Äärellisulotteinen lineaarialgebra, kevät 2015.
Harjoitus 5.
Ratkaisuehdotuksia.

1. Olkoot V ja W äärellisulotteisia K-vektoriavaruuksia ja olkoon $L\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus.
   a) Osoita, että L on injektio jos ja vain jos on olemassa *lineaarinen* kuvaus $L'\colon W \to V$ siten, että $L'L = \mathrm{id}_V$. Onko tällainen kuvaus L' silloin yksikäsitteinen?
   b) Osoita, että L on surjektio jos ja vain jos on olemassa *lineaarinen* kuvaus $L'\colon W \to V$ siten, että $LL' = \mathrm{id}_W$. Onko tällainen kuvaus L' silloin yksikäsitteinen?

   Ratkaisu: Jos $L\colon V \to W$ ja $L'\colon W \to V$ ovat sellaisia kuvauksia, joille pätee $L'L = \mathrm{id}_V$, niin Harjoituksen 2.1. nojalla L on injektio ja L' on surjektio. Tästä saadaan ehdon välttämättömyys kummassakin kohdassa a) ja b). Näin ollen riittää osoittaa välttämättömyys.

   a) Oletetaan, että $L\colon V \to W$ on lineaarinen injektio. Olkoon $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ avaruuden V kanta. Koska nyt $\operatorname{Ker} L = \{0\}$ on triviaali avaruus, Proposition 2.92. todistuksesta seuraa, että jono $F = (L(\mathbf{v}_1), \ldots, L(\mathbf{v}_n))$ on W:n aliavaruuden $L(W)$ kanta. Tämän näkee helposti myös suoraankin (olennaisesti koska $L\colon V \to \operatorname{Im} V$ on lineaarinen isomorfismi). Merkitään $\mathbf{w}_i = L(\mathbf{w}_i)$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Koska $\operatorname{Im} L$ on avaruuden W aliavaruus, kanta F voidaan täydentää avaruuden W kannaksi (Propositio 2.48)
   $$E = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m).$$
   Tässä $m = \dim W - n = \dim W - \dim V$. Jos $L'\colon W \to V$ on lineaarinen kuvaus, jolle pätee $L'L = \mathrm{id}_V$, niin kaikilla $i = 1, \ldots, n$ täytyy päteä
   $$L'(\mathbf{w}_i) = L'(L(\mathbf{v}_i)) = \mathbf{v}_i.$$
   Määritellään lineaarinen kuvaus $L'\colon W \to U$ asettamalla $L'(\mathbf{w}_i) = \mathbf{v}_i$, $i = 1, \ldots, n$ ja $L'(\mathbf{u}_j) = \mathbf{x}$, missä $\mathbf{x} \in V$ on mielivaltainen avaruuden V vektori (esimerkiksi nolla-vektori), $j = 1, \ldots, m$. Proposition 2.57 nojalla tällainen lineaarinen kuvaus L' on olemassa ja yksikäsitteinen. Lisäksi sen määritelmän perusteella kaikilla $i = 1, \ldots, n$ pätee
   $$(L'L)(\mathbf{v}_i) = L'(L(\mathbf{v}_i)) = L'(\mathbf{w}_i) = \mathbf{v}_i = \mathrm{id}(\mathbf{v}_i).$$
   Tässä kumpikin $L'L$ ja id_V on lineaarinen kuvaus $V \to V$. Proposition 2.57 (yksikäsiteisyys) seuraa nyt, että $L'L = \mathrm{id}_V$.

   Kuvaus L' on yksikäsitteinen jos ja vain jos $\operatorname{Im} L = W$ eli jos ja vain L on surjektiivinen tai jos $V = \{\mathbf{0}_V\}$ on triviaali avaruus. Nimittäin jos L on myös surjektio, se on jopa isomorfismi, niin L' on välttämättä sen käänteiskuvaus. Jos $V = \{\mathbf{0}_V\}$ on triviaali avaruus, selvästi on muutenkin olemassa vain yksi kuvaus $L'\colon W \to V$, nimittäin ainoa mahdollinen vakiokuvaus (eli nollakuvaus).

   Oletetaan kääntäen, että L ei ole surjektio ja V ei ole triviaali. Tällöin yllä $m \geq 1$ (F ei ole koko avaruuden W kanta) ja lisäksi voidaan valita $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in V$ siten että

$\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$. Tällöin asettamalla yllä $L'(\mathbf{u}_j) = \mathbf{x}$ tai $L'(\mathbf{u}_j) = \mathbf{x}'$ saadaan konstruoitua kaksi erilaista lineaarista kuvausta L', joille kummallekin pätee $L'L = \mathrm{id}_V$.

b) Oletetaan, että $L\colon V \to W$ on surjektio. Valitaan avaruudelle W jokin kanta $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$. Jos $L'\colon W \to V$ on lineaarinen kuvaus, jolle pätee $LL' = \mathrm{id}_W$, niin erityisesti kaikilla $i = 1, \dots, m$ pätee

$$L(L'(\mathbf{w}_i)) = \mathbf{w}_i.$$

Toisin sanoen, jos L' on olemassa ja merkitään $\mathbf{v}_i = L'(\mathbf{w}_i) \in V$, niin $L(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ kaikilla $i = 1, \dots, m$. Tämä havainto antaa idean sille, miten L' pitäisi konstruoida.

Nimittäin, koska L on surjektio, jokaisella $i = 1, \dots, m$ voidaan valita $\mathbf{v}_i \in V$ siten, että $L(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$. Koska $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ on avaruuden V kanta, Proposition 2.57 nojalla on olemassa (*yksikäsitteinen*) lineaarinen kuvaus $L'\colon W \to V$ siten, että $L'(\mathbf{w}_i) = \mathbf{v}_i$. Koska toisaalta $L(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$, niin kaikilla $i = 1, \dots, m$ pätee

$$(LL')(\mathbf{w}_i) = L(L'(\mathbf{w}_i)) = L\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i = \mathrm{id}_W(\mathbf{w}_i).$$

Koska $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ on avaruuden V kanta, tästä seuraa Proposition 2.57 (yksikäsitteisyys) nojalla, että $LL' = \mathrm{id}_W$.

Osoitetaan, että L' on yksikäsitteinen jos ja vain jos L on myös injektio (eli on isomorfismi). Jos L on isomorfismi, sillä on käänteiskuvaus $L^{-1}\colon W \to V$, jolloin kertomalla yhtälö $L'L = \mathrm{id}_W$ oikealta tällä käänteiskuvauksella saadaan $L' = L^{-1}$. Erityisesti silloin L' on yksikäsitteinen.

Oletetaan kääntäen, että L ei ole injektio. Tällöin $\operatorname{Ker} L$ on epätriviaali aliavaruus (Propositio 2.55) on olemassa $\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} L$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_V$. Valitaan, kuten yllä jokaisella $i = 1, \dots, n$ vektori $\mathbf{v}_i \in V$ siten, että $L(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$. Tällöin jokaisella $i = 1, \dots, n$ vektori $\mathbf{v}_i' = \mathbf{v}_i + \mathbf{x}$ myös toteuttaa ehdon $L(\mathbf{v}_i') = \mathbf{w}_i$, lisäksi $\mathbf{v}_i' \neq \mathbf{v}_i$. Toisin sanoen vektorien $\mathbf{v}_i$ valinta on tällöin ei-yksikäsitteinen, joten myös kuvaus L' voidaan konstruoida yllä annetun reseptin mukaan ainakin kahdella eri tavalla.

2. Olkoon $L\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus. Olkoon $E = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-m})$ sellainen avaruuden V kanta, jolle $E' = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$ on aliavaruuden $\operatorname{Ker} L$ kanta (kts. Proposition 2.92 todistusta). Osoita, että jono $(L(\mathbf{v}_1), \dots, L(\mathbf{v}_{n-m}))$ on vapaa.

Ratkaisu: Olkoot $k_1, \dots, k_n \in K$ sellaisia skalaareja, että

$$k_1 L(\mathbf{v}_1) + k_2 L(\mathbf{v}_2) + \ldots + k_{n-m} L(\mathbf{v}_{n-m}) = \mathbf{0}_W. \tag{1}$$

Koska L on lineaarinen tämä yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$L(k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_{n-m}\mathbf{v}_{n-m}) = \mathbf{0}_W.$$

Merkitään $\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_{n-m}\mathbf{v}_{n-m} \in V$, tällöin edellisen nojalla $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$, eli $\mathbf{v} \in \operatorname{Ker} L$. Koska $E' = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$ on avaruuden $\operatorname{Ker} L$ kanta, tästä erityisesti seuraa, että $\mathbf{v}$ voidaan kirjoittaa (yksikäsitteisellä tavalla) lineaarisena kombinaationa

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + a_1\mathbf{u}_2 + \ldots + a_m\mathbf{u}_m.$$

Koska toisaalta $\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_{n-m}\mathbf{v}_{n-m}$, saadaan yhtälö

$$a_1\mathbf{u}_1 + a_1\mathbf{u}_2 + \ldots + a_m\mathbf{u}_m = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_{n-m}\mathbf{v}_{n-m}.$$

Siirtämällä kaikki termit vasemmalle puolelle nähdään, että

$$a_1\mathbf{u}_1 + a_1\mathbf{u}_2 + \ldots + a_m\mathbf{u}_m + (-k_1)\mathbf{v}_1 + (-k_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (-k_{n-m})\mathbf{v}_{n-m} = \mathbf{0}_V.$$

Koska jono $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-m})$ on vapaa, tästä seuraa, että $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = k_1 = \ldots = k_{n-m} = 0_K$, erityisesti $k_1 = \ldots = k_{n-m} = 0_K$. Näin ollen kombinaatio (1) on triviaali. On osoitettu, että jono $(L(\mathbf{v}_1), \ldots, L(\mathbf{v}_{n-m}))$ on vapaa.

3. a) Olkoon $L\colon \mathbb{Z}_5^4 \to \mathbb{Z}_5^2$ $\mathbb{Z}_5$-lineaarinen kuvaus, jolle pätee

$$\operatorname{Ker} L = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}_5^4 \mid x_1 = 2_5x_3, x_2 = -4_5x_4\}.$$

Osoita, että L on surjektio. Anna kaksi erilaista esimerkkiä kuvauksesta L, joka toteuttaa tehtävänannon.
b) Onko olemassa $\mathbb{C}$-lineaarista kuvausta $L\colon \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^2$, jolle pätee

$$\operatorname{Ker} L = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{C}^5 \mid x_1 = (1+i)x_3, x_2 = x_4 = -ix_5\}?$$

Ratkaisu: a) Aloitetaan laskemalla $\dim \operatorname{Ker} L$. Huomataan, että ytimen alkio $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ määräytyy täysin sen koordinaatteista x_3 ja x_4. Nimittäin joukon $\operatorname{Ker} L$ määritelmästä seuraa, että $\mathbf{x} = (2_5x_3, -4_5x_4, x_3, x_4)$. Toisin sanoen jos vektorin $\mathbf{x}$ koordinaatit x_3 ja x_4 tunnetaan, myös koko vektori $\mathbf{x}$ tunnetaan. Koordinaatit x_3 ja x_4 voidaan taas valita vapaasti. Joukon $\operatorname{Ker} L$ alkioilla siis näyttää olevan kaksi "vapauden astetta". Tämä vihjaa siihen suuntaan, että tämän avaruuden dimension on oltava kaksi. Osoitetaan tämä formaalisti. Valitsemalla $x_3 = 1_5$, $x_4 = 0_5$ saadaan avaruuden $\operatorname{Ker} L$ vektori $\mathbf{v}_1 = (2_5, 0_5, 1_5, 0_5)$. Valitsemalla $x_4 = 1_5$, $x_3 = 0_5$ saadaan avaruuden $\operatorname{Ker} L$ vektori $\mathbf{v}_2 = (0_5, -4_5, 0_5, 1_5)$. Osoitetaan, että $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ on avaruuden $\operatorname{Ker} L$ kanta. Olkoon $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \operatorname{Ker} L$. Tällöin $x_1 = 2_5x_3$, $x_2 = -4_5x_4$, joten $\mathbf{x} = (2_5x_3, -4_5x_4, x_3, x_4)$. Tästä nähdään, että

$$\mathbf{x} = x_3(2_5, 0_5, 1_5, 0_5) + x_4(0_5, -4_5, 0_5, 1_5).$$

Näin ollen vektorit $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$ virittävät avaruuden $\operatorname{Ker} L$. Näytetään vielä, että jono $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ on vapaa. Olkoot $k, k' \in \mathbb{Z}_5$ sellaisia, että

$$k\mathbf{v}_1 + k'\mathbf{v}_2 = (0_5, 0_5, 0_5, 0_5).$$

Tässä vasemmanpuoleinen lauseke on jono

$$k_1(2_5, 0_5, 1_5, 0_5) + k_2(0_5, -4_5, 0_5, 1_5) = (2_5k_1, -4_5k_2, k_1, k_2).$$

Koska toisalta tämän jonon jokainen koordinaatti on kunnan $\mathbb{Z}_5$ nolla-alkio, tästä saadaan suoraan, että $k_1 = 0_5 = k_2$. Näin ollen jono $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ on vapaa.

Avaruudelle $\operatorname{Ker} L$ löydettiin kanta, jonka pituus on kaksi, näin ollen $\dim \operatorname{Ker} L = 2$. Proposition 2.92 nojalla pätee yhtälö

$$\dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L = \dim \mathbb{Z}_5^4 = 4.$$

Sijoittamalla tähän $\dim \operatorname{Ker} L = 2$, nähdään, että $\dim \operatorname{Im} L = 2$.Toisaalta $\operatorname{Im} L$ on avaruuden $\mathbb{Z}_5^2$ aliavaruus. Tämän avaruuden dimensio Z_5-avaruutena on kaksi. Näin ollen $\dim \operatorname{Im} L = 2 = \dim \mathbb{Z}_5^2$, missä $\operatorname{Im} L$ on avaruuden $\mathbb{Z}_5^2$ aliavaruus. Propositiosta 2.48 seuraa, että tällöin $\operatorname{Im} L = \mathbb{Z}_5^2$. Toisin sanoen L on surjektio.

Yksinkertaisimmat esimerkit lineaarisesta kuvauksesta $\mathbb{Z}_5^4 \to \mathbb{Z}_5^2$ jonka ydin on joukko

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}_5^4 \mid x_1 = 2_5 x_3, x_2 = -4_5 x_4\}$$

ovat kuvaukset $L, L' \colon \mathbb{Z}_5^4 \to \mathbb{Z}_5^2$,

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 2_5 x_3, x_2 + 4_5 x_4),$$

$$L'(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + 4_5 x_4, x_1 - 2_5 x_3).$$

b) Aloitetaan taas laskemalla $\dim_{\mathbb{C}} U$, missä

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{C}^5 \mid x_1 = (1 + i)x_3, x_2 = x_4 = -ix_5\}.$$

Jono $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in U$ on täysin määrätty kun tunnetaan x_3 ja x_5. Tästä voidaan samalla tavalla kuin a)-kohdassa päätellä, että $\dim U = 2$. Olkoon $: \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^2$ lineaarinen kuvaus, jolle pätee $\operatorname{Ker} L = U$. Tällöin Proposition 2.48 nojalla

$$\dim \operatorname{Im} L = \dim \mathbb{C}^5 - \dim U = 5 - 2 = 3.$$

Toisaalta $\operatorname{Im} L \subset \mathbb{C}^2$, joten $\dim \operatorname{Im} L \leq \dim \mathbb{C}^2 = 2$. Saadaan ristiriita. Tästä seuraa, että kuvausta L ei voi olla olemassa.

4. Tarkastellaan $\mathbb{R}$-vektoriavaruutta $\mathbb{R}^2$.
a) Olkoon $E = ((1, 0), (0, 1))$ standardikanta ja olkoon $E' = ((1, 1), (1, -2))$. Osoita, että E' on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta ja muodosta kannanvaihtomatriisit $A = [E' \mid E]$ ja $B = [E \mid E']$. Laske AB ja BA suoraan matriisikertolaskun määritelmästä lähtien ja totea, että lopputulos on kummassakin tapauksessa yksikkömatriisi.
b) Määritellään kuvaus $L \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kaavalla $L(x) = ix$, missä $x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ ajatellaan kompleksilukuna (ja i on imaginääriyksikkö). Osoita, että L on $\mathbb{R}$-lineaarinen. Muodosta matriisit $[L]_E$, $[L]_{E',E}$. Laske tämän jälkeen matriisi $[L]_{E'}$ kahdella tavalla - suoraan määritelmästä lähtien sekä kannanvaihtokaavalla (2.88) ja matriisin $[L]_E$ avulla.

Ratkaisu: a) Merkitään $\mathbf{v}_1 = (1, 1), \mathbf{v}_2 = (1, -2)$. Aloitetaan etsimällä standardikannan vektoreille $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ esitys muodossa

$$\mathbf{e}_i = x_i \mathbf{v}_1 + y_i \mathbf{v}_2, i = 1, 2.$$

Tällainen esitys tarvitaan myöhemmin joka tapauksessa, jotta voisimme muodostaa kannanvaihtomatriisin $[E' \mid E]$. Toisaalta, jos tällainen esitys löytyy kummallakin $i = 1, 2$, niin vektorien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ virittämä aliavaruus W sisältää kummankin standardikannan vektorin. Tästä seuraa, että $W = \mathbb{R}^2$. Tällöin jono $E' = ((1,1),(1,-2))$ ainakin virittää avaruuden $\mathbb{R}^2$. Koska tässä jonossa on tasan kaksi alkiota ja koska $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ Seurauksen 2.49.2 tällöin voidaan päätellä myös, että E' on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.

Kertoimet x_i, y_i toteuttavat yhtälöitä

$$(1,0) = \mathbf{e}_1 = x_1(1,1) + y_1(1,-2) = (x_1 + y_1, x_1 - 2y_1),$$

$$(0,1) = \mathbf{e}_2 = x_2(1,1) + y_2(1,-2) = (x_2 + y_2, x_2 - 2y_2).$$

Vertaamalla komponentteja tästä saadaan yhtälöryhmät

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 1 \\ x_1 - 2y_1 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 + y_2 = 0 \\ x_2 - 2y_2 = 1, \end{cases} .$$

Ratkaisemalla yhtälöryhmät saadaan $x_1 = 2/3$, $y_1 = 1/3$, $x_2 = 1/3, y_2 = -1/3$. Näin ollen olemme samalla laskulla sekä näyttäneet, että E' on kanta (kts. yllä), että laskettiin kannanvaihtomatriisi

$$A = [E' \mid E] = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

Toinen kannanvaihtomatriisi on helpompi muodostaa, sillä selvästi pätee

$$(1,1) = 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 1 \cdot \mathbf{e}_2,$$

$$(1,-2) = 1 \cdot \mathbf{e}_1 - 2 \cdot \mathbf{e}_2, \text{ joten}$$
$$B = [E \mid E'] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Lasketaan AB ja BA suoraan matriisikertolaskun määritelmästä lähtien (huomaa, että koska tiedämme etukäteen minkä vastauksen täytyy olla, tästä saadaan myös mainio tapa tarkistaa, että laskut menivät varmasti oikein). Saadaan

$$BA = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2/3 + 1 \cdot 1/3 & 1 \cdot 1/3 + 1 \cdot (-1/3) \\ 1 \cdot 2/3 + (-2) \cdot 1/3 & 1 \cdot 1/3 + (-2) \cdot (-1/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

AB lasketaan samalla tavalla.

b) Kuvaus L on $\mathbb{R}$-lineaarinen, sillä kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ ja kaikilla $r \in \mathbb{R}$ pätee

$$L(x + y) = i(x + y) = ix + iy = L(x) + L(y),$$

$$L(rx) = i(rx) = r(ix) = rL(x).$$

Huomaa, että tässä käytämme hyväksi kompleksilukujen laskutoimitusten ominaisuuksia, nimittäin osittelulakia ja kertolaskun vaihdannaisuutta sekä liitännäisyyttä.

a)-kohdassa on laskettu standarikannan E vektoreiden esityksiä kannan E' vektorien lineaarisena kombinaationa,

$$\mathbf{e}_1 = 2/3(1,1) + 1/3(1,-2),$$

$$\mathbf{e}_2 = 1/3(1,1) - 1/3(1,-2).$$

Käyttämällä hyväksi näitä yhtälöitä saadaan

$$L(\mathbf{e}_1) = i(1,0) = i \cdot 1 = i = (0,1) = \mathbf{e}_2 = 1/3(1,1) - 1/3(1,-2),$$

$$L(\mathbf{e}_2) = i(0,1) = i \cdot i = -1 = (-1,0) = -\mathbf{e}_1 = -2/3(1,1) - 1/3(1,-2),$$

$$L(1,1) = i(1+i) = i + i^2 = -1 + i = (-1,1) = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 = -1/3(1,1) - 2/3(1,-2),$$

$$L(1,-2) = i(1-2i) = 2 + i = (2,1) = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = 5/3(1,1) + 1/3(1,-2).$$

Näistä puolestaan seuraa, että

$$[L]_E = [L]_{E,E} = \begin{bmatrix} 0 & -11 & 0, \end{bmatrix}$$

$$[L]_{E',E} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -1/3 & -1/3 \end{bmatrix},$$

$$[L]_{E',E'} = [L]_{E'} = \begin{bmatrix} -1/3 & 5/3 - 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Toinen tapa laskea matriisi $[L]_{E'}$ on käyttää a)-kohdan kannanvaihtomatriiseja A ja B sekä matriisia $[L]_E$. Nimittäin kannanvaihtokaavan (2.88) nojalla pätee

$$[L]_{E'} = [E' \mid E][L]_E[E \mid E'] = A[L]_E B = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0, \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1, \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 5/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Saadaan sama tulos kuin ennenkin, kuten pitää olla. Tämäkin on hyvä tapa tarkistaa laskuja.

Olkoon $(V,+,\cdot)$ $\mathbb{R}$-vektoriavaruus. Olkoon $\cdot'\colon \mathbb{C} \times V \to V$ $\mathbb{C}$-skalaarikertolasku joukossa V siten, että $(V,+,\cdot')$ on $\mathbb{C}$-vektoriavaruus. Tällöin $\mathbb{C}$-avaruutta $(V,+,\cdot')$ sanotaan $\mathbb{R}$-avaruuden $(V,+,\cdot)$ $\mathbb{C}$-*laajennukseksi* jos $\cdot'(r,\mathbf{v}) = \cdot(r,\mathbf{v})$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in V$.

5. Olkoon $V = (V,+,\cdot)$ $\mathbb{R}$-vektoriavaruus. Olkoon $J\colon V \to V$ $\mathbb{R}$-lineaarinen operaattori, jolle pätee $J^2 = -\mathrm{id}_V$. Määritellään joukossa V $\mathbb{C}$-skalaarikertolasku $\cdot'\colon C \times V \to V$ kaavalla

$$(a+ib) \cdot' \mathbf{v} = a\mathbf{v} + b(J\mathbf{v}).$$

a) Osoita, että $(V, +, \cdot')$ on $\mathbb{R}$-avaruuden V $\mathbb{C}$-laajennus.
b) Olkoon $A\colon V \to V$ kuvaus. Osoita, että A on $\mathbb{C}$-lineaarinen avaruuden $(V, +, \cdot')$ struktuurin suhteen jos ja vain jos se on $\mathbb{R}$-lineaarinen avaruuden V alkuperäisen $\mathbb{R}$-vektoriavaruuden struktuurin suhteen ja lisäksi pätee $AJ = JA$.

Ratkaisu: a) Selvästi $\cdot'(r, \mathbf{v}) = \cdot(r, \mathbf{v})$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in V$, sillä tällöin $r = r + 0i$, joten

$$r \cdot' \mathbf{v} = (r + 0i) \cdot' \mathbf{v} = r\mathbf{v} + 0J(\mathbf{v}) = r\mathbf{v}.$$

Osoitetaan, että $(V, +, \cdot')$ on $\mathbb{C}$-vektoriavaruus. Käydään läpi vektoriavaruuden määritelmän ehtoja.

(i)-(iv) Voimassa, koska koskevat ainoastaan yhteenlaskua, joka on sama kuin avaruuden V yhteenlasku.

(v) Olkoot $c = a + ib, c' = a' + ib' \in \mathbb{C}$. Tällöin kaikilla $\mathbf{v} \in V$ pätee

$$c(c'\mathbf{v}) = (a + ib)(a'\mathbf{v} + b'J\mathbf{v}) \overset{(i)}{=}$$

$$a(a'\mathbf{v} + b'J\mathbf{v}) + bJ(a'\mathbf{v} + b'J\mathbf{v}) \overset{(ii)}{=} aa'\mathbf{v} + (ab' + ba')J(\mathbf{v}) + bb'J^2(\mathbf{v}).$$

Huomaa, että kohdassa (i) kyse on $\mathbb{C}$-skalaarikertolaskun määritelmästä, kohdassa (ii) taas käytetään $\mathbb{R}$-vektoriavaruuden V ominaisuuksia sekä kuvauksen J lineaarisuutta. Koska oletuksen mukaan $J^2(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$, tästä seuraa, että

$$c(c'\mathbf{v}) = (aa' - bb')\mathbf{v} + (ab' + ba')J(\mathbf{v}) = (aa' - bb', ab' + a'b)\mathbf{v} = (cc')\mathbf{v}.$$

(vi) Olkoot $c = a + ib, c' = a' + ib' \in \mathbb{C}$ kuten yllä. Tällöin $c + c' = (a + a') + i(b + b')$, joten

$$(c + c')\mathbf{v} = (a + a')\mathbf{v} + (b + b')J(\mathbf{v}) = (a\mathbf{v} + bJ(\mathbf{v}) + (a'\mathbf{v} + b'J(\mathbf{v}) = c\mathbf{v} + c'\mathbf{v}.$$

(vii) Olkoot $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ja $c = a + bi \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$c(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a(\mathbf{v} + \mathbf{w}) + bJ(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a\mathbf{v} + a\mathbf{w} + bJ(\mathbf{v}) + bJ(\mathbf{w}).$$

Huomaa, että viimeisessä välivaiheessa käytetään kuvauksen J lineaarisuutta. Järjestämällä termejä uudestaan ja ottamalla yhteisiä tekijöitä saadaan

$$c(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (a\mathbf{v} + bJ(\mathbf{v})) + (a\mathbf{w} + bJ(\mathbf{w})) = c\mathbf{v} + c\mathbf{w}.$$

(viii) Voimassa, koska $1 \in \mathbb{R}$ ja edellä osoitettiin jo, että $\cdot'$ on sama kuin $\cdot$ kun skalaari on reaaliluku.

b) Olkoon $A\colon V \to V$ kuvaus. A on $\mathbb{C}$-lineaarinen $\mathbb{C}$-vektoriavaruuden $(V, +, \cdot')$ struktuurin suhteen jos ja vain jos

(ii) $A(c\mathbf{v}) = cA(\mathbf{v})$ kaikilla $c = a + bi \in \mathbb{C}$ ja kaikilla $\mathbf{v} \in V$.

Valitsemalla kohdassa (ii) erikoistapauksensa $c = a + 0i = a \in \mathbb{R}$, nähdään, että A on erityisesti myös $\mathbb{R}$-lineaarinen (ehto (i) on kummallekin struktuurille sama, koska kummankin yhteenlasku sama). Lisäksi kaikilla $\mathbf{v} \in V$ pätee

$$A(J(\mathbf{v})) = A(i\mathbf{v}) = iA(\mathbf{v}) = J(A(\mathbf{v})).$$

Toisin sanoen $AJ = JA$.

Kääntäen olkoon $A\colon V \to V$ $\mathbb{R}$-lineaarinen ja oletetaan, että $AJ = JA$. Tällöin kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ja $r \in \mathbb{R}$ pätee

$$A(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = A(\mathbf{v}) + A((w) \text{ ja}$$

$$A(r\mathbf{v}) = rA(\mathbf{v}).$$

Osoittakseen, että A on myös $\mathbb{C}$ lineaarinen riittää näyttää vielä, että kaikilla $c = a + bi \in \mathbb{C}$ ja kaikilla $\mathbf{v} \in V$ pätee

$$A(c\mathbf{v}) = cA(\mathbf{v}).$$

Määritelmistä ja oletuksista saadaan

$$A(c\mathbf{v}) = A(a\mathbf{v} + bJ(\mathbf{v})) = aA\mathbf{v} + bAJ(\mathbf{v}) = aA\mathbf{v} + bJA(\mathbf{v}) = cA(\mathbf{v}).$$

Väite on osoitettu.

6. Olkoon $(V, +, \cdot)$ äärellisulotteinen $\mathbb{R}$-vektoriavaruus. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.

   (i) Avaruudella V on olemassa $\mathbb{C}$-laajennus.

   (ii) On olemassa $\mathbb{R}$-lineaarinen kuvaus $L\colon V \to V$ jolle pätee $L^2 + \mathrm{id}_V = 0$.

   (iii) $\dim_{\mathbb{R}} V$ on parillinen luonnollinen luku.

Ratkaisu: Edellisestä tehtävästä seuraa, että ehdosta (ii) seuraa ehto (i), (ii)$\Longrightarrow$(i).

Edellisen viikon harjoituksesta 4.4 seuraa, että (i)$\Longrightarrow$(iii). Nimittäin tehtävässä 4.4. oleellisesti näytetään, että jos $(V, +, \cdot)$ on äärellisulotteinen $\mathbb{R}$-vektoriavaruus ja $(V, +, \cdot')$ on sen $\mathbb{C}$-laajennus, niin

$$\dim_{\mathbb{R}} V = 2 \dim_{\mathbb{C}} V.$$

Erityisesti tällöin $\dim_R V$ on parillinen luonnollinen luku.

Jäljellä on sen osoittaminen, että (iii)$\Longrightarrow$(ii). Olkoon V äärellisulotteinen $\mathbb{R}$-vektoriavaruus, jonka dimensio on parillinen luku. Tällöin sillä on olemassa kanta muotoa $E = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$, missä $\dim_R V = 2n$. Tässä siis vaan otetaan mikä tahansa $2n$-pituinen kanta $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}, \ldots, \mathbf{v}_{2n})$ ja nimetään sen vektoreita $\mathbf{v}_{n+1} \ldots, \mathbf{v}_{2n}$ vektoreiksi $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$. Proposition 2.57 nojalla on olemassa (yksikäsitteinen) $\mathbb{R}$-lineaarinen kuvaus $L\colon V \to V$ siten, että $L(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ ja $L(\mathbf{w}_i) = -\mathbf{v}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Tällöin

$$L^2(\mathbf{v}_i) = L(\mathbf{w}_i) = -\mathbf{v}_i,$$

$$L^2(\mathbf{w}_i) = L(-\mathbf{v}_i) = -\mathbf{w}_i,$$

$i = 1, \ldots, n$. Toisin sanoen $L^2(\mathbf{x}) = -\operatorname{id}_V(\mathbf{x})$ kun $\mathbf{x}$ on avaruuden kannan E alkio. Koska L^2 ja $-\operatorname{id}_V$ ovat lineaarikuvauksia, Proposition 2.57 (yksikäsitteisyys) nojalla $L^2 = -\operatorname{id}_V$. Toisin sanoen $L^2 + \operatorname{id}_V = 0$. Kuvauksen L olemassaolo on osoitettu.

7.* Olkoon K *äärellinen* kunta ja olkoon p sen karakteristika. Osoita, että $|K| = p^m$ jollakin $m \in \mathbb{N}$. (Vihje: Osoita, että K on $\mathbb{Z}_p$-vektoriavaruus).

Ratkaisu: Kunnan "kokonaisluvut" eli alkiot muotoa $n1_K$, missä $n \in \mathbb{Z}$ ja 1_K on kunnan K ykkösalkio muodostavat kunnan K alirenkaan, kts. Luku 1 ("Algebralliset operaatiot ja kunnat"), sivut 67-68. Formaalisti tämä osoitetaan käyttämällä renkaiden homomorfismi $f\colon \mathbb{Z} \to K$, $f(n) = n1_K$. Tällöin kunnan kokonaislukujen rengas on tämän homomorfismin kuvajoukko $\operatorname{Im} f$, joka on K:n alirengas yleisen teorian mukaan. Tämä on itse asiassa kunnan K pienin alirengas (sisältyvyysrelaation suhteen), sillä jokainen alirengas sisältää määritelmän mukaan ykkösalkion 1_K, joten sen täytyy myös sisältää kaikki tämän alkion monikerrat.

Edellisen kappaleen havainnot toimivat yhtä hyvin missä tahansa renkaassa R kunnan K sijaan. Lisäksi, kun K on kunta, sen kokonaislukujen muodostaman alirenkaan ei tarvitse olla kunta, esimerkiksi kunnan $\mathbb{Q}$ kokonaislukujen rengas on $\mathbb{Z}$.

Olkoon nyt K *äärellinen* kunta. Tällöin kuvaus $f\colon \mathbb{Z} \to K$, $f(n) = n1_K$ ei voi olla injektio, sillä $\mathbb{Z}$ on ääretön. Näin ollen f:n ydin on renkaan $\mathbb{Z}$ epätriviaali ideaali. Toisaalta tiedetään, että kaikki $\mathbb{Z}$:n ideaalit ovat muotoa $m\mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ (esimerkki 1.88). Näin ollen $\operatorname{Ker} f = m\mathbb{Z}$, missä $m > 0$ ja isomorfialauseen nojalla kunnan K kokonaislukujen muodostama alirengas R on isomorfinen tekijärenkaan $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_m$ kanssa. Tästä helposti seuraa myös, että m on *pienin positiivinen kokonaisluku*, jolle pätee $m1_K = 0_K$. Lukua m sanotaan myös kunnan K *karakteristikaksi*. Osoitetaan tämän avulla, että m on välttämättä alkuluku. Tehdään vasta-oletus: $m = kl$, missä $k, l \in \mathbb{Z}$,$k, l > 1$. Tällöin $k, l < m$, mutta

$$0_K = m1_K = f(m) = f(k)f(l) = (k1_K)(l1_K).$$

Kunnassa on voimassa "nollasääntö" - jos $xy = 0_K$, niin $x = 0_K$ tai $y = 0_K$. Tämä nähdään kertomalla yhtälö $xy = 0_K$ x:n käänteisluvulla, jos $x \neq 0_K$. Näin ollen edellisestä seuraa, että joko $k1_K = 0_K$ tai $l1_K = 0_K$. Kumpikin johtopäätös on kuitenkin ristiriidassa sen kanssa, että m oli pienin positiivinen kokonaisluku jolle pätee $m1_K = 0_K$. Näin ollen luvun m on pakko olla alukuluku. Merkitään tästä syystä $m = p$. On osoitettu, että jokainen äärellinen kunta K sisältää alikunnan, joka on isomorfinen kunnan $\mathbb{Z}_p$ kanssa, missä p on alkuluku. Tässä siis käytämme hyväksi sitä, että $\mathbb{Z}_m$ on kunta jos ja vain jos m on alkuluku.

Voidaan siis olettaa, että $\mathbb{Z}_p$ on kunnan K alikunta jollakin alkuluvulla p. Esimerkin 2.4.(3) nojalla K voidaan tällöin ajatella vektoriavaruutena kunnan $\mathbb{Z}_p$ yli. Tässä vektoriavaruudessa yhteenlasku on kunnan K yhteenlasku ja skalaarikertolasku on kunnan kertolaskun rajoittuma. Toinen tapa päästää samaan tulokseen on huomata, että kunnassa K jokaiselle alkiolle $x \in K$ pätee $px = p(1_K)x)(p1_K)x = 0_K x = 0_K$, ja soveltaa tähän havaintoon esimerkin 2.6 tulosta.

Näin ollen K on vektoriavaruus kunnan $\mathbb{Z}_p$ yli. Koska K on äärellinen, se on tällöin triviaalisti äärellisviritteinen $\mathbb{Z}_p$-vektoriavaruus. Proposition 2.41 nojalla $\mathbb{Z}_p$ avaruudella K on kanta ja $\dim_{\mathbb{Z}_p} K = m$ jollakin $m \geq 1$ (tapaus $m = 0$ tarkoittaisi, että $K = \{0\}$, mikä on vastoin kunnan määritelmää). Seurauksen 2.59

8.* a) Olkoot R vaihdannainen ja epätriviaali rengas. Oletetaan, että ainoat sen ideaalit ovat triviaalit ideaalit $\{0\}$ ja R. Osoita, että R on kunta.
b) Olkoon K kunta. Osoita, että $(n \times n)$-kokoisten matriisien muodostaman renkaan $M(n \times n; K)$ ainoat ideaalit ovat triviaalit ideaalit $\{0\}$ ja $M(n \times n; K)$.

Ratkaisu: a) Olkoon R vaihdannainen ja epätriviaali rengas, jonka ainoat ideaalit ovat triviaalit ideaalit $\{0\}$ ja R. Osoitetaan, että jokaisella $x \neq 0_R$ on olemassa käänteisalkio R:ssä. Koska R on vaihdannainen, harjoituksen 3.2b) nojalla alkion x virittämä ideaali on

$$I_x = \{ax \mid a \in R\}.$$

Koska $x \neq 0_R$, $I_x \neq \{0\}$, joten oletuksen nojalla $I_x = R$. Erityisesti $1_R \in I_x$. Tästä seuraa, että on olemassa $a \in R$ siten, että $ax = 1_R$. Koska R on vaihdanninen, yhtä hyvin $xa = 1_R$. Toisin sanoen $a = x^{-1}$ on olemassa.

b) Olkoon I renkaan $M(n \times n; K)$ epätriviaali rengas ja olkoon $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in I$ s.e. $A \neq 0$. Tämä tarkoittaa sitä, että on olemassa $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ siten, että $a_{ij} \neq 0_K$.

Olkoon E_{lk}, $k, l = 1, \ldots, n$ vektoriavaruuden $M(n \times n; K)$ "standardikannan alkio" (kts. Luku 2, sivu 47). Toisin sanoen E_{kl} on sellainen matriisi $B = (b_{pq}) \in M(n \times n; K)$ jolle pätee

$$b_{pq} = \begin{cases} 1_K, & p = l, q = k, \\ 0_K, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Helposti nähdään, että matriisi $C = AE_{lk}$, on sellainen matriisi, jonka sarake $c_t(C)$ sisältää vain nolla-alkioita kun $t \neq l$ ja jonka sarake $c_k(C)$ on sama kuin matriisin A sarake $c_l(A)$. Vastaavasti matriisi $D = E_{kl}A$ on sellainen matriisi, jonka rivi $r_t(C)$ sisältää vain nolla-alkioita kun $t \neq k$ ja jonka rivi $r_k(C)$ on sama kuin matriisin A rivi $c_l(A)$.

Lähdetään siis liikkelle matriisista $A \in I$ s.e. $A \neq 0$. Valitaan $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ siten, että $a = a_{ij} \neq 0_K$. Edellisestä helposti seuraa, että jokaisella $y \in K$ matriisi $(ya^{-1}E_{li})AE_{jk}$ on sellainen matriisi, jonka ainoa nolla-alkiosta eroava alkio on (l, k)-alkio y. Koska I on ideaali, tämä matriisi on ideaalin I alkio. Mielivalainen neliömatriisi saadaan tällaisten matriisien summana, joten I sisältää kaikki renkaan $M(n \times n; K)$ alkiot.

Näin ollen a)-kohdan tulos ei päde yleisesti ei-vaihdannaisessa renkaassa.