnassa on enemmän kuin kolme alkiota.

Tarkastellaan vielä tapausta, jossa $\dim V = 1$ ja kunnan K kaikille alkioille k pätee $k^2 = 1$. Koska V on 1-ulotteinen, voi olettaa, että $V = K$. Tällöin avaruuden V kanta on muotoa $E_k = (k)$, missä $k \in K$, $k \neq 0_K$. Erityisesti eräs kanta on $E_1 = (1)$. Nyt jokaisella $k \in K, k \neq 0_K$ pätee

$$L_{E_1}(k)(1) = kL_{E_1}(1)(1) = k,$$

$$L_{E_k}(k)(1) = L_{E_k}(k)(k^{-1} \cdot k) = k^{-1}.$$

Koska oletamme, että $k^2 = 1$, kaikilla $k \in K$ pätee $k = k^{-1}$. Koska (1) ja (k) kumpikin muodostavat kannan, edellisestä seuraa, että tässä erikoistapauksessa $L_{E_1} = L_{E_k}$. Erityisesti isomorfismi L_E on sama kannasta riippumatta.

Yhteenveto: isomorfismi L_E riippuu kannan valinnasta aina, paitsi erikoistapauksissa $\dim V = 0$ tai kun $\dim V = 1$ ja $|K| \leq 3$.

b) Kanoninen kuvaus $\Phi \colon V \to V^{**}$ on määritelty kaavalla $\Phi(\mathbf{v})(L) = L(\mathbf{v})$, $\mathbf{v} \in M, L \in M^*$. Olkoon $E = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m)$ avaruuden V kanta ja olkoon $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^m)$ sen duaalikanta. Osoitetaan, että jono $(\Phi(\mathbf{e}_1), \ldots, \Phi(\mathbf{e}_m))$ on viimeksimainitun duaalikanta. Tämä saadaan suoralla laskulla, sillä kaikilla $i, j = 1, \ldots, m$ pätee

$$\Phi(\mathbf{e}_i)(\varepsilon^j) = \varepsilon^j(\mathbf{e}_i) = \delta_{ij}.$$