Äärellisulotteinen lineaarialgebra, kevät 2015.
Harjoitus 4.
Ratkaisuehdotukset.

1. Olkoon $(V, \oplus, \odot)$ Harjoituksessa 3.6 tarkasteltu $\mathbb{R}$-vektoriavaruus. Osoita, että V on äärellisviritteinen. Mikä on avaruuden V ulottuvuus? Anna kaksi erilaista esimerkkiä sen kannasta.

   Onko kuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to V$, $L(x,y) = 5^{x-2y^2}$ lineaarinen? Entä kuvaus $L'\colon \mathbb{R}^3 \to V$, $L(x,y,z) = 7^{5y-7z}$?

   Ratkaisu: Olkoot $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$. Tällöin näiden vektorien mielivaltainen lineaarinen kombinaatio vektoriavaruudessa V on muotoa

$$(t_1 \odot \mathbf{v}_1) \oplus (t_2 \odot \mathbf{v}_2) \oplus \ldots \oplus (t_n \odot \mathbf{v}_n),$$

   missä $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ ovat skalaareja. Laskutoimitusten $\oplus$, $\odot$ määritelmien ja potenssilaskusääntöjen nojalla

$$(t_1 \odot \mathbf{v}_1) \oplus (t_2 \odot \mathbf{v}_2) \oplus \ldots \oplus (t_n \odot \mathbf{v}_n) = \mathbf{v}_1^{t_1} \oplus \mathbf{v}_2^{t_2} \oplus \ldots \oplus \mathbf{v}_n^{t_n} = \mathbf{v}_1^{t_1} \cdot \mathbf{v}_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot \mathbf{v}_n^{t_n},$$

   missä $\cdot$ on reaalilukujen tavallinen kertolasku. Näin ollen vektorien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ virittämä avaruuden V aliavaruus on (Lemma 2.29) seuraava (positiivisten) reaalilukujen joukon osajoukko:

$$\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) = \{\mathbf{v}_1^{t_1} \cdot \mathbf{v}_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot \mathbf{v}_n^{t_n} \mid t_1, \ldots, t_n\}.$$

   Tunnetusti kuitenkin jokaisen positiivisen reaaliluvun $\mathbf{v} \neq 1$ potenssi $\mathbf{v}^t$ saa kaikki positiiviset reaalilukuarvot kun t käy läpi kaikki reaaliluvut. Näin ollen, jos esimerkiksi $\mathbf{v} \neq 1$, valitsemalla yllä $t_2 = \ldots = t_n = 0$ ja $t_1 = t$ mielivaltainen, nähdään, että

$$V = \mathbb{R}_+ \subset \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n).$$

   Koska kääntäen $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) \subset V$, tästä seuraa, että itse asiassa

$$V = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n).$$

   Olemme osoittanet, että

   - Jokainen joukon V (epätyhjä) äärellinen vektorien jono $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, joka sisältää ainakin yhden ykkösestä eroavan virittää avaruuden V.
   - Erityisesti valitsemalla esimerkiksi $\mathbf{v}_1 = 2$, $n = 1$, nähdään, että

$$V = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1)$$

     on äärelliseulotteinen, jopa yhden vektorin virittämä.

Koska V on selvästi epätriviaali, viimeisestä huomautuksesta seuraa, että V on tasan 1-ulotteinen ja sen kannaksi kelpaa mikä tahansa yhden alkion jono $\{\mathbf{v}\}$, kunhan $\mathbf{v} \neq 1$. Esimerkiksi (π) tai (e) ovat kumpikin avaruuden V kanta.

Seurauksen 2.59 pitäisi olla olemassa isomorfismi $L\colon \mathbb{R}^1 = \mathbb{R} \cong V$. Sellaista ei ole vaikeata keksiä (tai konstruoida). Nimittäin tunnetusti $\{1\}$ on $\mathbb{R}$-vektoriavaruuden $\mathbb{R}$ kanta. Koska isomorfismi kuvaa kannan kannaksi, $L(1)$:n on oltava sellainen V:n vektori, jolle $(L(1))$ on avaruuden V kanta. Yllä olevan nojalla tällaiseksi kelpaa mikä tahansa avaruuden V ykkösestä eroava vektori $\mathbf{v}$, missä siis $\mathbf{v} > 0$, $\mathbf{v} \neq 1$. Proposition 2.57 nojalla on olemassa yksikäsitteinen lineaarinen kuvaus $L\colon \mathbb{R} \to V$, jolle pätee $L(1) = \mathbf{v}$. Lineaarisuudesta tällöin seuraa, että kaikilla $r \in \mathbb{R}$ pätee

$$L(r) = L(r \cdot 1) = rL(1) = r \odot \mathbf{v} = \mathbf{v}^r.$$

Näin ollen isomorfismiksi $R \to V$ kelpaa mikä tahansa (ei-vakio) eksponenttikuvaus $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, eli kuvaus muodossa $f_a(r) = x^r$, missä $a > 0, ma \neq 1$. Käänteen edellisestä seuraa, että kaikki isomorfismit ovat tätä muotoa. Isomorfismin $f_a\colon \mathbb{R} \to V$ käänteiskuvaus on $g_a = f_a^{-1}\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $g_a(y) = \log_a y$, eli logaritmifunktio. Tällainen kuvaus on isomorfismi $(\mathbb{R}, +, \cdot) \cong (V, \oplus, \odot)$ ja kaikki isomorfismit $(\mathbb{R}, +, \cdot) \cong (V, \oplus, \odot)$ ovat tätä muotoa.

Tutkitaan vielä ovatko kuvaukset $L\colon \mathbb{R}^2 \to V$, $L'\colon \mathbb{R}^3 \to V$, missä $L(x, y) = 5^{x-2y^2}$, $L(x, y, z) = 7^{5y-7z}$, lineaarisia. Tämän voi tutkia suoraan, mutta valitsemme toisen tavan ja käytetään edellä konstruoituja isomorfismeja $g_a\colon V \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \log_a y$. Nimittäin, koska tällainen kuvaus on vektoriavaruuksien välinen isomorfismi, kuvaus $f\colon W \to V$ (missä W mielivaltainen $\mathbb{R}$-vektoriavaruus) on lineaarinen jos ja vain jos yhdistetty kuvaus $F = g_a \circ f\colon W \to \mathbb{R}$ on lineaarinen.

Valitaan $a = 5$, tällöin

$$F(x, y) = g_5 \circ L(x, y) = x - 2y^2.$$

Tunnetusti tämä kuvaus ei ole lineaarinen kuvaus $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, missä avaruuksissa $\mathbb{R}^n$ ajatellaan olevan tavallinen $\mathbb{R}$-vektoriavaruuden struktuuri. Tätä ei ole vaikeata nähdä suoraankin, esimerkiksi valitsemalla $(x, y) = (0, 1) = (x', y')$ nähdään, että

$$F((x, y) + (x', y')) = F(x + x', y + y') = F(0, 2) = -2 \cdot 4 = -8,$$

$$F(x, y) + F(x', y') = -2 - 2 = -4 \neq -8,$$

joten $F((x, y) + (x', y')) \neq F(x, y) + F(x', y')$.
Näin ollen myöskin kuvaus L ei ole lineaarinen.

Valitaan $a = 7$, tällöin

$$F(x, y, z) = g_7 \circ L'(x, y, z) = 5y - 7z.$$

Tämä kuvaus on lineaarinen kuvaus $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Tämä voidaan pitää tunnetuna lineaarialgebran peruskurssin perusteella. Näin ollen myös L' on lineaarinen.

2. Olkoot W, U K-vektoriavaruuden V aliavaruuksia.
Karteesisessa tulossa $W \times U$ voidaan määritellä luonnollinen K-vektoriavaruuden struktuuri asettamalla

$$(\mathbf{w}, \mathbf{u}) + (\mathbf{w}', \mathbf{u}') = (\mathbf{w} + \mathbf{w}', \mathbf{u} + \mathbf{u}'),$$

$$k(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = (k\mathbf{w}, k\mathbf{u}).$$

Tällöin $(W \times U, +, \cdot)$ on K-vektoriavaruus, jota sanotaan avaruuksien W, U *tuloavaruudeksi* (tämä voi pitää tunnettuna.) Määritellään $L\colon W \times U \to V$ kaavalla

$$L(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = \mathbf{w} + \mathbf{u}.$$

Osoita, että L on lineaarinen kuvaus ja että

$$\operatorname{Ker} L = \{(\mathbf{v}, -\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in W \cap U\},$$

$$\operatorname{Im} L = W + U = \{\mathbf{w} + \mathbf{u} \mid \mathbf{w} \in W, \mathbf{u} \in U\}.$$

Päättele tästä, että $W + U$ on avaruuden V aliavaruus, joka on isomorfinen tekijäavaruuden $(V \times W)/\operatorname{Ker} L$ kanssa. Osoita myös, että $\operatorname{Ker} L$ on isomorfinen aliavaruuden $W \cap U$ kanssa.

Ratkaisu: Osoitetaan, että L on lineaarinen. Olkoot $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W, \mathbf{u}, \mathbf{u}' \in U$, $k \in K$. Tällöin, käyttämällä vektoriavaruuden yhteenlaskun ominaisuuksia (yhteenlasku ja liitännäisyys), saadaan

$$L((\mathbf{w}, \mathbf{u}) + (\mathbf{w}', \mathbf{u}')) = L(\mathbf{w} + \mathbf{w}', \mathbf{u} + \mathbf{u}') =$$

$$(\mathbf{w} + \mathbf{w}') + (\mathbf{u} + \mathbf{u}') = (\mathbf{w} + \mathbf{u}) + (\mathbf{w}' + \mathbf{u}') = L(\mathbf{w}, \mathbf{u}) + L(\mathbf{w}', \mathbf{u}').$$

Osittelulain nojalla taas saadaan

$$L(k(\mathbf{w}, \mathbf{u})) = L(k\mathbf{v}, k\mathbf{w}) = k\mathbf{w} + k\mathbf{u} = k(\mathbf{w} + \mathbf{u}) = kL(\mathbf{w}, \mathbf{u}).$$

Näin ollen L on lineaarinen kuvaus.

Olkoot $\mathbf{w} \in W, \mathbf{u} \in U$. Tällöin

$$L(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}_V \text{ jos ja vain jos}$$

$$\mathbf{w} + \mathbf{u} = \mathbf{0}_V$$

eli jos ja vain jos $\mathbf{w} = -\mathbf{u}$. Koska $-\mathbf{u} \in U$, tästä seuraa, että $\mathbf{w} \in U$, toisin sanoen $\mathbf{w} \in W \cap U$. Samalla loogikalla $\mathbf{u} = -\mathbf{w} \in W \cap U$. Näin ollen

$$\operatorname{Ker} L = \{(\mathbf{v}, -\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in W \cap U\}.$$

Yhtälö

$$\operatorname{Im} L = W + U = \{\mathbf{w} + \mathbf{u} \mid \mathbf{w} \in W, \mathbf{u} \in U\}$$

seuraa suoraan kuvauksen L määritelmästä. Koska aliavaruuden kuvajoukko lineaarisessa kuvauksessa on myös aliavaruus (Lemma 2.14), tästä myös seuraa, että

$W+U$ on vektoriavaruuden V aliavaruus. Lisäksi vektoriavaruuksien isomorfialauseesta (Seuraus 2.25) saadaan, että $W+U$ on K-vektoriavaruutena isomorfinen tekijäavaruuden $(V\times W)/\operatorname{Ker} L$ kanssa.

Näytetään vielä, että $\operatorname{Ker} L$ (joka on vektoriavaruus Lemman 2.14 nojalla) on isomorfinen vektoriavaruuden $W\cap U$ kanssa (joka on vektoriavaruus Lemman 2.27 nojalla). Koska
$$\operatorname{Ker} L = \{(\mathbf{v},-\mathbf{v}) \mid \mathbf{v}\in W\cap U\},$$
voidaan määritellä kuvaus $L'\colon \operatorname{Ker} L\to W\cap U$ kaavalla
$$L'(\mathbf{v},-\mathbf{v})=\mathbf{v}.$$
Tällöin kaikilla $\mathbf{v},\mathbf{v}'\in W\cap U, k\in K$ pätee
$$L'((\mathbf{v},-\mathbf{v})+(\mathbf{v}',-\mathbf{v}'))=L'(\mathbf{v}+\mathbf{v}',-\mathbf{v}-\mathbf{v}')=\mathbf{v}+\mathbf{v}'=L'((\mathbf{v},-\mathbf{v})+L'(\mathbf{v}',-\mathbf{v}')),$$
$$L'(k(\mathbf{v},-\mathbf{v}))=L'(k\mathbf{v},-k\mathbf{v}))=k\mathbf{v}=kL'(\mathbf{v},-\mathbf{v}).$$
Näin ollen L' on lineaarinen kuvaus. Kaikilla $\mathbf{v}\in W\cap U$ pätee
$$L'(\mathbf{v},-\mathbf{v})=\mathbf{v},$$
missä $(\mathbf{v},-\mathbf{v})=\mathbf{v}\in \operatorname{Ker} L$, joten L' on surjektio. Oletetaan, että
$$L'(\mathbf{v},-\mathbf{v})=L'(\mathbf{v}',-\mathbf{v}')$$
joillakin $\mathbf{v},\mathbf{v}'\in W\cap U$. Tällöin kuvauksen L määritelmän nojalla $\mathbf{v}=\mathbf{v}'$, joten myös $(\mathbf{v},-\mathbf{v})=(\mathbf{v}',-\mathbf{v}')$. Olemme osoittaneet, että L' on injektio.

Näin ollen L' on lineaarinen bijektio, eli on isomorfismi.

3. Olkoot W,U K-vektoriavaruuden V aliavaruuksia.
a) Osoita, että $W+U=\operatorname{Span}(W\cup U)$. Tässä $W+U$ on määritelty edellisessä tehtävässä.
b) Oletetaan, että V on äärellisulotteinen. Osoita, että
$$\dim(W+U)=\dim W+\dim U-\dim(W\cap U).$$

Ratkaisu: a) Osoitetaan, että $W+U=\operatorname{Span}(W\cup U)$. Koska $\mathbf{0}_V\in U\cap W$, selvästi $W\subset W+U$ ja $U\subset W+U$. Näin ollen $W\cup U\subset W+U$. Edellisen tehtävän nojalla $W+U$ on aliavaruus (tämän voi näyttää myös suoraan aliavaruuden määritelmästä). Näin ollen riittää vielä näyttää, että jos $W\cup U\subset Z$, missä $Z\leq V$ on aliavaruus, niin $W+U\subset Z$. Olkoot $\mathbf{w}\in W$, $\mathbf{u}\in U$. Koska oletamme, että $W\cup U\subset Z$, tällöin $\mathbf{w},\mathbf{u}\in Z$. Koska Z on aliavaruus, se on erityisesti suljettu vektorien yhteenlaskun suhteen. Tästä seuraa, että
$$\mathbf{w}+\mathbf{u}\in Z.$$
Olemme osoittaneet, että
$$W+U=\{\mathbf{w}+\mathbf{u}\mid \mathbf{w}\in W,\mathbf{u}\in U\}\subset Z.$$

Olemme näyttäneet, että $W + U$ on aliavaruus, joka sisältää joukon $W \cup U$, ja lisäksi pienin sellainen. Näin ollen $W + U = \operatorname{Span}(W \cup U)$ virittävän aliavaruuden määritelmän nojalla.

b) Yksi tapa on käyttää edellistä tehtävää ja Seurausta 2.93. Nimittäin edellisessä tehtävässä osoitetaan, että $V + W$ on isomorfinen tekijäavaruuden $(W \times U)/\operatorname{Ker} L$ kanssa, missä $\operatorname{Ker} L$ on puolestaan isomorfinen avaruuden $W \cap U$ kanssa. Tästä ja Serauksesta 2.93 saadaan, että

$$\dim(V + W) = \dim(W \times U) - \dim \operatorname{Ker} L = \dim(W \times U) - \dim(W \cap U).$$

Väite seuraa, kunhan osoitetaan vielä, että

$$\dim(W \times U) = \dim W + \dim U.$$

Olkoon $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m)$ avaruuden W kanta ja olkoon $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ avaruuden U kanta. Kumpikin on olemassa Proposition 2.48 nojalla. Helposti nähdään, että kokoelma

$$((\mathbf{w}_1, 0), \ldots, (\mathbf{w}_m, 0), (0, \mathbf{u}_1), \ldots, (0, \mathbf{u}_n)).$$

on tällöin tuloavaruuden $V \times W$ kanta, mistä kaava

$$\dim(W \times U) = \dim W + \dim U$$

seuraa.

Koska Seuraus 2.93 käyttiin luennoilla läpi vasta näiden harjoitusten jälkeen, esitetään myös toinen, "alkeellisempi", todistus b)-kohdan väitteelle suoraan määritelmästä. Valitaan ensin aliavaruudelle $W \cap U$ kanta $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p)$. Koska $W \cap U$ on avaruuden W aliavaruus, tämä kanta voidaan (Proposition 2.48) täydentää avaruuden W kannaksi $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{m-p})$. Samasta syystä kanta $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p)$ voidaan (Proposition 2.48) täydentää avaruuden U kannaksi $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-p})$. Tässä $p = \dim W \cap U$, $m = \dim W$, $n = \dim U$.

Osoitetaan, että jono $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{m-p}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-p})$ on avaruuden $W + U$ kanta. Koska tämän kannan pituus on

$$p + m - p + n - p = m + n - p = \dim W + \dim U - \dim(W \cap U),$$

väite seuraa tästä.

Olkoot $\mathbf{w} \in W, \mathbf{u} \in U$. Tällöin on olemassa $a_i, a_i', b_j, c_k \in K$, $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, m - p$, $k = 1, \ldots, n - p$ siten, että

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{p} a_i \mathbf{e}_i + \sum_{j=1}^{m-p} b_j \mathbf{w}_j \text{ ja}$$

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{p} a_i' \mathbf{e}_i + \sum_{k=1}^{n-p} c_k \mathbf{u}_k.$$

Tästä seuraa, että

$$\mathbf{w}+\mathbf{u}=\sum_{i=1}^{p}(a_i+a_i')\mathbf{e}_i+\sum_{j=1}^{m-p}b_j\mathbf{w}_j+\sum_{k=1}^{n-p}c_k\mathbf{u}_k.$$

Koska kaikki avaruuden $W+U$ alkiot ovat muotoa $\mathbf{w}+\mathbf{u}$, tämä osoittaa sen, että jono $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_p,\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_{m-p},\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_{n-p})$ virittää avaruuden $W+U$ kanta.

Seuraavaksi näytetään, että jono $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_p,\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_{m-p},\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_{n-p})$ on vapaa. Olkoot $a_i,b_j,c_k\in K$, $i=1,\dots,p$, $j=1,\dots,m-p$, $k=1,\dots,n-p$ sellaisia, että

$$\sum_{i=1}^{p}a_i\mathbf{e}_i+\sum_{j=1}^{m-p}b_j\mathbf{w}_j+\sum_{k=1}^{n-p}c_k\mathbf{u}_k=\mathbf{0}. \tag{1}$$

On osoitettavaa, että $a_i=b_j=c_k=0_K$ kaikilla $i=1,\dots,p$, $j=1,\dots,m-p$, $k=1,\dots,n-p$. Olkoon $\mathbf{u}=\sum_{k=1}^{n-p}(-c_k)\mathbf{u}_k$, tällöin $\mathbf{u}\in U$. Toisaalta yhtälöstä 1 seuraa, että

$$\mathbf{u}=\sum_{i=1}^{p}a_i\mathbf{e}_i+\sum_{j=1}^{m-p}b_j\mathbf{w}_j\in W.$$

Näin ollen $\mathbf{u}\in W\cap U$. Koska jono $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_p)$ on avaruuden $W\cap U$ kanta, on olemassa $a_i'\in K$, $i=1,\dots,p$ siten, että

$$\mathbf{u}=\sum_{i=1}^{p}a_i'\mathbf{e}_i.$$

Tällöin

$$\sum_{i=1}^{p}a_i'\mathbf{e}_i+\sum_{k=1}^{n-p}c_k\mathbf{u}_k=\sum_{i=1}^{p}a_i'\mathbf{e}_i-\mathbf{u}=\mathbf{0}.$$

Koska jono $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_p,\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_{n-p})$ on vapaa (se on avaruuden U kanta), tästä seuraa etityisesti, että $c_k=0_K$ kaikilla $k=1,\dots,n-p$. Yhtälöstä 1 tulee tämän nojalla yhtälö

$$\sum_{i=1}^{p}a_i\mathbf{e}_i+\sum_{j=1}^{m-p}b_j\mathbf{w}_j=\mathbf{0}.$$

Koska jono $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_p,\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_{m-p})$ on avaruuden W kantana vapaa, tästä seuraa, että $a_i=b_j=0_K$ kaikilla $i=1,\dots,p$, $j=1,\dots,m-p$. Todistus on valmis.

4. Olkoon $(V,+,\cdot')$ $\mathbb{C}$-vektoriavaruus. Rajoittamalla skalaarikertolasku $\cdot'$ joukkoon $\mathbb{R}\times V$ saadaan $\mathbb{R}$-skalaarikertolasku $\cdot\colon\mathbb{R}\times V\to V$. Kolmikko $(V,+,\cdot)$ on tällöin $\mathbb{R}$-vektoriavaruus.

   Oletetaan, että $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n)$ on $\mathbb{C}$-vektoriavaruuden $(V,+,\cdot')$ kanta. Osoita, että $(\mathbf{v}_1,i\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,i\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n,i\mathbf{v}_n)$ on $\mathbb{R}$-vektoriavaruuden $(V,+,\cdot)$ kanta. Päätele tästä, että

$$\dim_{\mathbb{R}}V=2\dim_{\mathbb{C}}V,$$

kun V on äärellisulotteinen.

Ratkaisu: Olkoon $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ $\mathbb{C}$-vektoriavaruuden $(V, +, \cdot')$ kanta. Osoitetaan, että $(\mathbf{v}_1, i\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, i\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, i\mathbf{v}_n)$ on $\mathbb{R}$-vektoriavaruuden $(V, +, \cdot)$ kanta.

Olkoon $\mathbf{v} \in V$. Tällöin, koska $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ on avaruuden kanta kunnan $\mathbb{C}$ suhteen, on olemassa (yksikäsitteiset) $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ siten, että

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n.$$

Kompleksilukujen määritelmän mukaan jokaisella $j = 1, \ldots, n$ pätee $c_j = a_j + ib_j$, missä $a_j, b_j \in \mathbb{R}$. Tällöin vektoriavaruuden osittelulakien nojalla

$$\mathbf{v} = (a_1+ib_1)\mathbf{v}_1+(a_2+ib_2)\mathbf{v}_2+\ldots+(a_n+ib_n)\mathbf{v}_n = a_1\mathbf{v}_1+b_1(i\mathbf{v}_1)+a_2\mathbf{v}_2+b_2(i\mathbf{v}_2)+\ldots+a_n\mathbf{v}_n+b_n(i\mathbf{v}_n).$$

Tämä tarkoittaa sitä, että $\mathbf{v}$ voidaan esittää jonon $(\mathbf{v}_1, i\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, i\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, i\mathbf{v}_n)$ $\mathbb{R}$-kertoimisena lineaarisena kombinaationa. Tämä puolestaan tarkoittaa sitä, että kyseinen jono virittää $\mathbb{R}$-vektoriavaruuden V.

Seuraavaksi osoitetaan, että jono $(\mathbf{v}_1, i\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, i\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, i\mathbf{v}_n)$ on vapaa $\mathbb{R}$-vektoriavaruudessa V. Olkoot $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ sellaisia, että

$$a_1\mathbf{v}_1 + b_1(i\mathbf{v}_1) + a_2\mathbf{v}_2 + b_2(i\mathbf{v}_2) + \ldots + a_n\mathbf{v}_n + b_n(i\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}_V.$$

Jokaisella $j = 1, \ldots, n$ olkoon $c_j = a_j + ib_j = (a_j, b_j)$, tällöin $c_j \in \mathbb{C}$ ja osittelulain nojalla (sovellettuna nyt toiseen suuntaan) voidaan kirjoittaa edellinen yhtälö muodossa

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}_V.$$

Koska jono $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ on vapaa $\mathbb{C}$-vektoriavaruudessa V, tästä seuraa, että $(a_j, b_j) = c_j = 0_{\mathbb{C}} = (0, 0)$ kaikilla $j = 1, \ldots, n$. Tästä puolestaan seuraa, että $a_j = b_j = 0$ kaikilla $j = 1, \ldots, n$. Näin ollen jono $(\mathbf{v}_1, i\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, i\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, i\mathbf{v}_n)$ on vapaa $\mathbb{R}$-vektoriavaruudessa V ja ollaan valmiit.

Edellisestä seuraa suoraan, että

$$\dim_{\mathbb{R}} V = 2\dim_{\mathbb{C}} V.$$

5. Olkoon p alkuluku. Tarkastellaan avaruudessa $(\mathbb{Z}_p)^4$ vektoreita $\mathbf{v}_1 = (4_p, 3_p, (-2)_p, 2_p)$, $\mathbf{v}_2 = ((-2)_p, 2_p, 1_p, 3_p)$, $\mathbf{v}_3 = (0_p, (-2)_p, 3_p, (-6)_p)$, $\mathbf{v}_4 = (5_p, 1_p, (-1)_p, (-3)_p)$, $\mathbf{w} = (1_p, 0_p, 0_p, 0_p)$.

   Tutki pitävätkö väitteet (i),(ii) ja (iii) alla paikkansa kun a) $p = 7$, b) $p = 11$.

   (i) Vektori $\mathbf{w}$ kuuluu aliavaruuteen Span$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$.
   (ii) Jono $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ on vapaa.
   (iii) Jono $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ on $\mathbb{Z}_p$-vektoriavaruuden $(\mathbb{Z}_p)^4$ kanta.

Ratkaisu: Vektori $\mathbf{w}$ kuuluu aliavaruuteen Span$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ jos ja vain jos on olemassa $x_1, \ldots, x_4 \in \mathbb{Z}_p$ siten, että

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 + x_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{w}.$$

Tämä puolestaan on yhtäpitävää sen kanssa, että lineaarisella yhtälöryhmällä

$$
(2) \qquad \begin{cases} 4_p x_1 - 2_p x_2 + 5_p x_4 = 1_p, \\ 3_p x_1 + 2_p x_2 - 2_p x_3 + x_4 = 0_p, \\ -2_p x_1 + x_2 + 3_p x_3 - x_4 = 0_p, \\ 2_p x_1 + 3_p x_2 - 6_p x_3 - 3x_4 = 0_p \end{cases}
$$

on ainakin yksi ratkaisu $(x_1, \dots, x_4) \in (\mathbb{Z}_p)^4$. Pannaan heti alkuun huomioon seuraava. Yhtälöryhmässä 2 on sama määrä tuntemattomia ja yhtälöitä. Lineaaristen yhtälöryhmien teoriasta tällöin seuraa (Johdanto-osion Lemma 18), että yhtälöryhmällä 2 on *tasan yksi ratkaisu* jos ja vain jos vastaavalla homogeenisella lineaarisella yhtälöryhmällä

$$
\begin{cases} 4_p x_1 - 2_p x_2 + 5_p x_4 = 0_p, \\ 3_p x_1 + 2_p x_2 - 2_p x_3 + x_4 = 0_p, \\ -2_p x_1 + x_2 + 3_p x_3 - x_4 = 0_p, \\ 2_p x_1 + 3_p x_2 - 6_p x_3 - 3x_4 = 0_p \end{cases}
$$

on ainoastaan triviaali ratkaisu $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0_{\mathbb{Z}_p}$. Tämä on kuitenkin yhtäpitävä sen kanssa, että yhtälöllä

$$
x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 + x_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}
$$

on vain triviaali ratkaisu $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0_{\mathbb{Z}_p}$. Toisaalta tällä yhtälöllä on triviaali ratkaisu jos vain jos jono $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ on vapaa (Lause 2.33). Näin ollen saadaan seuraava tulos - jono $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ on vapaa jos ja vain jos lineaarisella yhtälöryhmällä 2 on *tasan yksi ratkaisu.* Erityisesti tästä seuraa, että selvittämällä yhtälöryhmän 2 ratkaisujen lukumäärä, saadaan samalla vastaus sekä (i), että (ii) kohdan kysymykseen. Mitä tulee kohdan (iii) kysymykseen, niin sekin selviää suoraan (ii)-kohdan tuloksen avulla. Nimittäin jonossa $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ on tasan neljä alkiota ja toisaalta $\dim(\mathbb{Z}_p)^4 = 4$. Tällöin Seurauksen 2.49 nojalla jono $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ on vapaa jos ja vain jos se on avaruuden $(\mathbb{Z}_p)^4$ kanta.

Riittää siis selvittää kuinka monta ratkaisua yhtälöryhmällä 2 on. Tämä selviää Gaussin eliminointimenetelmän avulla. Huomaa, että itse yhtälöryhmä ei tarvitse ratkaista, riittää viedä se Gaussilla porrasmuotoon, koska sitä voidaan päätellä ratkaisujen lukumäärän.

Periaatteessa meidän pitää nyt muuntaa yhtälöryhmä 2 porrasmuotoon Gaussilla kahdessa eri tapauksessa - kun $p = 7$ ja kun $p = 11$. Säästäksemme aikaa yritetään kuitenkin laskea kumpikin tapaus samanaikaisesti.

Gaussin eliminointimenetelmän kuvailussa kurssin Johdanto-osiossa alkioita eliminoidaan käyttämällä hyväksi käänteisalkioita, jotka ovat kunnissa $\mathbb{Z}_7$ ja $\mathbb{Z}_{11}$ "erinäköisiä". Esimerkiksi luvun 2_p käänteisalkio 2_p^{-1} on 4_p kun $p = 7$ ja 6_p kun $p = 11$. Tästä syystä käytetään hieman erilainen tapa eliminoida muuttujia. Nimittäin oletetaan, että muuttuja x_j esiintyy eräässä yhtälöryhmän yhtälössä Y_i kertoimella

$a = a_{ij}$ ja toisessa yhtälössä Y_k kertoimella $b = b_{kj}$. Oletetaan, että $(-a) \neq 0_K$. Tällöin voidaan ensin kertoa yhtälö Y_k alkiolla $(-a)$, toisin sanoen voidaan suorittaa Tyyppiä II oleva alkeisrivitoimitus $-aY_k$. Tämän jälkeen muuttujan x_j kerroin yhtälössä $Y_k' = -aY_k$ on $-ab$. Suorittamalla tämän jälkeen alkeisrivitoimitus $Y_k' + bY_i$ saadaan x_j eliminoitua yhtälöryhmän yhtälöstä numero k. Nämä kaksi alkeisrivitoimitusta voidaan yhdistää yhdeksi "rivitoimitukseksi" $-aY_k + bY_i$, joka ei ole alkeisrivitoimitus meidän määritelmän mukaan, vaan kahden alkeisrivitoimituksen "kombinaatio". Tällaisessa tavassa eliminoida muuttujia ei tarvitse operoida käänteisalkioilla, ainoastaan kertoa yhtälöt kunnan nollasta eroavilla alkioilla (alkeisrivitoimitus kY_i, $k \neq 0_K$) sekä laskea yhtälöt yhteen (alkeisrivitoimitus $Y_i + Y_j$). Kun $K = \mathbb{Z}_p$, missä $p = 7$ tai $p = 11$, alkio n_p, missä $n \in \mathbb{Z}$ on varmasti nollasta eroava jos se ei ole jaollinen luvulla 7 eikä luvulla 11.

Käytännön syistä Gaussin eliminointi kannattaa suorittaa yhtälöryhmää 2 vastaavalle matriisille

$$\begin{bmatrix} 4_p & -2_p & 0_p & 5_p & 1_p \\ 3_p & 2_p & -2_p & 1_p & 0_p \\ -2_p & 1_p & 3_p & -1_p & 0_p \\ 2_p & 3_p & -6_p & -3_p & 0_p \end{bmatrix}, \tag{3}$$

jolloin edellä mainittu rivitoimitus $-aY_k + bY_i$ vastaa rivitoimitusta $-aR_i + bR_k$ (R_i on matriisin i'nnes rivi). Koska $2 < 4$, vaihdetaan ensin matriisissa 3 ensimmäinen ja viimeinen yhtälö keskenään (mitä pienempi luvut, sitä helpompi on operoida niillä), jolloin saadaan matriisi

$$\begin{bmatrix} 2_p & 3_p & -6_p & -3_p & 0_p \\ 3_p & 2_p & -2_p & 1_p & 0_p \\ -2_p & 1_p & 3_p & -1_p & 0_p \\ 4_p & -2_p & 0_p & 5_p & 1_p \end{bmatrix}.$$

Eliminoidaan seuraavaksi alkioita ensimmäisestä sarakkeesta toisesta rivistä alkaen. Eliminoidakseen alkio $(-2)_p$ (kolmas rivi) riittää lisätä ensimmäinen rivi kolmanteen riviin, eliminoidakseen alkio 4_p (neljäs rivi) kerrotaan ensimmäinen rivi kahdella ja vähennetään viimeisestä rivistä. Toisin sanoen suoritetaan alkeisrivitoimituksia $R_3 + R_1$ ja $R_4 - 2_pR_1$ (huomaa, näissä siis kummassakin ei tarvita käänteisalkioita). Eliminoidaakseen alkio 3_p (toinen rivi) kerrotaan se luvulla 2_p ja vähennetään siitä ensimmäinen rivi luvulla $(-3)_p$ kerrottuna. Toisin sanoen suoritetaan rivitoimitus $2_pR_2 - 3R_1$. Huomaa, että tässä 2_p ei varmastikaan ole nolla-alkio, kun $p = 7, 11$. Tämän jälkeen saadaan matriisi

$$\begin{bmatrix} 2_p & 3_p & -6_p & -3_p & 0_p \\ 0_p & -5_p & 14_p & 11_p & 0_p \\ 0_p & 4_p & -3_p & -4_p & 0_p \\ 0_p & -8_p & 12_p & 11_p & 1_p \end{bmatrix}.$$

Koska 8 on jaollinen 4:llä, vaihdetaan seuraavaksi toinen ja kolmas rivi,

$$\begin{bmatrix} 2_p & 3_p & -6_p & -3_p & 0_p \\ 0_p & 4_p & -3_p & -4_p & 0_p \\ 0_p & -5_p & 14_p & 11_p & 0_p \\ 0_p & -8_p & 12_p & 11_p & 1_p \end{bmatrix},$$

tämän jälkeen suoritetaan operaatiot $4_pR_3 + 5_pR_2$ (huom., 4_p ei ole nolla-alkio!) ja $R_4 + 2R_2$. Lopputuloksena on matriisi

$$\begin{bmatrix} 2_p & 3_p & -6_p & -3_p & 0_p \\ 0_p & 4_p & -3_p & -4_p & 0_p \\ 0_p & 0_p & 27_p & 24_p & 0_p \\ 0_p & 0_p & 6_p & 3_p & 1_p, \end{bmatrix}.$$

Koska 27 ja 24 ovat kumpikin jaollisia kolmella, yksinkertaistetaan laskuja hieman kertomalla kolmas rivi luvun 3_p käänteisalkiolla, eli jakamalla se kolmella (se on oko, kun $p = 7, 11$). Saadaan matriisi

$$\begin{bmatrix} 2_p & 3_p & -6_p & -3_p & 0_p \\ 0_p & 4_p & -3_p & -4_p & 0_p \\ 0_p & 0_p & 9_p & 8_p & 0_p \\ 0_p & 0_p & 6_p & 3_p & 1_p \end{bmatrix}.$$

Suoritetaan tämän jälkeen alkeisrivitoimitus $3_pR_4 - 2_pR_3$, jolloin saadaan matriisi

$$\begin{bmatrix} 2_p & 3_p & -6_p & -3_p & 0_p \\ 0_p & 4_p & -3_p & -4_p & 0_p \\ 0_p & 0_p & 9_p & 8_p & 0_p \\ 0_p & 0_p & 0_p & 7_p & 1_p. \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Matriisi on nyt porrasmuodossa. Kun $p = 7$, viimeinen rivi vastaa yhtälöä

$$0_7 = 7_7x_4 = 1_7,$$

joka on identtisesti epätosi. Tällöin siis yhtälöryhmällä *ei ole ratkaisuja.* Tämä tarkoittaa sitä, että tapauksessa $p = 7$ vektori $\mathbf{w}$ ei kuulu vektorien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ aliavaruuteen $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$. Edellä puhuttiin jo siitä, miksi tästä seuraa suoraan, että jono $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ ei tällöin ole vapaa, näin ollen, ei myöskään ole kanta.

Tapauksessa $p = 11$ porrasmuodossa olevasta matriisista 4 nähdään suoraan, että sitä vastaava yhtälöryhmä ei sisällä rivejä muotoa $0_p = b$ ja lisäksi jokainen sen muuttuja on päämuuttuja. Erityisesti yhtälöryhmä on tällöin konsistentti ja sillä ei ole vapaita muuttuja, joten sillä on olemassa *yksikäsitteinen* ratkaisu. Tästä seuraa (kts. yllä), että

- Vektori $\mathbf{w}$ ei kuulu vektorien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ aliavaruuteen $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$.
- Jono $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ on avaruuden $(\mathbb{Z}_p)^4$ kanta, erityisesti se on vapaa.

6. Olkoon V $\mathbb{R}$-vektoriavaruus. Määritellään joukossa $V \times V$ $\mathbb{C}$-vektoriavaruuden struktuuri asettamalla

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}', \mathbf{w}') = (\mathbf{v} + \mathbf{v}', \mathbf{w} + \mathbf{w}'),$$

$$(a + bi)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (a\mathbf{v} - b\mathbf{w}, a\mathbf{w} + b\mathbf{v})$$

kaikilla $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in V$, $a, b \in \mathbb{R}$.
a) Osoita, että näillä laskutoimituksilla varustettuna $V \times V$ on todellakin $\mathbb{C}$-vektoriavaruus.
b) Osoita, että avaruuden $V \times V$ osajoukko

$$W = \{(\mathbf{v}, \mathbf{0}_V) \mid \mathbf{v} \in V\}$$

on suljettu skalaarikertolaskun kunnan $\mathbb{R}$ alkioilla suhteen ja on $\mathbb{R}$-vektoriavaruutena isomorfinen avaruuden V kanssa.
c) Edellisen kohdan nojalla sovitaan samastamaan vektori $(\mathbf{v}, \mathbf{0}_V)$ vektorin $\mathbf{v} \in V$ kanssa. Tällöin V voidaan ajatella joukon $V \times V$ osajoukkona. Osoita, että tällä sopimuksella jokainen avaruuden $V \times V$ vektori voidaan kirjoittaa yksikäsitteisellä tavalla muodossa $\mathbf{v} + i\mathbf{w}$, missä $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$. Näytä myös, että tällöin $\mathbb{C}$-skalaarikertolasku avaruudessa $V \times V$ voidaan laskea kaavalla

$$(a + ib)(\mathbf{v} + i\mathbf{w}) = (a\mathbf{v} - b\mathbf{w}) + i(a\mathbf{w} + b\mathbf{v}).$$

Ratkaisu: a) Käydään läpi vektoriavaruuden ehtoja (määritelmä 2.1). Olkoot $\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{v}'' \in V$, $\mathbf{w}, \mathbf{w}', \mathbf{w}'' \in V$, $c = a + bi$, $c' = a' + b'i \in \mathbb{C}$, missä $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$.

(i) Yhteenlaskun liitännäisyys:

$$((\mathbf{v}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}', \mathbf{w}')) + (\mathbf{v}'', \mathbf{w}'') = (\mathbf{v} + \mathbf{v}', \mathbf{w} + \mathbf{w}') + (\mathbf{v}'', \mathbf{w}'') =$$

$$((\mathbf{v}+\mathbf{v}')+\mathbf{v}'', (\mathbf{w}+\mathbf{w}')+\mathbf{w}'') \overset{a}{=} (\mathbf{v}+(\mathbf{v}'+\mathbf{v}''), \mathbf{w}+(\mathbf{w}'+\mathbf{w}'')) = (\mathbf{v}, \mathbf{w})+(\mathbf{v}'+\mathbf{v}'', \mathbf{w}'+\mathbf{w}'')$$
$$= (\mathbf{v}, \mathbf{w}) + ((\mathbf{v}', \mathbf{w}') + (\mathbf{v}'', \mathbf{w}'')).$$

Huomaa, että välivaiheessa (a) käytämme yhteenlaskun liitännäisyyttä sekä vektoriavaruudessa V.

(ii) Yhteenlaskun vaihdannaisuus:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}', \mathbf{w}') = (\mathbf{v} + \mathbf{v}', \mathbf{w} + \mathbf{w}') \overset{b}{=} (\mathbf{v}' + \mathbf{v}, \mathbf{w}' + \mathbf{w}) = (\mathbf{v}', \mathbf{w}') + (\mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Huomaa, että välivaiheessa (b) käytämme yhteenlaskun vaihdannaisuutta vektoriavaruudessa V.

(iii) Koska $\mathbf{0}_V$ on yhteenlaskun neutraalialkio vektoriavaruudessa V, saadaan

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + (\mathbf{0}_V, \mathbf{0}_V) = (\mathbf{v} + \mathbf{0}_V, \mathbf{w} + \mathbf{0}_V) = (\mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Näin ollen $(\mathbf{0}_V, \mathbf{0}_V)$ on yhteenlaskun neutraalialkio avaruudessa $V \times V$.

(iv) Alkion $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ vasta-vektori on alkio $(-\mathbf{v}, -\mathbf{w})$, sillä

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + (-\mathbf{v}, -\mathbf{w}) = (\mathbf{0}_V, \mathbf{0}_V).$$

(v)

$$c(c'(\mathbf{v},\mathbf{w})) = (a+bi)(a'\mathbf{v}-b'\mathbf{w}, a'\mathbf{w}+b'\mathbf{v}) =$$
$$= (a(a'\mathbf{v}-b'\mathbf{w}) - b(a'\mathbf{w}+b'\mathbf{v}), a(a'\mathbf{w}+b'\mathbf{v}) + b(a'\mathbf{v}-b'\mathbf{w})) =$$
$$((aa'-bb')\mathbf{v} - (ab'+a'b)\mathbf{w}, (aa'-bb')\mathbf{w} + (ab'+a'b)\mathbf{v}) = cc'(\mathbf{v},\mathbf{w}),$$

sillä

$$cc' = (a+ib)(a'+ib') = (aa'-bb') + (ab'+a'b)i.$$

(vi)

$$(c+c')(\mathbf{v},\mathbf{w}) = ((a+bi)+(a'+bi))(\mathbf{v},\mathbf{w}) = ((a+a')+(b+b')i)(\mathbf{v},\mathbf{w}) =$$
$$= ((a+a')\mathbf{v} - (b+b')\mathbf{w}, (a+a')\mathbf{w} + (b+b')\mathbf{v}) =$$
$$= ((a\mathbf{v}-b\mathbf{w}) + (a'\mathbf{v}-b'\mathbf{w}), a'\mathbf{w}+b'\mathbf{v}) =$$
$$= (a\mathbf{v}-b\mathbf{w}, a\mathbf{w}+b\mathbf{v}) + (a'\mathbf{v}-b'\mathbf{w}, a'\mathbf{w}+b'\mathbf{v}) = c(\mathbf{v},\mathbf{w}) + c'(\mathbf{v},\mathbf{w}).$$

(vii)

$$c((\mathbf{v},\mathbf{w}) + (\mathbf{v}',\mathbf{w}')) = c(\mathbf{v}+\mathbf{v}', \mathbf{w}+\mathbf{w}') =$$
$$= (a(\mathbf{v}+\mathbf{v}') - b(\mathbf{w}+\mathbf{w}'), a(\mathbf{w}+\mathbf{w}') + b(\mathbf{v}+\mathbf{v}')) =$$
$$= (a\mathbf{v}-b\mathbf{w}, a\mathbf{w}+b\mathbf{v}) + (a\mathbf{v}'-b\mathbf{w}', a\mathbf{w}'+b\mathbf{v}') = c(\mathbf{v},\mathbf{w}) + c(\mathbf{v}',\mathbf{w}').$$

(viii)

$$1(\mathbf{v},\mathbf{w}) = (1+0i)(\mathbf{v},\mathbf{w}) = (1\mathbf{v}-0\mathbf{w}, 1\mathbf{w}+0\mathbf{v}) = (\mathbf{v},\mathbf{w}).$$

b) Määritellään kuvaus $L\colon V \to V \times V$, $L(\mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{0}_V)$. Tällöin kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$, $r = r + 0i \in \mathbb{R}$ pätee

$$L(\mathbf{v}+\mathbf{v}') = (\mathbf{v}+\mathbf{v}', \mathbf{0}_V) =$$
$$= (\mathbf{v}+\mathbf{v}', \mathbf{0}_V + \mathbf{0}_V) = L(\mathbf{v}) + L(\mathbf{v}'),$$
$$L(r\mathbf{v}) = (r\mathbf{v}, \mathbf{0}_V) = (r\mathbf{v} - 0\mathbf{0}_V, r\mathbf{0}_V + 0\mathbf{v}) = (r+0i)(\mathbf{v},\mathbf{0}_V) = r(\mathbf{v},\mathbf{0}_V).$$

Näin ollen, jos edellä konstruoitu $\mathbb{C}$-skalaarikertolasku avaruudessa $\mathbb{C}$ rajoitetaan $\mathbb{R}$-skalaarikertolaskuksi, toisin sanoen, jos $V \times V$ ajatellaan $\mathbb{R}$-vektoriavaruutena, kuvauksesta L tulee $\mathbb{R}$-lineaarinen. Koska lineaarisen kuvauksen kuvajoukko on aliavaruus (Lemma 2.14), tästä seuraa, että

$$W = \{(\mathbf{v}, \mathbf{0}_V) \mid \mathbf{v} \in V\}$$

on $\mathbb{R}$-vektoriavaruuden $V \times V$ aliavaruus (siis $\mathbb{R}$:n suhteen, ei $\mathbb{C}$:n suhteen!). Erityisesti W on suljettu $\mathbb{R}$-skalaarikertolaskun suhteen. Lisäksi kuvaus L helposti nähdään olevan injektio, joten se on bijektio joukolle W. Toisin sanoen L on $\mathbb{R}$-isomorfismi avaruuksien V ja W välillä.

c) Edellisen kohdan tulosten nojalla sovitaan samastamaan vektori $\mathbf{v} \in V$ ja vektori $(\mathbf{v}, \mathbf{0}_V) \in V \times V$. Huomataan, että

$$i(\mathbf{v}, \mathbf{0}_V = (0+1i)(\mathbf{v}, \mathbf{0}_V) = (\mathbf{0}_V, \mathbf{v}).$$

Tästä seuraa, että

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{v}, \mathbf{0}_V) + (\mathbf{0}_V, \mathbf{w}) = (\mathbf{v}, \mathbf{0}_V) + i(\mathbf{w}, \mathbf{0}_V) = \mathbf{v} + i\mathbf{w}.$$

Kääntäen samalla tavalla (suorittamalla laskuja käänteisessä järjestyksessä) nähdään, että

$$\mathbf{v} + i\mathbf{w} = (\mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Näin ollen jokainen avaruuden $V \times V$ vektori voidaan kirjoittaa *yksikäsitteisellä tavalla* muodossa $\mathbf{v} + i\mathbf{w}$, missä $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$. Lisäksi kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$

$$(a + ib)(\mathbf{v} + i\mathbf{w}) = (a + ib)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (a\mathbf{v} - b\mathbf{w}, a\mathbf{w} + b\mathbf{v}) =$$

$$= (a\mathbf{v} - b\mathbf{w}, \mathbf{0}_V) + (\mathbf{0}_V, a\mathbf{w} + b\mathbf{v}) = (a\mathbf{v} - b\mathbf{w}) + i(a\mathbf{w} + b\mathbf{v}).$$

7*. Olkoon p alkuluku. Tarkastellaan $\mathbb{Z}_p$-vektoriavaruutta $\mathbb{Z}_p^2$. Määritellään joukossa $\mathbb{Z}_p^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ relaatio $\sim$ ehdolla

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{w} \text{ jos ja vain jos on olemassa } k \in \mathbb{Z}_p \text{ siten, että } k\mathbf{v} = \mathbf{w}.$$

a) Osoita, että $\sim$ on ekvivalenssirelaatio.
b) Osoita, että jokaisen alkion $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}_p^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ luokassa on täsmälleen $(p - 1)$ alkiota.
c) Osoita edellisen avulla, että avaruudella $\mathbb{Z}_p^2$ on tasan $(p + 1)$ yksiulotteista aliavaruutta.
d) Kuinka monta yksiulotteista aliavaruutta on $\mathbb{Z}_p$-vektoriavaruudella $\mathbb{Z}_p^n$, $n \geq 1$?

Ratkaisu: a) Olkoon K kunta ja V K-vektoriavaruus. Osoitetaan yleisesti, että joukossa $V \setminus \{\mathbf{0}_V\}$ määritelty relaatio $\sim$,

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{w} \text{ jos ja vain jos on olemassa } k \in K \text{ siten, että } k\mathbf{v} = \mathbf{w}$$

(i) Refleksivisyys: $\mathbf{v} = 1_K\mathbf{v}$, joten $\mathbf{v} \sim \mathbf{v}$ kaikilla $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}_p^2$.

(ii) Symmetrisyys: Oletetaan, että $\mathbf{v} \sim \mathbf{w}$, missä $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \setminus \{0_V\}$. Tällöin on olemassa $k \in K$ siten, että $k\mathbf{v} = \mathbf{w}$. Tässä välttämättä $k \neq 0_K$, sillä muuten $\mathbf{w} = 0_K\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$. Näin ollen $k^{-1} \in K$ on olemassa, jolloin $\mathbf{v} = k^{-1}\mathbf{w}$, mistä seuraa, että $\mathbf{w} \sim \mathbf{v}$.

(iii) Transitivisyys: Oletetaan, että $\mathbf{v} \sim \mathbf{w}$ ja $\mathbf{w} \sim \mathbf{u}$. Tällöin on olemassa $k, k' \in K$ siten, että

$$\mathbf{w} = k\mathbf{v}, \mathbf{u} = k'\mathbf{w}.$$

Tällöin selvästi $\mathbf{u} = (kk')\mathbf{u}$, missä $kk' \in K$.

b) Alkion $\mathbf{v}$ luokka $\overline{\mathbf{v}}$ ekvivalenssirelaation suhteen $\mathbb{Z}_p^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ koostuu kaikista joukon $\mathbb{Z}_p^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ alkioista, jotka ovat muotoa $k\mathbf{v}$, $k \in \mathbb{Z}_p$. Kun $k = 0$, alkio $k\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$ ei kuulu joukoon $\mathbb{Z}_p^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Kun taas $k \neq 0_K$, alkio $k\mathbf{v}$ kuuluu joukkoon $\mathbb{Z}_p^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, joten on erityisesti luokassa $\overline{\mathbf{v}}$. Näin ollen

$$\overline{\mathbf{v}} = \{k\mathbf{v} \mid k \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0_K\}\}.$$

Kun k käy läpi kaikki kunnan $\mathbb{Z}_p$ nollasta eroavia eri alkioita eli joukon $\mathbb{Z}_p \setminus \{0_K\}$ alkioita, saadaan eri luokan $\overline{\mathbf{v}}$ alkioita. Täsmällisemmin sanottuna vastaavuus $k \mapsto k\mathbf{v}$ on *bijektio* joukosta $\mathbb{Z}_p \setminus \{0_K\}$ joukkoon $\overline{\mathbf{v}}$. Tämä johtuu yhdestä vertoriavaruuksien supistussäännöistä (Lemma 2.5.). Näin ollen luokka $\overline{\mathbf{v}}$ on samankokoinen kuin joukko $\mathbb{Z}_p \setminus \{0_K\}$. Viimeksimainitussa on selvästi tasan $(p-1)$ alkiota.

b) Jokainen avaruuden $\mathbb{Z}_p^2$ 1-ulotteinen aliavaruus W on yhden nollasta eroavan alkion $\mathbf{v} \in Z_p^2$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$ virittämä. Kaksi eri nolla-vektorista eroavaa alkiota $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ virittävät saman aliavaruuden jos ja vain jos $\mathbf{w} = k\mathbf{v}$ jollakin (nollasta eroavilla) skalaarilla $k \in \mathbb{Z}_p$. Toisin sanoen $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ virittävät saman aliavaruuden jos ja vain jos $\mathbf{v} \sim \mathbf{w}$. Näin ollen 1-ulotteiset aliavaruuder vastaavat relaation $\sim$ ekvivalenssiluokkia ja tämä vastaavuus on bijektiivinen. Näin ollen riittää laskea luokkien lukumäärä.
Ekvivalenssirelaation $\sim$ jakaa joukon $\mathbb{Z}_p^2 \setminus \{0_V\}$ luokkien erilliseksi yhdisteeksi. Joukossa $\mathbb{Z}_p^2 \setminus \{0_V\}$ on tasan $p^2 - 1$ alkiota. b)-kohdan nojalla jokaisessa luokassa on tasan $(p-1)$ alkiota. Näin ollen luokkien lukumäärä on

$$\frac{p^2 - 1}{p - 1} = p + 1.$$

Edellisestä seuraa, että 1-ulotteisia aliavaruuksia on saman verran.

d) Yleistämällä c)-kohdan ratkaisutapaa avaruudessa $(\mathbb{Z}_p^n)$, nähdään, että tällä avaruudella on

$$\frac{p^n - 1}{p - 1} = 1 + p + p^2 + \ldots + p^{n-1}$$

yksiulotteista aliavaruutta.

8*. Kun A ja B ovat äärellisiä joukkoja, yhdisteen $A \cup B$ alkioiden lukumäärä voidaan laskea kaavalla $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cup B|$. Harjoituksen 3 b)-kohdan tulosta voidaan pitää tämän kaavan analogiana äärellisulotteisille vektoriavaruuksille.

Kolmelle äärelliselle joukolle A, B, C vastaava kaava on

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Harjoituksen 3 valossa voisi arvata, että äärellisulotteisen vektoriavaruuden V aliavaruuksille W, U, Z pätee analoginen kaava

$$\dim(W+U+Z) = \dim W + \dim U + \dim Z - \dim(W \cap U) - \dim(W \cap Z) - \dim(U \cap Z) + \dim(W \cap U \cap Z).$$

Näytä, että tämä kaava ei kuitenkaan pidä paikkaansa yleisesti.

Ratkaisu: Olkoot W, U, Z $\mathbb{R}$-avaruuden $\mathbb{R}^2$ yksiulotteisia aliavaruuksia, jotka leikkaavat pareittain ainoastaan origossa. Esimerkiksi käyvät

$$W = \operatorname{Span}(1, 0),$$

$$U = \operatorname{Span}(0, 1),$$

$$Z = \text{Span}(1,1).$$

Tällöin $W \cap U = W \cap Z = U \cap Z = W \cap U \cap Z = \{0\}$, joten

$$\dim W + \dim U + \dim Z - \dim(W \cap U) - \dim(W \cap Z) - \dim(U \cap Z) + \dim(W \cap U \cap Z) = 3.$$

On kuitenkin selvä, että aliavaruuden $W + U + Z$ dimensio ei voi olla kolme, sillä se on kaksiulotteisen avaruuden aliavaruus. Itse asiassa selvästi $W + U + Z = \mathbb{R}^2$, joten $\dim(W + U + Z) = 2$.