Luku 2

Äärellisulotteiset vektoriavaruudet

2.1. Vektoriavaruudet

Siirrymme nyt varsinaiseen lineaarialgebraan. Nykyään tällä termillä tarkoitetaan yleensä matemaatiikan osa-aluetta, joka tutkii niin sanottuja *moduleita*. Me keskitymme aluksi kuitenkin ainoastaan modulien tärkeään erikoistapaukseen eli *vektoriavaruuksiin*.

Lukija on tutustunut vektoriavaruuden käsitteeseen jo aikaisemin Lineaarialgebran peruskurssilla, mutta tällöin kyse oli ainoastaan *reaalikertomisista* vektoriavaruuksista, eli sellaisista, joiden alkioita voidaan kertoa reaaliluvuilla. Tämä on erikoistapaus yleisistä vektoriavaruuksista, joissa *skalaareiksi* otetaan jonkun *kunnan* alkioita.

Edellisessä luvussa olemme tarkastelleet joukossa X määriteltyjä *laskutoimituksia*, jotka ovat määritelmän mukaan kuvauksia $X \times X \to X$. Lineaarialgebran peruskurssilta tuttu vektoriavaruuksien *skalaarikertolasku* ei kuitenkaan ole minkään joukon laskutoimitus (paitsi erikoistapauksessa $V = \mathbb{R}$), sillä se on kuvaus $\mathbb{R} \times V \to V$, jossa "kerrottavat" otetaan eri joukoista, vektori $\mathbf{v} \in V$ kerrotaan reaaliluvulla $r \in \mathbb{R}$ ja lopputuloksena saadaan joukon V alkio $r\mathbf{v}$. Kyse on siis uudentyyppisestä laskutoimituksesta, joka ei ole laskutoimitus missään joukossa. Tästä syystä esitetään seuraava uusi käsite.

Olkoot X, Y joukkoja. Kuvausta $\cdot\colon Y \times X \to X$ sanotaan *joukon Y (vasemmanpuoleiseksi) ulkoiseksi laskutoimitukseksi joukossa X*. Kun $(y, x) \in Y \times X$ merkitään $\cdot(y, x)$ yksinkertaisesti $y \cdot x$ tai vielä yksinkertaisemmin yx. Käytämme ulkoiselle laskutoimitukselle siis *multiplikatiivista* merkintätapaa.

On myös mahdollista puhua oikeanpuoleisesta ulkoisista laskutoimituksista. Pärjämme vektoriavaruuksien teoriassa ainoastaan vasemmanpuoleisen ulkoisen laskutoimoituksen käsitteellä, mutta yleisemmässä modulien teoriassa käytetään sekä vasen-, että oikeanpuoleisia ulkoisia laskutoimituksia.

Määritelmä 2.1. *Olkoon $(K, +, \cdot)$ kunta ja V joukko. Oletetaan, että joukossa V on määritelty laskutoimitus $+\colon V \times V \to V$ sekä kunnan K vasemmanpuoleinen ulkoinen laskutoimitus $\cdot\colon K \times V \to V$. Kolmikko $(V, +, \cdot)$ on K-vektoriavaruus jos seuraavat ehdot toteutuvat.*

(i) $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{u} = \mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{u})$ *kaikilla* $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \in V$ *(yhteenlaskun liitännäisyys)*

(ii) $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$ *kaikilla* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ *(yhteenlaskun vaihdannaisuus)*

(iii) *On olemassa alkio* $\mathbf{0}_V \in V$*, jolle pätee*

$$\mathbf{v} + \mathbf{0}_V = \mathbf{v} \tag{2.2}$$

kaikilla $\mathbf{v} \in V$ *(yhteenlaskun neutraalialkion olemassaolo)*

(iv) *Jokaisella* $\mathbf{v} \in V$ *on olemassa* $-\mathbf{v} \in V$ *siten, että*

$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}_V \tag{2.3}$$

(vasta-alkion olemassaolo)

(v) $k(k'\mathbf{v}) = (kk')\mathbf{v}$ *kaikilla* $k, k' \in K, \mathbf{v} \in V$ *(skalaarikertolaskun liitännäisyys).*

(vi) $(k+k')\mathbf{v} = k\mathbf{v}+k'\mathbf{v}$ *kaikilla* $k, k' \in K, \mathbf{v} \in V$ *(skalaarikertolasku ositteleva vektorien yhteenlaskun suhteen)*

(vii) $k(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = k\mathbf{v} + k\mathbf{w}$ *kaikilla* $k \in K, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ *(vektorien yhteenlasku ositteleva skalaarikertolaskun suhteen)*

(viii) $1_K\mathbf{v} = \mathbf{v}$ *kaikilla* $\mathbf{v} \in V$ *(skalaarikertolaskun neutraalialkio)*

Määritelmän mukaan K-vektoriavaruus on kolmikko $(V, +, \cdot)$, mutta yleensä puhutaan yksinkertaisesti K-vektoriavaruudesta V. Myös sanontaa *vektoriavaruus kunnan K yli* käytetään. Jos kunta K oletetaan tunnetuksi sen maininta voidaan pudottaa ja puhua yksinkertaisesti vektoriavaruudesta V.

Kunta K on K-vektoriavaruuden $(V, +, \cdot)$ *skalaarikunta* tai *kerroinkunta*. Sen alkioita sanotaan vektoriavaruuden *(skalaari)kertoimiksi* tai *skalaareiksi*. Vektoriavaruuden V alkioita taas on tapana sanoa *vektoreiksi*. Selkeyden vuoksi usein käytetään sopimusta, jonka mukaan vektoreita kirjoitetaan lihavoidulla fontilla erottamaan niitä skalaareista. Tätä merkintätapaa olemme jo käyttäneet vektoriavaruuden määritelmässä yllä.

Vektoriavaruuden laskutoimitusta $+\colon V \times V \to V$ sanotaan vektoriavaruuden V *yhteenlaskuksi*. Vektoriavaruuden määritelmän 2.1 ehdot (i)-(iv) tarkoittavat täsmälleen sitä, että pari $(V, +)$ on Abelin ryhmä. Tämän ryhmän nolla-alkio on määritelmän kohdassa (iii) mainittu *nollavektori* $\mathbf{0}_V$. Nollavektoria sanotaan joskus myös vektoriavaruuden *origoksi*. Jos vektoriavaruus V oletetaan tunnetuksi, alaindeksi voidaan pudottaa ja merkitä nollavektoria yksinkertaisesti symbolilla $\mathbf{0}$. Ehto (2.2) määrää nollavektorin yksikäsitteisesti, kuten aina neutraalialkion kohdalla. Myös ehdon (2.3) määrittelemä vektorin $\mathbf{v}$ vastavektori $(-\mathbf{v})$ on yksikäsitteinen, tämä osoitettiin viime luvussa.

Ulkoista laskutoimitusta $\cdot\colon K \times V \to V$ sanotaan vektoriavaruuden V *skalaarikertolaskuksi* tai *skalaarituloksi*. Sen ominaisuuksia postuloidaan vektoriavaruuden määritelmän ehdoissa (v)-(viii). Näistä ominaisuudet (vi) ja (vii) (osittelulait) sitovat vektoriavaruuden yhteen- ja skalaarikertolaskua yhteen. Huomaa, että määritelmässä 2.1 olemme tarkoituksella käyttäneet samoja merkintöjä eri laskutoimituksille. Esimerkiksi symboli $+$ tarkoittaa, kontekstista riippuen, yllä sekä kunnan K yhteenlaskua, että vektoriavaruuden V yhteenlaskua, jotka ovat yleisesti ottaen eri laskutoimituksia. Samoin $\cdot$ on sekä kunnan kertolaskuun, että vektoriavaruuden skalaarikertolaskuun viittava merkki. Yleensä matematiikassa tällaista symbolien ”ylikuormittamista” eli *tuplanotaatiota* ei katsota hyväksi, mutta joissakin tapauksissa se on sallittua ja voidaan sanoa oleva jopa vakiintunut tapa. Tämä on juuri sellainen tapaus. Asiayhteydestä pitäisi käydä selväksi mitä laskutoimitusta milloinkin tarkoitetaan.

Esimerkiksi tarkastellaan yhtälöä, joka esiintyy yllä vektoriavaruuden määritelmässä kohdassa (vi) eli yhtälöä

$$(k + k')\mathbf{v} = k\mathbf{v} + k'\mathbf{v}$$

Tässä yhtälön vasemmalla puolella $k + k'$ tarkoittaa yhteenlaskua kunnassa K, koska k, k' ovat kunnan K alkioita, mutta oikealla puolella esiintyvät tulot $k\mathbf{v}$ ja $k'\mathbf{v}$ ovat jo joukon V alkioita, joten lausekkeessa $k\mathbf{v} + k'\mathbf{v}$ plus-merkki viittaa jo vektoriavaruudens V yhteenlaskuun. Samalla tavalla yhtälössä

$$k(k'\mathbf{v}) = (kk')\mathbf{v}$$

oikealla puolella ensin kerrotaan alkiot k ja k' kunnassa K keskenään ja sitten skalaarilla kk' kerrotaan vektoriavaruuden alkio $\mathbf{v}$. Vasemmalla puolella taas esiintyy ainoastaan vektoriavaruuden V skalaarikertolasku.

Esimerkkejä 2.4. *(1) Olkoon $(K, +, \cdot)$ kunta. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ mielivaltainen ja olkoon*

$$V = K^n = \{(k_1, k_2, \dots, k_n) \mid k_i \in K, i = 1, \dots, n\}$$

kaikkien n-jonojen, joiden kaikki koordinaatit ovat joukon K alkioita, muodostama joukko. Kyseessä on siis joukon K kopioista muodostettu n-kertainen karteesinen tulo. *Määritellään yhteenlasku $V \times V \to V$ ja skalaarikertolasku $K \times V \to V$ kunnan K yhteen- ja kertolaskun avulla koordinaateittain kaavoilla*

$$(k_1, k_2, \dots, k_n) + (k'_1, k'_2, \dots, k'_n) = (k_1 + k'_1, k_2 + k'_2, \dots, k_n + k'_n),$$

$$k(k_1, k_2, \dots, k_n) = (kk_1, kk_2, \dots, kk_n).$$

Tällöin $(K^n, +, \cdot)$ on K-vektoriavaruus. Tarkistetaan esimerkiksi määritelmän 2.1 ehto (vi) ja jätetään muiden ehtojen verifiointi lukijalle harjoitustehtäväksi. Olkoot $k, k' \in K$, $\mathbf{v} = (k_1, \dots, k_n) \in K^n$. Tällöin

$$(k+k')\mathbf{v} = ((k+k')k_1, (k+k')k_2, \dots, (k+k')k_n) \overset{(i)}{=} (kk_1+k'k_2, kk_2+k'k_2, \dots, kk_n+k'k_n)$$

$$= (kk_1, kk_2, \dots, kk_n) + (k'k_1, k'k_2, \dots, k'k_n) = k\mathbf{v} + k'\mathbf{v}.$$

Kohdassa (i) käytimme hyväksi kunnan K osittelulakia.

K^n on kanoninen esimerkki n-ulotteisesta K- vektoriavaruudesta. Myöhemmin osoitamme, että jokainen äärellisulotteinen K-vektoriavaruus on isomorfinen vektoriavaruuden K^n kanssa jollakin $n \in \mathbb{N}$.

Tapauksessa $n = 0$ tulkitaan tyhjä 0-pituinen jono *tyhjäksi joukoksi. Tällöin on olemassa tasan yksi 0-jono (nimittäin tyhjä jono) joten K^0 on yhden alkion vektoriavaruus $V = \{0_V\}$. Tämän vektoriavaruuden ainoa vektori on samalla sen nollavektori. Sanomme tällaista vektoriavaruutta* triviaaliksi.

Tapauksessa $n = 1$ samastetaan jono (x) alkion x kanssa. Tällöin $K^1 = K$, vektoriavaruuden K^1 yhteenlasku on sama asia kuin kunnan K alkuperäinen yhteenlasku ja skalaarikertolasku on sama asia kuin kunnan K alkuperäinen kertolasku. Erityisesti siis jokainen kunta K voidaan tulkita K-vektoriavaruutena.

(2) *Olkoon $(K, +, \cdot)$ kunta ja olkoon X mielivaltainen joukko. Kaikkien kuvausten $X \to K$ joukossa K^X määritellään luonnollinen K-vektoriavaruuden struktuuri seuraavasti. Olkoot $f, g \in K^X$ ja $k \in K$. Olkoot $f, g\colon K \to X$ ja $k \in K$. Määritellään kuvaukset $f + g\colon K \to X$, $kf\colon K \to X$ "pisteittäin", eli asetetaan*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ (huom., oikealla puolella yhteenlasku kunnassa } K),$$

$$(kf)(x) = k \cdot f(x) \text{ (huom., oikealla puolella kertolasku kunnassa } K).$$

Tällöin $(K^X, +, \cdot)$ on K-vektoriavaruus. Tarkistetaan esimerkiksi yhteenlaskun liitännäisyyttä. Olkoot $f, g, h \in K^X$ ja $k, k' \in K$. Tällöin

$$((f + g) + h)(x) = (f + g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) =$$

$$f(x) + (g(x) + h(x)) = f(x) + (g + h)(x) = (f + (g + h))(x),$$

sillä yhteenlasku on liitännäinen kunnassa K. Koska tämä pätee kaikilla $x \in X$, saadaan $(f + g) + h = f + (g + h)$ (kaksi kuvausta ovat samat täsmälleen silloin kun niillä on samat arvot kaikissa määrittelyjoukon pisteissä).

Samalla tavalla tarkistetaan muut yhteenlaskun ominaisuudet. Nolla-vektori on nollakuvaus $\mathbf{0} \in K^X$ *joka määritellään pisteittäin $\mathbf{0}(x) = 0$ kaikilla $x \in X$. Vektorin $f\colon X \to K$ vastavektori $-f$ määritellään säännöllä $(-f)(x) = -f(x)$ kaikilla $x \in X$.*

Tarkistetaan vielä skalaarikertolaskun ominaisuuksista ehdon (v). Olkoot $k, k' \in K$, $f\colon X \to K$ ja olkoon $x \in X$. Tällöin, koska kertolasku kunnassa K on liitännäinen, saadaan

$$(k(k'f))(x) = k((k'f)(x)) = k(k'f(x)) = (kk')f(x) = ((kk')f)(x).$$

Näin ollen $k(k'f) = (kk')f$. Muut ehdot tarkistetaan samalla tavalla.

Edellisen esimerkin vektoriavaruutta K^n voidaan ajatella vektoriavaruuden K^X erikoistapauksena. Nimittäin olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tällöin n-jono $(k_1, k_2, \ldots, k_n) \in K^n$ voidaan ajatella kuvauksena $f\colon [n] = \{1, \ldots, n\} \to K$. Tälle kuvaukselle pätee $f(i) = k_i$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Tällä tavalla tulkittuna $K^n = K^{[n]}$.

Tapauksessa $X = \mathbb{N}$ (luonnollisten lukujen joukko) avaruus $K^{\mathbb{N}}$ koostuu kaikista (äärettömän pitkistä) jonoista $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, *$a_i \in K$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$.*

(3) *Olkoon K' kunnan K alikunta. Varustetaan K sen tavallisella yhteenlaskulla $+\colon K \times K \to K$ ja määritellään skalaarikertolasku $\cdot\colon K' \times K \to K$ kunnan K tavallisen kertolaskun rajoittumana. Tällöin $(K, +, \cdot)$ on K'-vektoriavaruus. Jokainen kunta siis voidaan ajatella vektoriavaruutena sen minkä tahansa alikunnan yli. Esimerkiksi $\mathbb{R}$ on $\mathbb{Q}$-vektoriavaruus, $\mathbb{C}$ on $\mathbb{R}$-vektoriavaruus ja yhtä hyvin $\mathbb{Q}$-vektoriavaruus jne.*

Vektorien vähennyslasku

Olkoon $(V, +, \cdot)$ vektoriavaruus kunnan K yli. Tällöin $(V, +)$ on additiivisesti merkitty Abelin ryhmä, joten voimme puhua vektorien vähennyslaskusta $\mathbf{v} - \mathbf{w}$, alkioiden monikerroista jne, kuten Abelin ryhmissä yleensäkin. Seuraavassa lemmassa listataan joitakin vektoriavaruuden vähennys-ja skalaarikertolaskun perusominaisuuksia.

Lemma 2.5. *Olkoon $(V, +, \cdot)$ vektoriavaruus kunnan K yli. Tällöin kaikilla $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in V$, $k, k' \in K$ pätevät seuraavat väitteet.*

- $(k - k')\mathbf{v} = k\mathbf{v} - k'\mathbf{v}$
- $k(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = k\mathbf{v} - k\mathbf{w}$
- $(-k)\mathbf{v} = -(k\mathbf{v}) = k(-\mathbf{v})$
- $k\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$ *jos ja vain jos* $k = 0_K$ *tai* $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$
- $(-1_K)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$
- *Jos* $k\mathbf{v} = k'\mathbf{v}$, *niin joko* $k = k'$ *tai* $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$ *(ensimmäinen supistussääntö)*
- *Jos* $k\mathbf{v} = k\mathbf{w}$, *niin joko* $k = 0_K$ *tai* $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ *(toinen supistussääntö)*

Todistus. Käyttämällä osittelakia (vi) saadaan

$$(k - k')\mathbf{v} + k'\mathbf{v} = ((k - k') + k')\mathbf{v} = k\mathbf{v},$$

mistä seuraa, että $(k - k')\mathbf{v} = k\mathbf{v} - k'\mathbf{v}$. Valitsemmalla tässä $k = k'$ saadaan

$$0_K\mathbf{v} = (k - k)\mathbf{v} = k\mathbf{v} - k\mathbf{v} = \mathbf{0}_V.$$

Vastaavasti osittelaista (vii) seuraa, että

$$k(\mathbf{v} - \mathbf{w}) + k\mathbf{w} = k((\mathbf{v} - \mathbf{w}) + \mathbf{w}) = k\mathbf{v},$$

mistä seuraa, että $k(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = k\mathbf{v} - k\mathbf{w}$. Valitsemmalla tässä $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ saadaan

$$k\mathbf{0}_V = k(\mathbf{v} - \mathbf{v}) = k\mathbf{v} - k\mathbf{v} = \mathbf{0}_V.$$

Olemme osoittaneet kaksi ensimmäistä väitettä, sekä sen, että $k\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$ kun $k = 0_K$ tai kun $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$. Osoitetaan käänteinen väite. Oletetaan, että $k\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$ ja $k \neq 0_K$. Tällöin, koska K on kunta, on olemassa käänteisalkio $k^{-1} \in K$. Skalaarikertolaskun liitännäisyyden, edellä jo todistetun, ja vektoriavaruuksien määritelmän viimeisen ehdon (viii) nojalla tällöin

$$\mathbf{v} = 1_K\mathbf{v} = (k^{-1}k)\mathbf{v} = k^{-1}(k\mathbf{v}) = k^{-1}\mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V.$$

Muut väitteet osoitetaan samalla tavalla tai johdetaan toisistaan ja edellä jo todistetuista. Yksityiskohdat jätetään lukijalle pohdittavaksi. $\square$

Huomautus: Yhtälöstä $-\mathbf{v} = (-1_K)\mathbf{v}$ seuraa, että vektoriavaruudessa vasta-vektorin olemassaolo voidaan johtaa skalaarikertolaskun ominaisuuksista. Tämä tarkoittaa sitä, että vektoriavaruuden määritelmän 2.1 ehto (iii) on *redundantti* eli se voidaan johtaa muista ehdoista.

Olkoon V K-vektoriavaruus. Tällöin kunnassa K, kuten jokaisessa renkaassa, on määritelty "renkaan kokonaisluvun" käsite. Tämä tarkoittaa sitä, että kokonaisluku $n \in \mathbb{Z}$ voidaan tulkita myös kunnan K alkiona

$$n = n_K = n \cdot 1_K = \underbrace{1_K + 1_K + \ldots + 1_K}_{n \text{ kertaa}},$$

joka on alkion 1_K monikerta Abelin ryhmässä $(K, +)$. Tällöin jokaisella $\mathbf{v} \in V$ ja jokaisella kunnan kokonaisluvulla n on määritelty skalaaritulo $n \cdot \mathbf{v} = n\mathbf{v}$.

Toisaalta $(V, +)$ on Abelin ryhmä, joten siinä on määritelty myös vektorin $\mathbf{v}$ monikerta $n\mathbf{v}$, $n \in \mathbb{Z}$. Ottaen huomioon, että sekä skalaaritulo $n\mathbf{v}$, että myös monikerta $n\mathbf{v}$ merkitään nyt samalla tavalla, olisi ikävä, jos ne tarkoittaisivat eri asioita. Onneksi näin ei pääse käymään - vektoriavaruudessa lausekkella $n\mathbf{v}$ on aina sama merkitys riippumatta sitä, tulkitaanko tämä tulo monikerraksi eli alkioksi $\underbrace{\mathbf{v} + \mathbf{v} + \ldots + \mathbf{v}}_{n \text{ kertaa}}$ vai skalaarituloksi $n_K\mathbf{v}$. Tämän tarkka todistus jätetään harjoitustehtäväksi.

Esimerkki 2.6.

Olkoon p alkuluku. Tällöin kokonaislukujen modulo m rengas $\mathbb{Z}_p$ on kunta (Seuraus 1.96). Olkoon $(V, +)$ mielivaltainen Abelin ryhmä. Tutkitaan millä ehdoilla Abelin ryhmässä $(V, +)$ voidaan määritellä $\mathbb{Z}_p$-vektoriavaruuden struktuuri, toisin sanoen milloin on mahdollista määritellä ulkoinen laskutoimitus $\cdot \colon \mathbb{Z}_p \times V \to V$ siten, että kolmikosta $(V, +, \cdot)$ tulisi $\mathbb{Z}_p$-vektoriavaruus.

Olkoon $m_p \in \mathbb{Z}_p$ mielivaltainen kokonaisluku modulo p (tässä $m \in \mathbb{Z}$) ja olkoon $\mathbf{v} \in V$ mielivaltainen. Jos vaadittu ulkoinen laskutoimitus $\cdot \colon \mathbb{Z}_p \times V \to V$ olisi olemassa, vektoriavaruuden määritelmän ehdon (viii) nojalla pätisi $1_{\mathbb{Z}_p}\mathbf{v} = \mathbf{v}$. Oletetaan ensin, että yllä $m > 0$. Kunnassa K pätee

$$m_p = m1_{\mathbb{Z}_p} = \underbrace{1_{\mathbb{Z}_p} + \ldots + 1_{\mathbb{Z}_p}}_{m \textit{ kertaa}},$$

vektoriavaruuden toisen osittelulain (vii) nojalla saadaan

$$m_p\mathbf{v} = (\underbrace{1_{\mathbb{Z}_p} + \ldots + 1_{\mathbb{Z}_p}}_{m \textit{ kertaa}})\mathbf{v} = \underbrace{1_{\mathbb{Z}_p}\mathbf{v} + \ldots + 1_{\mathbb{Z}_p}\mathbf{v}}_{m \textit{ kertaa}} =$$

$$\underbrace{\mathbf{v} + \ldots + \mathbf{v}}_{m \textit{ kertaa}} = m\mathbf{v}.$$

Sama lopputulos saadaan kun $m = 0$ tai $m < 0$ (tarkista). Toisin sanoen, **jos** *vaadittu skalaarikertolasku on olemassa, se on yksikäsitteinen, ja annettu välttämättä kaavalla*

$$m_p\mathbf{v} = m\mathbf{v} \tag{2.7}$$

kaikilla $m_p \in Z_p, \mathbf{v} \in V$. *Koska tämän yhtälön oikea puoli riippuu edustajan* $m \in m_p$ *valinnasta, se ei ole välttämättä hyvin määritelty, joten seuraavaksi mietitään milloin se olisi järkevä.*

Oletetaan, että kaavalla 2.7 määritelty skalaarikertolasku on hyvinmääritelty. Tällöin erityisesti jokaisella $\mathbf{v} \in V$ *pätee*

$$\mathbf{0}_V = 0\mathbf{v} = 0_p\mathbf{v} = p_p\mathbf{v} = p\mathbf{v},$$

koska kunnassa $\mathbb{Z}_p$ *pätee* $0_p = p_p$. *Toisin sanoen, jos kaavalla 2.7 määritelty skalaarikertolasku on hyvinmääritelty, Abelin ryhmässä* $(V, +)$ *jokaiselle alkiolle* $\mathbf{v} \in V$ *pätee* $p\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$.

Kääntäen olkoon $(V, +)$ *Abelin ryhmä, jonka jokaisen alkion* p*-monikerta on ryhmän nolla-alkio. Osoitetaan, että kaavalla 2.7 antama* $\mathbb{Z}_p$*-skalaarikertolasku on tällöin hyvinmääritelty. Olkoot* $m, n \in \mathbb{N}$ *sellaisia, että* $m_p = n_p$. *Tämä tarkoittaa sitä, että* $m = n+kp$ *jollakin kokonaisluvulla* $k \in \mathbb{Z}$. *Tällöin jokaisella* $\mathbf{v} \in V$ *pätee*

$$m\mathbf{v} = (n + kp)\mathbf{v} = n\mathbf{v} + k(p\mathbf{v}) = n\mathbf{v} + k \cdot 0_V = n\mathbf{v},$$

sillä $p\mathbf{v} = 0_V$ *oletuksen nojalla. Näin ollen kaavassa 2.7 saadaan sama tulos riipumatta luokan edustajan valinnasta, jolloin tämän kaavan antama ulkoinen laskutoimitus* $\cdot : \mathbb{Z}_p \times V \to V$ *on olemassa. Kolmikko* $(V, +, \cdot)$ *on tällöin* $\mathbb{Z}_p$*-vektoriavaruus, tämän verifiointi jätetään harjoitustehtäväksi.*

Näin ollen $\mathbb{Z}_p$*-vektoriavaruudet vastaavat yksikäsitteisti sellaisia Abelin ryhmiä, joissa jokaisen alkion* p*-monikerta on ryhmän nolla-alkio. Jokaisessa tällaisessa ryhmässä voidaan määritellä skalaarikertolasku joka tekee siitä* $\mathbb{Z}_p$*-vektoriavaruuden yksikäsitteisellä tavalla, ja ainoastaan tällaisessa ryhmässä se on ylipäätään mahdollista.*

Esimerkki 2.8. *Olkoon* p *alkuluku ja olkoon* $G \subset \mathbb{C}$ *sellaisten kompleksilukujen* z *muodostama joukko, joille pätee* $z^p = 1$. *Toisin sanoen* G *on polynomiyhtälön* $z^p = 1$ *kaikkien kompleksisten ratkaisujen muodostama joukko. Koska*

$$(zw)^p = z^p w^p,$$

$$(z^{-1})^p = (z^p)^{-1}$$

kaikilla $z, w \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, G *on Abelin ryhmä kompleksilukujen kertolaskun suhteen. Koska tämä ryhmä on merkitty multiplikatiivisesti, siinä monikerrat tarkoittavat potensseja. Määritelmänsä perusteella* G *on Abelin ryhmä, jossa jokaisen alkion* p*-potenssi on ryhmän neutraalialkio. Edellisen nojalla ryhmässä* G *voidaan määritellä* $\mathbb{Z}_p$*-vektoriavaruuden struktuuri (yksikäsitteisellä tavalla).*

Aliavaruudet

Olkoon $(V, +, \cdot)$ K-vektoriavaruus ja olkoon $W \subset V$. Osajoukkoa W sanotaan vektoriavaruuden V *aliavaruudeksi*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot.

(i) W on suljettu V:n yhteenlaskun suhteen, toisin sanoen kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$ pätee $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in W$.

(ii) W on suljettu V:n skalaarikertolaskun suhteen, toisin sanoen kaikilla $k \in K$, $\mathbf{v} \in W$ pätee $k\mathbf{v} \in W$.

(iii) W on epätyhjä.

Ehdoista (i) ja (ii) seuraa, että vektoriavaruuden V yhteen- ja skalaarikertolasku rajoittuvat hyvinmääriteltyihin aliavaruuden W yhteen-ja skalaarikertolaskuoperaatioihin $+\colon W \times W \to W$, $\cdot\colon K \times W \to W$. Seuraavassa lemmassa osoitetaan, että näillä varustettuna W on K-vektoriavaruus. Erityisesti $(W, +)$ on Abelin ryhmän $(V, +)$ aliryhmä, joten W sisältää avaruuden V nolla-vektorin ja jokaisella sen vektorilla on vasta-alkio yhteenlaskun suhteen. Kuten seuraavan lemman todistuksessa näytetään, näitä ominaisuuksia ei aliavaruudelta tarvitse erikseen määritelmässä vaatia, sillä ne seuraavat siitä, että W on suljettu skalaarikertolaskun suhteen.

Lemma 2.9. *Olkoon W K-vektoriavaruuden V aliavaruus. Tällöin $(W, +, \cdot)$ on K-vektoriavaruus. Tässä laskutoimitukset $+$ ja $\cdot$ ovat vektoriavaruuden V laskutoimitusten rajoittumia (kts. edellinen kappale). Lisäksi $\mathbf{0}_W = \mathbf{0}_V$ ja jokaisella $\mathbf{w} \in W$ sen vasta-vektori $-\mathbf{w}$ vektoriavaruudessa W on sama kuin sen vasta-vektori $-\mathbf{w}$ vektoriavaruudessa V.*

Todistus. Vektoriavaruuden määritelmän 2.1 ehdot (i)-(ii) ja (vi)-(viii) periytyvät osajoukkoon W automaattisesti. Osoitetaan, että $\mathbf{0}_V \in W$, tällöin olemme näyttäneet, että W:n yhteenlaskulla on nolla-alkio ja tämä on sama kuin V:n yhteenlaskun nolla-alkio $\mathbf{0}_V$. Oletuksen (iii) nojalla on olemassa $\mathbf{w} \in W$. Koska (Lemman 2.5 nojalla) pätee

$$0_K\mathbf{w} = \mathbf{0}_V,$$

oletuksesta (ii) tällöin seuraa, että $\mathbf{0}_V \in W$.

Koska jokaisella $\mathbf{w} \in W$ oletuksen (ii) ja Lemman 2.5 nojalla pätee

$$(-1_K)\mathbf{v} = -\mathbf{w} \in W,$$

osajoukko W on suljettu vasta-vektorien suhteen. Erityisesti myös ehto (iv) vektoriavaruuden määritelmässä 2.1 toteutuu ja lisäksi W:n vektori vasta-vektori W:ssä on sama kuin sen vasta-vektori V:ssä. □

Kun W on vektoriavaruuden V aliavaruus, merkitään $W \subset V$.

Esimerkki 2.10. *Olkoon $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ kaikkien kuvausten $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muodostama $\mathbb{R}$-vektoriavaruus (kts. esimerkki 2.4). Seuraavat osajoukot ovat vektoriavaruuden V aliavaruuksia:*

1. $V_0 = \{f \in V \mid f \text{ on jatkuva pisteessä } 0\}$,

2. $C^0(\mathbb{R}) = \{f \in V \mid f \text{ on jatkuva }\}$,

3. $C^1(\mathbb{R}) = \{f \in V \mid \text{ derivaatta } f'(x) \text{ on olemassa kaikilla } x \in \mathbb{R}\}$.

Tämän verifionti jätetään harjoitustehtäväksi, tämäntyyppisen esimerkin pitäisi olla tuttu lineaarialgebran peruskurssilta.

Esimerkki 2.11. *Olkoon K kunta. Palautetaan mieleen, että* polynomifunktio $f\colon K \to K$ *on funktio, joka on muotoa*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

missä $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in K$ ovat vakioita ja $a_n \neq 0_K$. Luonnollinen luku $n \in \mathbb{N}$ on tällöin polynomin aste. *Nolla-asteiset polynomit ovat vakiofunktioita.*

Kaikki polynomifunktiot $f\colon K \to K$ muodostavat K-vektoriavaruuden K^K aliavaruuden $P(K)$. Jokaisella kiinteällä $n \in \mathbb{N}$ kaikki polynomit, joiden aste on pienempi tai yhtäsuuri kuin n, muodostavat vektoriavaruuden $P(K)$ aliavaruuden $P_n(K)$.

Kun $m \leq n$ vektoriavaruus $P_m(K)$ on vektoriavaruuden $P_n(K)$ aliavaruus.

Tämän esimerkin kaikkien väitteiden verifiointi jätetään lukijalle harjoitustehtäväksi.

Affinit osajukot

Tunnetusti tasossa $\mathbb{R}^2$ sijaitseva *suora* on $\mathbb{R}$-vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus jos ja vain jos tämä suora kulkee origon kautta. Samoin kolmiulotteisessa avaruudessa $\mathbb{R}^3$ sijaitseva *taso* on aliavaruus jos ja vain jos se kulkee origon kautta. Haluamme kuitenkin puhua yleisesti myös sellaisista suorista tai tasoista, jotka eivät sisällä origoa.

Olkoon V K-vektoriavaruus ja olkoot $\mathbf{v} \in V$, $A \subset V$. Joukkoa

$$\mathbf{v} + A = \{\mathbf{v} + \mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in A\}$$

sanomme joukon A *translaatioksi* vektorilla $\mathbf{v}$.

Olkoon V K-vektoriavaruus ja olkoon $A \subset V$. Sanomme osajoukkoa A *affiiniksi* jos A on tyhjä tai A on jonkun V:n aliavaruden W translaatio. Viimeinen ehto tarkoittaa sitä, että $A = \mathbf{v} + W$ joillakin $\mathbf{v} \in V$ and $W \leq V$. Voidaan osoittaa (HT), että tällöin W on yksikäsitteinen, mutta $\mathbf{v}$ ei ole (siksi kelpaa itse asiassa mikä tahansa A:n vektori ja vain A:n vektori).

Esimerkki 2.12. *Analyyttisesta geometrista tiedetään, että pisteiden* $(1,2), (-4,3) \in \mathbb{R}^2$ *kautta kulkevan suoran ℓ yhtälö on*

$$\mathbf{x} = (1,2) + t((-4,3) - (1,2)) = (1,2) + t(-5,1), t \in \mathbb{R},$$

missä $(-5,1)$ *on tämän suoran* suuntavektori.
Kyseinen suora on siis joukon $A = \{t(-5,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$ translaatio vektorilla $(1,2)$,

$$\ell = (1,2) + A.$$

Joukko A on tason $\mathbb{R}^2$ aliavaruus, vektorin $(-5,1)$ virittämä. Tämä on peruskurssilta tuttu ja kerrataan seuraavassa luvussa uudestaan. Näin ollen suora ℓ on affiini osajoukko. Samalla tavalla voidaan osoittaa, että mikä tahansa tason suora on affiini osajoukko.

Lineaariset kuvaukset

Vektoriavaruuksien välisiä morfismeja sanotaan *K-lineaarisiksi kuvauksiksi.* Tarkkaan ottaen, olkoot V ja V' molemmat K-vektoriavaruuksia. Kuvausta $L\colon V \to V'$ sanotaan K-lineaariseksi, jos kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ja kaikilla $k \in K$ pätee

(1) $L(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = L(\mathbf{v}) + L(\mathbf{w})$ ja

(2) $L(k\mathbf{v}) = kL(\mathbf{v})$.

Lineaarinen kuvaus siis ”säilyttää” sekä yhteenlaskun, että skalaarikertolaskun. Huomaa, että lineaarikuvaksesta $L\colon V \to W$ voidaan puhua vain silloin kun V ja W ovat saman kunnan K yli määriteltyjä vektoriavaruuksia (muuten ehdossa (2) yllä ei olisi edes järkeä).

Esimerkkejä 2.13. *(1) Olkoon $C^1(\mathbb{R})$ kaikkien jokaisessa pisteessä derivoituvien kuvausten $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muodostama $\mathbb{R}$-vektoriavaruus, vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ aliavaruus (kts. esimerkki 2.10).*

Kuvaus $\frac{d}{dx}\colon C^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f \mapsto f'$ (funktio kuvataan sen derivaattafunktiolle) on vektoriavaruuksien $C^1(\mathbb{R})$ ja $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ välinen $\mathbb{R}$-lineaarikuvaus. Tämä seuraa tutuista derivointisäänöistä

$$(f+g)' = f' + g',$$
$$(rf)' = rf'.$$

Huomaa, että $\frac{d}{dx}$ ei ole lineaarikuvaus $C^1(\mathbb{R}) \to C^1(\mathbb{R})$, sillä derivoituvan funktion derivaatta ei välttämättä ole itse derivoituva funktio.

(2) Olkoon $C^0([a,b])$ kaikkien jatkuvien funktioiden $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ muodostama $\mathbb{R}$-vektoriavaruus. Tässä $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ ovat kiinteitä lukuja. Tällöin kuvaus $L\colon C^0([a,b]) \to \mathbb{R}$,

$$L(f) = \int_a^b f(x)dx$$

on $\mathbb{R}$-lineaarinen. Tämäkin on analyysista tuttua:

$$\int_a^b (f+g)dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx,$$

$$\int_a^b rf dx = r\int_a^b f dx$$

Tämän kurssin yksi keskeisiä aiheita on äärellisulotteisten vektoriavaruuksien välisten lineaarikuvausten tutkiminen. Tämä tehdään perusteellisesti seuraavassa luvussa.

Ydin ja kuva

Olkoon $L\colon V \to W$ K-vektoriavaruuksien välinen lineaarinen kuvaus. Tällöin L on erityisesti Abelin ryhmien $(V,+)$ ja $(W,+)$ välinen ryhmähomomorfismi, joten sillä on *ydin*

$$\operatorname{Ker} L = \{\mathbf{v} \in V \mid L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W\}.$$

Lisäksi L:lle on määritelty *kuvajoukko*

$$\operatorname{Im} L = \{L(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\}.$$

Lemma 2.14. *Lineaarikuvauksen $L\colon V \to W$ ydin $\operatorname{Ker} L$ on vektoriavaruuden V aliavaruus ja kuva $\operatorname{Im} L$ on vektoriavaruuden W alaiavaruus.*

Todistus. Ryhmähomomorfismien teoriasta seuraa, että $\operatorname{Ker} L$ ja $\operatorname{Im} L$ ovat vastaavasti ryhmien $(V, +)$ ja $(W, +)$ aliryhmiä, joten ne ovat erityisesti epätyhjiä (aliryhmä aina sisältää ainakin nolla-alkion) ja suljettuja yhteenlaskun suhteen. Näin ollen, pitää vielä näyttää, että kumpikin on suljettu skalaarikertolaskun suhteen. Todetaan tämä ytimen kohdalla ja jätetään kuvan tapausta lukijalle pohdittavaksi. Olkoon $\mathbf{v} \in \operatorname{Ker} L$ ja olkoon $k \in K$. Tällöin

$$L(k\mathbf{v}) = kL(\mathbf{v}) = k\mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W,$$

joten $k\mathbf{v} \in \operatorname{Ker} L$. □

Bijektiivista lineaarista kuvausta sanotaan vektoriavaruuksien väliseksi *isomorfismiksi*. Jos kahden vektoriavaruuden V ja W välillä on olemassa lineaarinen isomorfismi, vektoriavaruuksia sanotaan *isomorfisiksi*. Isomorfiset vektoriavaruudet ovat lineaarialgebran näkökulmasta "kopioita" toisistaan, täysin samanlaisia olioita. Seuraavassa aliluvussa näytämme, että äärellisulotteisten K-vektoriavaruuksien karakterisaatio isomorfiaa vaille on erityisen helppo - sen määrää täysin vektoriavaruuden *dimensio*.

Lineaariset yhtälöt ja yhtälöryhmät

Olkoot V, W K-vektoriavaruuksia ja olkoon $L \colon V \to W$ lineaarinen kuvaus. Olkoon $\mathbf{w} \in W$ kiinteä vektori. Yhtälöä $L(\mathbf{x}) = \mathbf{w}$, missä $\mathbf{x}$ on tuntematon, sanotaan *lineaariseksi yhtälöksi*. Lineaarinen yhtälö on *homogeeninen* jos $\mathbf{w} = \mathbf{0}_W$. Tällöin sen *ratkaisujoukko* ei ole mitään muuta kuin kuvauksen L ydin $\operatorname{Ker} L$. Yleisesti lineaarisen yhtälön ratkaisujoukko ei ole välttämättä aliavaruus, mutta se on aina affiini joukko.

Lemma 2.15. *Olkoon $L \colon V \to W$ vektoriavaruuksien välinen lineaarinen kuvaus ja olkoon $\mathbf{w} \in W$. Tällöin*

$$A = \{\mathbf{v} \mid L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\}$$

on vektoriavaruuden V affiini osajoukko.

Todistus. Jos $A = \emptyset$, asia on selvä (tyhjä joukko on affiini). Muuten olkoon $\mathbf{v}_0 \in A$ kiinnitetty ja olkoon

$$V' = \operatorname{Ker} L = \{\mathbf{v} \mid L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W\}$$

vastaavan homogeenisen yhtälön ratkaisujoukko. Lineaarisen kuvauksen ytimenä V' on avaruuden V aliavaruus. Riittää osoittaa, että $A = \mathbf{v}_0 + V'$.

Olkoon $\mathbf{v} \in A$. Tällöin

$$L(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) = L(\mathbf{v}) - L(\mathbf{v}_0) = \mathbf{w} - \mathbf{w} = \mathbf{0}_W,$$

joten $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 \in V'$. Tästä seuraa, että $\mathbf{v} \in \mathbf{v}_0 + V'$.

Kääntäen olkoon $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'$, missä $\mathbf{v}' \in V'$. Tällöin

$$L(\mathbf{v}) = L(\mathbf{v}_0) + L(\mathbf{v}') = \mathbf{w} + \mathbf{0}_W = \mathbf{w},$$

joten $\mathbf{v} \in A$. □

Edellisen Lemman todistuksesta seuraa, että jos $\mathbf{v}$ on jokin tietty lineaarisen yhtälön $L(\mathbf{x}) = \mathbf{w}$ ratkaisu ja $V' = \operatorname{Ker} L$ on vastaavan homogeenisen yhtälön $L(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_W$ ratkaisujoukko, niin yhtälön $L(\mathbf{x}) = \mathbf{w}$ ratkaisujoukko on afiini joukko $\mathbf{v} + V'$. Riittää siis osata ratkaista vastaava homogeeninen yhtälö $L(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ja löytää yhtälölle $L(\mathbf{x}) = \mathbf{w}$ jokin *yksi* ratkaisu.

Esimerkki 2.16. *Tätä periaatetta käytetään usein hyväksi differentiaaliyhtälöiden teoriassa. Esimerkiksi tarkastellaan differentiaaliyhtälöä*

$$f''(x) + f(x) = x^2. \tag{2.17}$$

Tämä voidaan ajatella lineaarisena yhtälönä $L(f) = x^2$*, missä* $L\colon C^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *on lineaarinen kuvaus* $L(f) = f'' + f$*. Tässä* $C^2(\mathbb{R})$ *on kahdesti derivoittuvien kuvausten* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *muodostama vektoriavaruus.*

Differentiaaliyhtälöiden teoriassa osoitetaan, että vastaavan homogeenisen yhtälön $f''(x) + f(x) = 0$ *ratkaisujoukko on*

$$\{t_1 \cos x + t_2 \sin x \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Edellisestä Lemmasta seuraa, että kun tämä on tiedossa, riittää tarkasteltavalle yhtälölle $f''(x) + f(x) = x^2$ *löytää yksi ratkaisu. Tämä voidaan etsiä sopivan "yritteen" avulla. Nimittäin, koska tarkasteltavan yhtälön oikeanpuoleinen vakio on toisen asteen polynomi* $x \mapsto x^2$*, on järkevää etsiä ratkaisua, joka on myös toisen asteen polynomi, eli muotoa* $f(x) = ax^2 + bx + c$*. Koska tällöin* $f''(x) = 2a$*, sijoittamalla arvot yhtälöön saadaan*

$$ax^2 + bx + (c + 2a) = x^2.$$

Tämä yhtälö toteuttuu varmasti kaikilla $x \in \mathbb{R}$ *kun* $a = 1$*,* $b = 0$ *ja* $c + 2a = 0$*, eli kun* $a = 1$*,* $b = 0$*,* $c = -2$*. Näin ollen eräs ratkaisu on funktio* $f(x) = x^2 - 2$*. Edellisen Lemman nojalla yhtälön 2.17 kaikki ratkaisut ovat täsmälleen funktiot muotoa*

$$x \mapsto x^2 - 2 + t_1 \cos x + t_2 \sin x,$$

missä $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ *ovat vakioita.*

Lineaariset yhtälöryhmät kunnassa

Olkoon K kunta. Lineaarinen yhtälöryhmä kunnassa K määritellään samalla tavalla kuin reaalilukujen tapauksessa - se on muotoa

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases} \tag{2.18}$$

oleva yhtälöryhmä, jossa kertoimet a_{ij} ja vakiot b_i ovat nyt kunnan K alkioita. Yhtälöryhmän 2.18 ratkaisu on jono $(k_1, \ldots, k_m) \in K^n$ kunnan K alkioita, jotka toteuttavat yhtälöryhmän kun sijoitetaan $x_1 = k_1$, $x_2 = k_2$, ..., $x_m = k_m$.

Määritellään kuvaus $L\colon K^m \to K^n$ kaavalla $L(x_1, \ldots, x_m) = (y_1, \ldots, y_n)$, missä

$$y_i = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j$$

kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Tällöin kuvaus L on lineaarinen kuvaus K-vektoriavaruuksien K^m ja K^n välillä (tarkista!). Lineaarinen yhtälöryhmä 2.18 on puolestaan yhtäpitävä lineaarisen yhtälön $L(\mathbf{x}) = \mathbf{w}$ kanssa, missä $\mathbf{w} = (b_1, \ldots, b_n)$. Näin ollen lineaarinen yhtälöryhmä kunnassa voidaan tulkita lineaarisena yhtälönä eräässä K-vektoriavaruudessa. Lemman 2.15 mukaan lineaarisen yhtälöryhmän 2.18 ratkaisujoukko on avaruuden K^m affiini osajoukko. Jos tämä ratkaisujoukko on epätyhjä ja $\mathbf{v}_0 = (t_0, t_1, \ldots, t_m)$ on eräs kiinnitetty ratkaisu, kaikki ratkaisut ovat muotoa

$$\mathbf{v}_0 + \mathbf{v},$$

missä $\mathbf{v}$ on vastaavan *homogeenisen* yhtälöryhmän

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1m}x_m = 0_K \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2m}x_m = 0_K \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nk}x_k + \ldots + a_{nm}x_m = 0_K \end{cases} \tag{2.19}$$

ratkaisu. Homogeenisen yhtälöryhmän ratkaisujoukko on $\operatorname{Ker} L$, missä $L\colon K^m \to K^n$ kuten yllä, erityisesti se on aliavaruus.

Käytännössä lineaarinen yhtälöryhmä kunnassa K voidaan ratkaista Gaussin tai Gauss-Jordanin eliminointimenetelmillä aivan samalla tavalla kuin reaalikertoimisessa tapauksessa. Lukijaa suositellaan käymään tässä vaiheessa uusin silmin läpi kurssin Johdanto-osassa esitelty lineaaristen yhtälöryhmien teoriaa ja toteamaan, että kaikki siinä esitetyn asiat toimivat yhtä hyvin missä tahansa kunnassa. Erityisesti tulokset 4 (alkeisrivitoimitukset eivät muuta yhtälöryhmän ratkaisujoukkoa), 10 (jokainen lineaarinen yhtälöryhmä on ekvivalentti porrasmuodossa olevan yhtälöryhmän kanssa) ovat voimassa kun tarkastellaan lineaarisia yhtälöryhmiä kunnan K suhteen. Myös ratkaisujen lukumäärää koskevat tulokset 16, 17 ja 18 ovat voimassa kun tarkastellaan lineaarisia yhtälöryhmiä kunnan K suhteen, paitsi, että nyt jos ratkaisuja on enemmän kuin yksi, niitä ei välttämättä ole ääretön määrä, vaan niitä on ainakin yhtä paljon kun kerroinkunnassa K on alkioita, eli kuitenkin äärellinen määrä jos K sattuu olemaan äärellinen kunta. Kolmelle viimeiseksi mainitulle tulokselle esitämme seuraavassa luvussa toisenlaisia todistuksia, joissa ei käytetä Gaussin tapaisia menetelmiä lainkaan.

Esimerkki 2.20. *Tarkastellaan kunnassa $\mathbb{Z}_7$ määriteltyä lineaarista yhtälöryhmää*

$$\begin{cases} 2_7x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1_7, \\ 3_7x_1 - 2_7x_2 + 2_7x_3 - 3_7x_4 = 2_7, \\ 5_7x_1 + x_2 - x_3 + 2_7x_4 = -1_7, \\ 2_7x_1 - x_2 + x_3 - 3_7x_4 = -2_7. \end{cases}$$

Ratkaistaan se Gaussilla. Tarvitsemme laskuissa kunnan alkioiden käänteislukuja. Koska kunta $\mathbb{Z}_7$ on äärellinen ja suhteellisen pieni, nämä voidaan löytää kokeilemalla. Näin saadaan $1_7^{-1} = 1_7$, $2_7^{-1} = 4_7$, $4_7^{-1} = 2_7$, $3^{-1} = 5_7$, $5^{-1_7} = 3_7$, $6^{-1} = 6^{-1}$.

Ruvetaan ratkaisemaan yhtälöryhmää. Aloitetaan eliminoimalla muuttuja x_1 kaikista yhtälöistä paitsi ensimmäisestä, rivitoimituksilla $Y_2 - 3_7 2_7^{-1} Y_1$, $Y_3 - 5_7 2_7^{-1} Y_1$, $Y_4 - 2_7 2_7^{-1} Y_1$. Koska $2_7^{-1} = 4_7$, nämä ovat rivitoimituksia (tarkista välivaiheet ja muista, että lasketaan modulo 7) $Y_2 - 5_7 Y_1$, $Y_3 + Y_2$, $Y_4 - Y_2$. Laskujen jälkeen saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2_7x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1_7, \\ & & & & & - & x_4 & = & -3_7, \\ & & 2_7x_2 & - & 2_7x_3 & + & 3_7x_4 & = & 0_7, \\ & - & 2_7x_2 & + & 2_7x_3 & - & 4_7x_4 & = & -3_7. \end{cases}$$

Seuraavaksi vaihdetaan yhtälöt 2 ja 3 keskenään ja eliminoidaan vielä muuttuja x_2 viimeisestä yhtälöstä uuden yhtälön Y_2 avulla (entinen Y_3). Tähän riittää rivitoimitus $Y_4 + Y_2$. Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2_7x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1_7, \\ & & 2_7x_2 & - & 2_7x_3 & + & 3_7x_4 & = & 0_7, \\ & & & & & - & x_4 & = & -3_7, \\ & & & & & - & x_4 & = & -3_7, \end{cases}$$

joka on jo melkein porrasmuodossa. Nimittäin kaksi toiseksi viimeistä yhtälöä ovat nyt samoja, joten yhtälöryhmä on selvästi ekvivalenti yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 2_7x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1_7, \\ & & 2_7x_2 & - & 2_7x_3 & + & 3_7x_4 & = & 0_7, \\ & & & & & - & x_4 & = & -3_7 \end{cases}$$

kanssa. Tämä on porrasmuodossa. Muuttuja x_3 on ainoa vapaa muuttuja. Viimeisestä yhtälöstä saadaan $x_4 = 3_7$, toiseksi viimeisestä saadaan

$$x_2 = 2_7^{-1}(2_7x_3 - 3_7x_4) = 4_7(2_7x_3 - 9_7) = 4_7(2_7x_3 + 5_7) = 8_7x_3 + 20_7 = x_3 - 1_7,$$

ja viimein ensimmäisestä yhtälöstä

$$x_1 = 2_7^{-1}(1_7 - x_2 + x_3 - x_4) = 4_7(1_7 - x_3 + 1_7 + x_3 - 3_7) = -4_7 = 3_7.$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on

$$\begin{cases} x_1 = 3_7, \\ x_2 = t - 1_7, \\ x_3 = t, \\ x_4 = 3_7, \end{cases}$$

missä $t \in \mathbb{Z}_7$ on vapaa parametri. Yhtälöryhmällä on siis tasan seitsemmän erilaista ratkaisua, kukin vastaa yhtä parametrin t arvoa. Esimerkiksi valitsemalla $t = 0_7$ saadaan ratkaisu $x_1 = x_4 = 3_7$, $x_2 = -1_7 = 6_7$, $x_3 = 0_7$. Valitsemalla $t = 4_7$ saadaan ratkaisu $x_1 = x_2 = x_4 = 3_7$, $x_3 = 4_7$.

Jälkiviisana voi huomata, että ainoa käänteisalkio jonka olemme laskuissa tarvinneet oli 2_7^{-1}, kaikkia ei olisi tarvinnut selvittää.

Huomautus: Jos lukija on todellakin käynyt huolellisesti läpi Gaussin eliminointimenetelmän toimivuutta yleisessä kunnassa ja pitänyt kirjaa siitä, mitä kunnan ominaisuuksia hän on joutunut käyttämään, hän saattoi huomata, että kaikkia kunnan aksioomia tuli käytettyä, paitsi kertolaskun vaihdonnaisuutta. Sitä ei Gaussin eliminoinnin toimivuuden kannalta tarvita. Itse asiassa huomattava osa vektoriavaruuksien teoriasta toimii mainiosti ilman kertolaskun vaihdannaisuutta, mutta ei kaikki. Tästä syystä joskus kirjallisuudessa otetaan yleisempi lähestymistapa, jossa vektoriavaruuden skalaareiksi sallitaan niin sanotun *vinokunnan* [1] alkioita. Vinokunta määritellään samalla tavalla kuin kunta, paitsi että kertolaskun vaihdannaisuutta ei vaadita. Toisin sanoen vinokunta on epätriviaali rengas, jossa jokaisella nollasta eroavalla alkiolla on käänteisalkio.

Kaikki tämän sekä seuraavan aliluvun ”Virittäminen ja lineaarinen riippumattomuus” tulokset pätevät myös vektoriavaruuksille vinokuntien yli. Korostamme erikseen sellaisia teorian osioita, joissa skalaarien kertolaskun vaihdannaisuus on tarpeellinen.

Tekijäavaruudet

Olkoon $(V,+,\cdot)$ K-vektoriavaruus ja olkoon $\sim$ ekvivalenssirelaatio joukossa V. Tutkitaan milloin tekijäjoukkoon $V/\sim$ voidaan määritellä luonnollisella tavalla V:n laskutoimitusten $+$, $\cdot$ *indusoimia* laskutoimituksia. Edellisen luvun tekijästruktuurien teorian perusteella tiedetään, että jotta joukon V yhteenlasku indusoisi tekijäjoukkoon $V/\sim$ hyvinmääritellyn laskutoimituksen $+$, joka on määritelty kaavalla

$$\overline{\mathbf{v}} + \overline{\mathbf{w}} = \overline{\mathbf{v} + \mathbf{w}},$$

ekvivalenssirelaation $\sim$ täytyy olla *yhteensopiva* laskutoimituksen $+$ suhteen. Tämä tarkoitti sitä, että aina kun joukossa V pätee $\mathbf{v} \sim \mathbf{v}'$, $\mathbf{w} \sim \mathbf{w}'$, pätee myös

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} \sim \mathbf{v}' + \mathbf{w}'.$$

Seuraavaksi tarkastellaan samaa ongelmaa skalaarikertolaskun kohdalla. Haluasimme määritellä tekijäjoukossa $V/\sim$ indusoidun K-skalaarikertolasku $K \times (V/\sim) \to V/\sim$ kaavalla

$$k\overline{\mathbf{v}} = \overline{k\mathbf{v}}.$$

Jotta tämä olisi hyvin määritelty pitäisi ehdoista $\mathbf{v} \sim \mathbf{w}$ seurata kaikilla $k \in K$ ehto $k\mathbf{v} \sim k\mathbf{w}$. Jos näin on, sanomme, että ekvivalenssirelaatio $\sim$ on *yhteensopiva vektoriavaruuden skalaarikertolaskun suhteen.*

Propositio 2.21. *Olkoon $(V,+,\cdot)$ K-vektoriavaruus. Olkoon $\sim$ joukon V ekvivalenssirelaatio, joka on yhteensopiva sekä yhteenlaskun $+$, että skalaarikertolaskun $\cdot$ kanssa. Tällöin tekijäjoukossa $V/\sim$ voidaan määritellä laskutoimitus $+$ ja K-skalaarikertolasku $\cdot$ siten, että kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ja kaikilla $k \in K$ pätee*

$$\overline{\mathbf{v}} + \overline{\mathbf{w}} = \overline{\mathbf{v} + \mathbf{w}},$$

$$k\overline{\mathbf{v}} = \overline{k\mathbf{v}}.$$

Kolmikko $(V/\sim,+,\cdot)$ on tällöin K-vektoriavaruus ja kanoninen projektio $p\colon V \to V/\sim$ on K-lineaarinen surjektio.

[1] myös nimitystä *jakorengas* käytetään

Todistus. Yhteenlaskua koskevat väitteet seuraavat suoraan Seurauksesta 1.80. Skalaarikertolaskua koskevat väiteet todistetaan samalla tavalla (HT). □

Kun $\sim$ on vektoriavaruuden laskutoimitusten kanssa sopiva ekvivalenssirelaatio, vektoriavaruutta $(V/\sim, +, \cdot)$ sanotaan avaruuden V *tekijäavaruudeksi.*

Edellisessä luvussa olemme osoittaneet, että jokainen ryhmän G tekijäryhmä $G/\sim$ voidaan esittää muodossa G/N, missä $N \lhd G$ on *normaali aliryhmä.* Vastaavasti renkaiden kohdalla jokainen renkaan R tekijärengas on muotoa R/I, missä I on renkaan R *ideaali.* Osoittautuu, että myös vektoriavaruuksien kohdalla mikä tahansa tekijäavaruus $V/\sim$ voidaan koodata muotoon V/W, missä W on eräs osajoukko. Tutkitaan asiaa tarkemmin.

Olkoon $\sim$ vektoriavaruuden V laskutoimitusten kanssa sopiva ekvivalenssirelaatio. Tällöin kuvaus $p\colon V \to V/\sim$ on lineaarinen, joten sillä on *ydin*

$$W = \operatorname{Ker} p = p^{-1}(\mathbf{0}_{V/\sim}) = \{\mathbf{v} \in W \mid p(\mathbf{v}) = p(\mathbf{0}_V)\} = \overline{\mathbf{0_V}}, \tag{2.22}$$

joka on avaruuden V eräs aliavaruus. Yhtälöstä 2.22 nähdään, toisaalta, että $\operatorname{Ker} p$ ei ole mitään muuta, kuin nolla-alkion $\mathbf{0}_V$ ekvivalenssiluokka $\overline{\mathbf{0_V}}$.

Koska $\sim$ on erityisesti yhteensopiva yhteenlaskun $+$ kanssa, ja $(V, +)$ on Abelin ryhmä, $(V/\sim, +)$ on tämän Abelin ryhmän *tekijäryhmä* saman relaation $\sim$ suhteen. Tekijäryhmien teoriasta tiedetään (Lemma 1.86), että tällöin $V/\sim = V/W$ ja relaatio $\sim$ voidaan lausua algebrallisesti, nimittäin $\mathbf{v} \sim \mathbf{w}$ jos ja vain jos $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in W$. Lisäksi ekvivalenssiluokat ovat tällöin aliavaruuden W *translaatiot*, toisin sanoen jokaisella $\mathbf{v} \in V$ pätee $\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + W$.

Myös käänteinen konstruuktio on toimiva.

Lemma 2.23. *Olkoon W K-vektoriavaruuden V* mielivaltainen aliavaruus*. Määritellään joukossa V relaatio $\sim_W$ ehdolla $\mathbf{v} \sim \mathbf{w}$ jos ja vain jos $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in W$. Tällöin*

(i) Relaatio $\sim_W$ on ekvivalenssirelaatio.

(ii) Relaatio $\sim_W$ on yhteensopiva vektoriavaruuden V laskutoimitusten kanssa.

(iii) $W = \overline{\mathbf{0_V}}$ on nolla-vektorin $\mathbf{0}_V$ ekvivalenssiluokka relaation $\sim_W$ suhteen.

(iv) Alkion $\mathbf{v} \in V$ ekvivalenssiluokka on

$$\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + W.$$

Todistus. Todistus on samantyyppinen kuin aikaisemmin tekijäryhmien tai -renkaiden tapauksessa, osa väitteistä seuraa aikaisemmista tuloksista. Yksityiskohtien läpikäynti jätetään harjoitustehtäväksi. □

Edellinen tulos ja sitä edeltävä pohdinta osoittavat, että kaikki vektoriavaruuden V tekijäavaruudet ovat täsmälleen muotoa $V/\sim_W$, missä W on jokin vektoriavaruuden V aliavaruus ja ekvivalenssirelaatio $\sim_W$ on ehdolla $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in W$ määritelty relaatio. Tekijäavaruutta $V/\sim_W$ merkitään yksinkertaisesti V/W. Jatkossa siis puhumme tekijäavaruuksista V/W. Tämän vektoriavaruuden nolla-vektori on ekvivalenssiluokka $\overline{\mathbf{0_V}}$, joka on sama asia kuin aliavaruus W. Alkion $\mathbf{v} \in V$ ekvivalenssiluokka on vastaava affiini osajoukko

$$\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + W.$$

Tekijäavaruuden V/W alkiot ovat tämän nojalla muotoa $\mathbf{v} + W$. Tällä merkintätavalla tekijäavaruudessa V/W lasketaan näin:

$$(\mathbf{v} + W) + (\mathbf{w} + W) = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + W.$$

$$k(\mathbf{v} + W) = k\mathbf{v} + W.$$

Aliavaruus W on kanonisen projektion $p\colon V \to V/W$ *ydin.* Tästä seuraa erityisesti, että jokainen vektoriavaruuden V aliavaruus W on jonkun lineaarisen kuvauksen ydin.

Kuten ryhmien tai renkaiden tapauksessa, myös vektoriavaruuksien teoriassa tekijäavaruuksien tärkeimpiä sovelluksia ovat hajotelma-ja isomorfialauseet.

Lause 2.24. *Olkoon $L\colon V \to U$ K-lineaarinen kuvaus K-vektoriavaruuksien välillä. Olkoon $W \subset V$ aliavaruus ja olkoon $p\colon V \to V/W$ luonnollinen projektio. Tällöin on olemassa K-lineaarinen indusoidu kuvaus $\bar{L}\colon V/W \to U$ siten, että $L = \bar{L} \circ p$, eli siten, että seuraava diagrammi kommutoi,*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "L"] \arrow[dr, "p"'] & & U \\ & V/W \arrow[ur, "\bar{L}"'] & \end{tikzcd}$$

jos ja vain jos $W \subset \operatorname{Ker} L$. Jos $\bar{L}$ on olemassa, se on yksikäsitteinen ja $\operatorname{Im} \bar{L} = \operatorname{Im} L$. Erityisesti $\bar{L}$ on surjektio jos ja vain jos L on surjektio.
Lisäksi $\bar{L}$ on injektio jos ja vain jos $W = \operatorname{Ker} L$.

Todistus. Koska lineaarinen kuvaus $L\colon V \to U$ on erityisesti Abelin ryhmien välinen homomorfismi $(V, +) \to (U, +)$, melkein kaikki väitteet seuraavat vastaavasta tuloksesta ryhmille eli Lauseesta 1.98. Ainoa mikä ei seuraa siitä, on kuvauksen $\bar{L}$ yhteensopivuus skalaarikertolaskun kanssa. Tiedämme, että indusoidun kuvauksen $\bar{L}$ kaava on

$$\bar{L}(\overline{\mathbf{v}}) = L(\mathbf{v})$$

kaikilla $\mathbf{v} \in V$. Tällöin kaikilla $k \in K$ ja $\mathbf{v} \in V$

$$\bar{L}(k\overline{\mathbf{v}}) = \bar{L}(\overline{k\mathbf{v}}) = L(k\mathbf{v}) = kL(\mathbf{v}) = k\bar{L}(\overline{\mathbf{v}}).$$

Näin ollen L säilyttää myös skalaarikertolaskun eli on lineaarinen. $\square$

Seuraus 2.25. Vektoriavaruuksien Isomorfialause *Olkoon $L\colon V \to U$ K-lineaarinen kuvaus K-vektoriavaruuksien välillä. Tällöin L indusoi isomorfismin*
$\bar{L}\colon V/\operatorname{Ker} L \to \operatorname{Im} L$.

Esimerkki 2.26. *Olkoon V kaikkien* jatkuvasti derivoituvien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *kuvausten muodostama joukko. Tämä siis tarkoittaa sitä, että $f \in V$ jos ja vain jos se on derivoituva jokaisessa pisteessä ja derivaattafunktio f' on jatkuva. Koska derivaattaoperaattori on lineaarinen ja jatkuvien funktioiden muodostama joukko on suljettu yhteen- ja skalaarikertolaskun suhteen, helposti nähdään (mieti!), että V on avaruuden $\mathbb{R}^R$ aliavaruus, eli V on $\mathbb{R}$-vektoriavaruus itse.*

Määritellään kuvaus $L\colon V \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ kaavalla $L(f) = f'$. Koska derivaattaoperaattori on lineaarinen, kyseessä on lineaarinen kuvaus. Osoitetaan, että $\operatorname{Im} L$ koostuu tasan kaikista jatkuvista kuvauksista $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, eli on avaruus $C_0(\mathbb{R})$ (kts. esim 2.10). Koska f' on jatkuva kaikilla $f \in V$ avaruuden V määritelmän nojalla, pätee $\operatorname{Im} L \subset C_0(\mathbb{R})$. Kääntäen olkoon $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva. Tällöin, kuten analyysista tiedetään, g:n (eräälle) integraalifunktiolle $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x g(x)dx, x \in \mathbb{R},$$

pätee $f' = g$. Erityisesti $L(f) = g$ ja olemme näyttäneet, että $\mathbb{C}_0(\mathbb{R}) \subset \operatorname{Im} L$. Näin ollen $\operatorname{Im} L = C_0(\mathbb{R})$.

Kuvauksen L ydin $\operatorname{Ker} L$ *koostuu kaikista vakiofunktioista $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sillä tunnetusti $f' = 0$ identtisesti jos ja vain jos f on vakiofunktio. Merkitään kaikkien vakiokuvausten $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muodostamaa avaruutta W, $W = \operatorname{Ker} L$.*

Isomorfialauseesta saadaan, että $V/W \cong C_0(\mathbb{R})$. Toisin sanoen kaikkien jatkuvien kuvausten $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muodostama vektoriavaruus on isomorfinen tekijäavaruuden kanssa, joka saadaan kaikista jatkuvasti derivoituvien funktioiden avaruudesta "jakamalla" se vakiofunktioiden muodostamalla aliavaruudella. Avaruudessa V/W esimerkiksi pätee

$$\overline{x^2 + 5x - 3} = \overline{x^2 + 5x},$$

koska funktiot $x^2 + 5x - 3$ ja $x^2 + 5x$ eroavat vakiolla. Tulos $V/W \cong C_0(\mathbb{R})$ periaatteessa ilmaisee sen, että kahdella jatkuvasti derivoituvalla funktiolla on sama derivaattafunktio jos ja vain jos ne eroavat vakiolla. Esimerkiksi yllä tarkasteluille funktioille pätee

$$(x^2 + 5x - 3)' = 2x + 5 = (x^2 + 5x)'.$$

2.2. Virittäminen ja lineaarinen riippumattomuus

Lemma 2.27. *Olkoon V K-vektoriavaruus ja olkoon $\{V_i \mid i \in I\}$ mielivaltainen perhe avaruuden V aliavaruuksia. Tällöin tämän perheen leikkaus*

$$W = \bigcap_{i \in I} V_i = \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} \in V_i \text{ kaikilla } i \in I\}$$

on myös avaruuden V aliavaruus.

Todistus. Olkoot $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$ ja olkoon $k \in K$. Tällöin $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_i$ kaikilla $i \in I$. Koska jokainen osajoukko V_i on aliavaruus, jokaisella $i \in I$ pätee $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in V_i$ ja $k\mathbf{v} \in V_i$. Leikkauksen määritelmän nojalla tästä seuraa, että $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ ja $k\mathbf{v}$ kuuluvat joukkoon W.

Lisäksi, koska V_i on aliavaruus, $\mathbf{0_V} \in V_i$ jokaisella $i \in I$. Tästä seuraa, että $\mathbf{0_V} \in W$, joten erityisesti W on epätyhjä. On näytetty, että W toteuttaa aliavaruuden määritelmän. $\square$

Olkoon V K-vektoriavaruus ja olkoon $A \subset V$ sen mielivaltainen osajoukko. Yleensä A ei tietenkään ole aliavaruus. Kuitenkin edellisen Lemman avulla voidaan osoittaa, että on olemassa (sisältyvyysrelaation suhteen) *pienin* V:n vektoriavaruus, joka sisältää joukon A. Tarkemmin sanoen pätee seuraava tulos.

Propositio 2.28. *Olkoon $A \subset V$, missä V on K-vektoriavaruus. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen V:n aliavaruus* $\mathrm{Span}(A)$ *jolle pätevät seuraavat ehdot.*

(1) $A \subset \mathrm{Span}(A)$,

(2) Jos $A \subset W$, missä W on V:n aliavaruus, niin $\mathrm{Span}(A) \subset W$.

Todistus. Olkoon $(V_i)_{i\in I}$ perhe, jonka muodostavat **kaikki** V:n aliavaruudet, jotka sisältävät A:n osajoukkona. Tällöin Lemmasta 2.27 seuraa, että niiden leikkaus

$$W = \bigcap_{i\in I} V_i$$

on V:n aliavaruus. Koska $A \subset V_i$ kaikilla $i \in I$, myös $A \subset W$. Lisäksi $W \subset V_i$ kaikilla $i \in I$ konstruktion perusteella. Tästä seuraa aliavaruuden $\mathrm{Span}(A)$ olemassaolo. Jos W' on toinen aliavaruus, joka toteuttaa Lemman molemmat ehdot, sille pätee $\mathrm{Span}(A) \subset W'$ (koska $\mathrm{Span}(A)$ toteuttaa ehdon (2)) ja $W \subset \mathrm{Span}(A)$ (koska W' toteuttaa ehdon (2)). Näin ollen $W' = \mathrm{Span}(A)$. Näin ollen $\mathrm{Span}(A)$ on myös yksikäsitteinen. $\square$

Aliavaruutta $\mathrm{Span}(A)$ sanotaan osajoukon A *virittämäksi* aliavaruudeksi. Merkintätapa $\mathrm{Span}(A)$ tulee englanninkielisestä sanasta *span*, joka tässä yhteydessä tarkoittaa sanaa "*virittää*". Kun $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ on äärellinen, merkitään myös $\mathrm{Span}(A) = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$. Huomaa, että tyhjän joukon $\emptyset$ virittämä aliavaruus $\mathrm{Span}(\emptyset)$ on triviaali aliavaruus $\{\mathbf{0}_V\}$, **ei** tyhjä joukko (sellainenhan ei olisi edes aliavaruus). Tämä johtuu siitä, että tyhjä joukko on *jokaisen* aliavaruuden osajoukko, joten pienin sen sisältävä aliavaruus on sama asia kuin pienin mahdollinen aliavaruus, eli triviaali aliavaruus.

Lineaariset kombinaatiot

Yllä käytetty tapa määritellä ja osoittaa aliavaruuden $\mathrm{Span}(A)$ olemassaoloa on "ulkoinen", sillä siinä joukkoa $\mathrm{Span}(A)$ lähestytään "ulkoapäin". Se ei myöskään anna suoraan helppoa tapa päätellä mitkä alkiot kuuluvat avaruuteen $\mathrm{Span}(A)$ ja mitkä eivät kuulu. On olemassa myös erittäin hyödyllinen "sisäinen" tapa karakterisoida joukon $\mathrm{Span}(A)$ alkiot, niin sanotun *lineaarisen kombinaation* käsitteen kautta.

Olkoon V vektoriavaruus ja olkoon $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ *äärellinen jono*, joka koostuu sen alkiosta. Sanalla "jono" tarkoitamme tässä yhteydessä, että alkiot x_i on laitettu järjestykseen (joukossahan alkioiden listausjärjestyksellä ei ole merkitystä, sen sijaan jonossa on). Tämä järjestys on määritelty *indekseillä* $1, \ldots, n \in \mathbb{N}$.

Mikä tahansa muotoa

$$\sum_{i=1}^{n} k_i\mathbf{v}_i = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n,$$

oleva lauseke, missä $k_1, k_2, \ldots, k_n \in K$ ovat skalaareja, sanotaan vektorien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *lineaariseksi kombinaatioksi.* Myös kombinaation varsinaista arvoa, eli vektoria $\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n$ kutsutaan vektorien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ lineaariseksi kombinaatioksi. Termit $k_i\mathbf{v}_i$ ovat tämän lineaarisen kombinaation *jäseniä.* Skalaari $k_i \in K$ on vektorin $\mathbf{v}_i$ *kerroin* tässä lineaarisessa kombinaatiossa. Huomaa, että vaikka lähdemmekin liikelle jonosta, alkioiden järjestys ei vaikuta lineaarisen kombinaation $\sum_{i=1}^{n} k_i\mathbf{v}_i$ arvoon, koska vektorien yhteenlasku on vaihdannainen. Tosin sanoen jonon jäsenet voidaan permutoida, jolloin saadaan sama lineaarinen kombinaatio.

Lineaarisen kombinaation $\sum_{i=1}^{n} k_i\mathbf{v}_i$ *pituus* on luonnollinen luku $n \in \mathbb{N}$. Hyväksymme lineaariseksi kombinaatioksi myös "tyhjän summan", jossa on nolla yhteenlaskettavaa termiä, eli jonka pituus $n = 0$. Sovimme, että tällaisen tyhjän summan arvo on aina vektoriavaruuden nolla-alkio $\mathbf{0}_V$.

Osoittautuu, että aliavaruuden $\mathrm{Span}(A)$ alkiot ovat tasan sellaiset vektorit, jotka voidaan esittää A:n alkioiden lineaarisina kombinaatioina. Esitämme tästä "äärellisen " version (Lemma 2.29) sekä yleisen version (Lemma 2.30).

Lemma 2.29. *Olkoon V K-vektoriavaruus. Olkoot $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$, $n \geq 0$. Tällöin*

$$\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) = \{k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n \mid k_1, \ldots, k_n \in K\}.$$

Todistus. Olkoon $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. On osoitettava, että oikealla puolella esiintyvä joukko

$$W = \{k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n \mid k_1, \ldots, k_n \in K\}$$

sisältää A:n osajoukkona ja lisäksi on pienin vektoriavaruuden V aliavaruus, jolla on tämä ominaisuus.

Kun valitaan joukon W määritelmässä $k_j = 0_K$ kun $j \neq i$ ja $k_i = 1_K$, saadaan jokaisella $\mathbf{v}_i \in A$ lineaarinen kombinaatio, jonka arvo on $\mathbf{v}_i$. Näin ollen $A \subset W$.

Sen osoittaminen, että W todellakin on aliavaruus jätetään harjoitustehtäväksi.

Olkoon V' mikä tahansa V:n aliavaruus, joka sisältää A:n. Koska V' on suljettu skalaarikertolaskun suhteen, se sisältää jokaisella $i \in I$ jokaisen muotoa $k_i\mathbf{v}_i$ olevan vektorin. Koska V' on suljettu yhteenlaskun suhteen, se sisältää kaikki mahdolliset tällaisten alkioiden summat, eli mielivaltaiset lineaariset kombinaatiot, jotka on muodostettu alkioista $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Toisin sanoen $W \subset V'$. Näin ollen W on pienen V:n aliavaruus, joka sisältää joukon A. $\square$

Jos A on ääretön, aliavaruuden $\mathrm{Span}(A)$ muodostamista varten täytyy ottaa kaikki mahdolliset sen vektoreista muodostetut (tietysti äärelliset) lineaariset kombinaatiot. Sivuumme todistuksen, sillä se on samanlainen kuin edellisen Lemman todistus.

Lemma 2.30. *Olkoon V K-vektoriavaruus. Olkoon $A \subset V$ osajoukko. Tällöin*

$$\mathrm{Span}(A) = \{k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n \mid k_1, \ldots, k_n \in K, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in A, n \geq 0\}.$$

Huomaa, että erikoistapauksessa $\emptyset$ edellinen tulos on täysin sopusonnissa aikaisemmin määritelmien kanssa. Nimittäin jos $A = \emptyset$, voidaan kuitenkin aina muodostaa tyhjä summa sen alkioista, joka vastaa edellisen Lemman muotoilussa tapausta $n = 0$ (mitään muita lineaarisia kombinaatioita A:n alkioista ei tällöin ole olemassa). Tällaisen summan arvoksi olemme aikaisemmin sovinneet nollavektorin. Näin ollen edellisen lemman mukaan $\mathrm{Span}(A) = \{\mathbf{0}_V\}$, kuten pitääkin olla.

Juuri tätä erikoistapausta varten kahden edellisen Lemman muotoilussa oletetaan, että $n \geq 0$. Jos $A \neq \emptyset$ tapaus $n = 0$ on tavallaan turha ja kummassakin lemmassa voidaan yhtä hyvin asettaa ehdon $n \geq 0$ tilalle ehdon $n \geq 1$. Näin muotoiltuna kumpikin lemma ei olisi kuitenkaan enää totta erikoistapauksessa $A = \emptyset$.

Olkoon $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ K-vektoriavaruuden V vektorien äärellinen jono, $n \in \mathbb{N}$. Edellisestä Lemmasta seuraa, että aliavaruuden $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ vektori $\mathbf{v} \in \mathrm{Span}(A)$ voidaan esittää lineaarisena kombinaationa

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n,$$

missä $k_i \in K$, $i = 1, \ldots, n$. Tällainen esitys ei kuitenkaan ole yleensä yksikäsitteinen (vaikka vektorien järjestys $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ on kiinnitetty) eli voi hyvinkin käydä niin, että pätee myös

$$\mathbf{v} = k'_1\mathbf{v}_1 + k'_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k'_n\mathbf{v}_n,$$

jossa $k_i \neq k'_i$ ainakin yhdellä indeksillä $i = 1, \ldots, n$.

Esimerkki 2.31. *Tarkastelemme $\mathbb{Z}_3$-vektoriavaruudessa $(\mathbb{Z}_3)^2$ vektoreista $((1_3, 2_3), (2_3, 0_3), (1_3, 1_3))$ muodostettua jonoa. Tutkitaan voidaanko vektori $(2_3, 1_3)$ esittää tämän jonon vektorien lineaarisena kombinaationa ja jos voi, niin onko tällainen esitys yksikäsiteinen.*

Ongelma on ekvivalentti lineaarisen yhtälön

$$(1_3, 0_3) = k_1(1_3, 2_3) + k_2(2_3, 1_3) + k_3(1_3, 1_3)$$

ratkaisemisongelman kanssa. Tämä yhtälö on puolestaan yhtäpitävä lineaarisen yhtälöryhmän

$$\begin{cases} k_1 & + & 2_3k_2 & + & k_3 & = & 1_3, \\ 2_3k_1 & + & k_2 & + & k_3 & = & 0_3 \end{cases}$$

kanssa. Laskemalla yhtälöt yhteen (eli suorittamalla alkeisrivitoimituksen $Y_2{+}Y_1$) ja käyttämällä hyväksi sitä, että $3_3 = 0_3$, saadaan yhtälöryhmä porrasmuotoon

$$\begin{cases} k_1 & + & 2_3k_2 & + & k_3 & = & 1_3, \\ & & & & 2_3k_3 & = & 1_3 \end{cases}$$

Toisesta yhtälöstä ratkaistaan $k_3 = 2_3^{-1}$. Tässä vaiheessa pitää osata laskea käänteislukuja kunnassa $\mathbb{Z}_3$. Yleisesti tämä on epätriviaali ongelma, mutta koska $\mathbb{Z}_3$ on hyvin pieni kunta, se sisältää vain kaksi nollasta eroavaa alkiota, alkiot 1_3 ja 2_3, joten niiden käänteisalkioita voidaan selvittää yksinkertaisesti kokeilemalla kaikki vaihtoehdot. Näin selvitetään, että $2_3^{-1} = 2_3$. Näin ollen $k_3 = 2_3$ ja $k_2 = t \in \mathbb{Z}_3$ on vapaa muuttuja. Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan $k_1 = 1_3 - 2_3 - 2_3t = -1_3 - 2_3t = 2_3 + t$, missä käytimme hyväksi myös sitä, että $-1_3 = 2_3, -2_3 = 1_3$. Näin ollen

$$(1_3, 0_3) = k_1(1_3, 2_3) + k_2(2_3, 1_3) + k_3(1_3, 1_3)$$

jos ja vain jos $k_1 = 2_3 + t$, $k_2 = t$, $k_3 = 2_3$, missä $t \in \mathbb{Z}_3$. Ratkaisuja on siis tasan kolme, erityisesti ratkaisu ei ole yksikäsitteinen. Kaikki mahdolliset lineaariset kombinaatiot ovat

$$(1_3, 0_3) = 2_3(1_3, 2_3) + 0_3(2_3, 1_3) + 2_3(1_3, 1_3),$$

$$(1_3, 0_3) = 0_3(1_3, 2_3) + 1_3(2_3, 1_3) + 2_3(1_3, 1_3),$$

$$(1_3, 0_3) = 1_3(1_3, 2_3) + 2_3(2_3, 1_3) + 2_3(1_3, 1_3).$$

Näistä kaksi ensimmäistä voi tietysti kirjoittaa myös muotoon

$$(1_3, 0_3) = 2_3(1_3, 2_3) + 2_3(1_3, 1_3),$$

$$(1_3, 0_3) = 1_3(2_3, 1_3) + 2_3(1_3, 1_3).$$

Erityisesti siis vektorin $(1_3, 0_3)$ esitys vektorien $(1_3, 2_3), (2_3, 1_3)$ ja $(1_3, 1_3)$ lineaarisena kombinaationa ei ole yksikäsitteinen.

Määritelmä 2.32. *Olkoon V K-vektoriavaruus ja olkoon $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ jono sen vektoreita. Sanomme, että tämä jono on* vapaa, *jos jokainen aliavaruuden* $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ *alkio voidaan esittää muodossa*

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n,$$

missä $k_i \in K$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$, yksikäsitteisellä tavalla.

Jos jono ei ole vapaa, sanomme, että se on sidottu.

Lemmassa 2.33 alla annetaan toinen tapa määritellä äärellisen jonon vapauden käsitteen. Tätä tapaa hyvin usein käytetään alan lähteissä vapauden määritelmänä.

Olkoon $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ jono vektoreita K-vektoriavaruudessa V. Tällöin avaruuden nollavektori $\mathbf{0}_V$ on aina aliavaruuden $\mathrm{Span}(A)$ alkio (koska kyseessä on aliavaruus). Selvästi tämä vektori voidaan aina esittää lineaarisena kombinaationa

$$\mathbf{0}_V = 0_K\mathbf{v}_1 + 0_K\mathbf{v}_2 + \ldots + 0_K\mathbf{v}_n,$$

eli sellaisena, jossa jokainen kerroin on kunnan nolla-alkio 0_K. Tätä nollavektorin esitystä sanotaan *triviaaliksi.* Jos jono $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ on vapaa, triviaali esitys on ainoa nollavektorin esitys vektorien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ lineaarisena kombinaationa. Osoittautuu, että myös käänteinen väite pätee.

Lemma 2.33. *Olkoon $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ jono vektoreita K-vektoriavaruudessa V. Tällöin tämä jono on vapaa jos ja vain nollavektorilla $\mathbf{0}_V$ on vain triviaali esitys jonon vektorien lineaarisena kombinaationa. Toisin sanoen jono on vapaa jos ja vain jos yhtälöstä*

$$\mathbf{0}_V = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n$$

aina seuraa, että $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$.

Todistus. Ehdon vättämättömyydestä puhuttiin jo edellä. Oletetaan kääntäen, että nollavektorilla on vain triviaali esitys. Olkoon $\mathbf{v} \in \mathrm{Span}(A)$ ja oletetaan, että sillä on (mahdollisesti) kaksi erilaista esitystä vektorien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ lineaarisena kombinaationa, eli oletaamme, että

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{v} = k_1'\mathbf{v}_1 + k_2'\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n'\mathbf{v}_n.$$

Tällöin, siirtämällä kaikki termit vasemmalle puolelle ja järjestämällä ne uudelleen, saadaan osittelulain avulla yhtälö

$$(k_1 - k_1')\mathbf{v}_1 + (k_2 - k_2')\mathbf{v}_2 + \ldots + (k_n - k_n')\mathbf{v}_n = \mathbf{0}_V.$$

Koska nollavektorin jokainen esitys on triviaali, tästä saadaan $k_i - k_i' = 0_K$ eli $k_i = k_i'$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. □

Esimerkkejä 2.34. *(1) Esimerkissä 2.31 olemme näyttäneet, että $\mathbb{Z}_3$-vektoriavaruuden $(\mathbb{Z}_3)^2$ vektoreista muodostettu jono $((1_3, 2_3), (2_3, 0_3), (1_3, 1_3))$ ei ole vapaa, osoittamalla, että vektori $(1_3, 0_3)$ voidaan esittää näiden vektorien lineaarisena kombinaationa monella tavalla. Edellisen lemman mukaan nolla-vektorilla $(0_3, 0_3)$ täytyy olla epätriviaaleja esityksiä vektorien $(1_3, 2_3), (2_3, 0_3), (1_3, 1_3)$ lineaarisena kombinaationa. Niitä voidaan löytää samalla tavalla kuin esimerkissä 2.31 eli ratkaisemalla vastaava lineaarinen yhtälöryhmä. Epätriviaaleja nollavektorin esityksiä on tasan kaksi,*

$$(0_3, 0_3) = 1_3(1_3, 2_3) + 1_3(2_3, 1_3) + 0_3(1_3, 1_3) = (1_3, 2_3) + (2_3, 1_3) \text{ ja}$$

$$(0_3, 0_3) = 2_3(1_3, 2_3) + 2_3(2_3, 1_3) + 0_3(1_3, 1_3) = -(1_3, 2_3) - (2_3, 1_3).$$

(2) $\mathbb{R}$-vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ jono $(\cos x, \sin x)$ on vapaa. Nimittäin olkoot $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ sellaisia, että

$$t_1 \cos x + t_2 \sin x = 0$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Valitsemalla $x = 0$, saadaan $t_1 = 0$. Valitsemalla $x = \pi/2$ saadaan $t_2 = 0$.

(3) Mikään jono $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$, joka sisältää nollavektorin ei ole vapaa. Nimittäin oletetaan, että $\mathbf{v}_j = \mathbf{0}_V$ jollakin $j = 1, \ldots, n$. Tällöin

$$\mathbf{0}_V = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n,$$

missä $k_i = 0_K$, $i \neq j$, $k_j = 1_K \neq 0_K$, on nollavektorin epätriviaali esitys.

(4) Yhden alkion jono $(\mathbf{v}_1)$ on vapaa jos ja vain jos $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}_V$. Nimittäin edellisen esimerkin nojalla mikään jono, joka sisältää nollavektorin ei voi olla vapaa. Kääntäen, jos $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}_V$ ja $\mathbf{0}_V = k\mathbf{v}$ on nollavektorin esitys jonon $(\mathbf{v}_1)$ lineaarisena kombinaationa, niin Lemmasta 2.5 seuraa, että $k = 0$, joten esitys on triviaali.

(5) Kahden alkion jono $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ on sidottu jos ja vain jos $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}_V$ tai $\mathbf{v}_2 = k\mathbf{v}_1$ jollakin $k \in K$. Tämä voidaan helposti johtaa esimerkiksi Lemmasta 2.37, c) alla (tai suoraan määritelmästä).

(6) *Mikä tahansa jono* $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$*, joka sisältää* toistoja *eli jossa* $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j$ *joillakin* $i, j = 1, \ldots, n$*,* $i \neq j$*, ei voi olla vapaa. Tämä seuraa esimerkiksi siitä, että tällöin on olemassa nollavektorin epätriviaali esitys*

$$\mathbf{0}_V = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n,$$

jossa $k_l = 0_K$ *kun* $l \neq i, j$*,* $k_i = 1_K$*,* $k_j = -1_K$*.*

Joskus halutaan puhua myös vektoriavaruuden vapaista tai sidotuista *osajoukoista.* Osajoukko eroaa jonosta siinä, että sen alkioita ei ole a priori asetettu mihinkään järjestykseen. Olkoon $A \subset V$ äärellinen joukko. Tällöin sen alkiot voidaan indeksoida luonnollisilla luvuilla $1, \ldots, n$, joissa n on joukon A alkioiden lukumäärä. Toisin sanoen voimme esittää joukon A muodossa $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Tällöin sanomme, että A on vapaa, jos vastaava jono $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ on vapaa, muuten A on sidottu. Huomaa, että tässä tapauksessa jonossa $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ ei voi olla toistoja, vaikka yleisesti jonossa toistot ovat sallituja (vrt. esim. 2.34 yllä). Edellisen Lemman nojalla edellä määritelty joukon A vapaus tarkoittaa täsmälleen sitä, että jokaisessa yhtälössä muotoa

$$\mathbf{0}_V = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n$$

on pakko olla $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$. On selvä, että tämä ehto ei riipu siitä, missä järjestyksessä oikeanpuoleiset termit kirjoitetaan (koska vektorien yhteenlasku on vaihdannainen), joten kysymys siitä, onko joukko A vapaa *ei riipu* siitä, miten sen alkiot indeksoidaan luonnollisilla luvuilla $1, \ldots, n$ eli missä järjestyksessä ne luetellaan (erilaisia tapoja esittää n-alkioinen joukko A jonona $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ on $n!$ kappaletta, joten valinnan varaa yleensä on). Toisin sanoen vapauden käsite joukoille on *hyvinmääritelty.*

Yleisen, ei välttämättä äärellisen osajoukon $A \subset V$ kohdalla vapauden käsite määritellään seuraavasti - joukkoa A sanotaan vapaaksi jos ja vain jos jokainen sen äärellinen osajoukko $B \subset A$ on vapaa edellisessä kappaleessa esitetyn määritelmän mielessä. Tällöin täytyy tarkistaa, että tämä "uusi" määritelmä antaa äärellisen joukon A kohdalla saman tuloksen kuin edellisessä kappalessa sille annettu määritelmä. Osoittautuu, että näin on, joten vapauden yleinen määritelmä on "järkevää". Tästä puhutaan tarkemmin Lemman 2.37 todistuksen yhteydessä.

Äärellisulotteisessa lineaarialgebrassa emme loppujen lopuksi tarvitse yleistä vapauden määritelmää, sillä osoittautuu, että äärellisulotteisen vektoriavaruuden jokainen vapaa osajoukko on joka tapauksessa äärellinen, kuten kohta osoitamme.

Tyhjä jono () tai sitä vastaava tyhjä joukko $\emptyset$ ovat aina vapaita. Tämä nähdään "tyhjän joukon logiikalla" - jos nollavektorilla olisi epätriviaali esitys tyhjän jonon alkioiden lineaarisena kombinaatiossa, tässä jonossa olisi alkio, jota vastaava kerroin kombinaatiossa on nollasta eroava. Erityisesti tämä tarkoittaa, että tyhjässä jonossa olisi jokin alkio, mikä on vastoin tyhjän jonon/joukon ideaa (ja määritelmää).

Esimerkki 2.35. *Annetaan esimerkki äärettömästä vapaasta jonosta. Olkoon* $K^{\mathbb{N}}$ *kaikkien jonojen* $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *muodostama* K*-vektoriavaruus (kts. esim. 2.4, (2)). Olkoon* $j \in \mathbb{N}$ *luonnollinen luku. Merkitään symbolilla* $\mathbf{e}_j$ *avaruuden* $K^{\mathbb{N}}$ *alkiota* $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$*, jolle pätee* $a_j = 1_K$ *ja* $a_l = 0_K$ *kaikilla* $l \neq j$*. Osoitetaan, että (ääretön) kokoelma* $\{\mathbf{e}_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ *on vapaa. Olkoon* B *tämän kokoelman äärellinen osajoukko, tällöin*

$$B = \{\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \ldots, \mathbf{e}_{j_m}\},$$

missä $j_1, j_2, \ldots, j_m$ ovat (eri) luonnollisia lukuja ja $m \in \mathbb{N}$ (joukon B alkioiden lukumäärä). Oletetaan, että

$$k_{j_1}\mathbf{e}_{j_1} + k_{j_2}\mathbf{e}_{j_2} + \ldots + k_{j_m}\mathbf{e}_{j_m} = \mathbf{0}. \tag{2.36}$$

Tässä avaruuden $K^{\mathbb{N}}$ nollavektori $\mathbf{0}$ on jono $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, jolle pätee $a_i = 0_K$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Yhtälössä 2.36 molemmilla puoleella esiintyy eräs jono $(a_i')_{i\in\mathbb{N}}$. Jokaisella $l = 1, \ldots, m$ tämän jonon j_l:nnes koordinaatti a_{j_l} on toisaalta k_{j_l} (vasemmalla puolella laskettuna) ja toisaalta 0_K (oikealla puolella laskettuna). Näin ollen lineaarisessa kombinaatiossa 2.36 jokainen kerroin on nolla-alkio. Tämä osoittaa sen, että B on vapaa joukko. Koska kokoelman $\{\mathbf{e}_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ jokainen äärellinen osajoukko on osoitettu vapaaksi, tämä kokoelma on vapaa määritelmän mukaan.

Seuraava tulos on luonnollisempi muotoilla osajoukkojen, ei jonojen kielellä. Vapauden varsinainen määritelmä oli taas helpompaa muotoilla ensin jonoille. Yleisesti ottaen kysymys siitä ovatko jonot kätevämpiä kuin osajoukot vai päinvastoin, riippuu kontekstista (ja on tietysti myös osittain makuasia). Molempia näkökulmia teoriassa kuitenkin tarvitaan, sillä asiayhteydestä riippuen toinen saattaa olla kätevämpi ja/tai luonnollisempi kuin toinen.

Lemma 2.37. *Olkoon $A \subset V$, missä V on K-vektoriavaruus. Tällöin seuraavat väitteet pitävät paikkansa.*

(a) Jos A on vapaa ja $B \subset A$, niin myös B on vapaa.

(b) Jos A on sidottu ja $A \subset C$, niin myös C on sidottu.

(c) Osajoukko A on sidottu jos ja vain jos on olemassa $\mathbf{v} \in A$, jolle pätee

$$\mathbf{v} \in \mathrm{Span}(A \setminus \{\mathbf{v}\}).$$

Toisin sanoen A on sidottu jos ja vain jos jokin sen alkio voidaan esittää **muiden** *A:n alkioiden lineaarisena kombinaationa. Lisäksi tällöin*

$$\mathrm{Span}(A) = \mathrm{Span}(A \setminus \{\mathbf{v}\}),$$

eli vektorin $\mathbf{v}$ poistaminen ei muuta joukon virittävää avaruutta.
Samantyyppinen tulos on voimassa kun osajoukon A sijaan tarkastellaan jonoa.

Todistus. (a) Oletetaan ensin, että A on äärellinen, $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Tällöin myös B on äärellinen ja voidaan kirjoittaa $B = \{\mathbf{v}_{l_1}, \mathbf{v}_{l_2}, \ldots, \mathbf{v}_{l_m}\}$, missä $1 \leq l_1 < l_2 < \ldots < l_m$ ja m on joukon B alkioiden lukumäärä. Olkoon

$$k_{l_1}\mathbf{v}_{l_1} + k_{l_2}\mathbf{v}_{l_2} + \ldots + k_{l_m}\mathbf{v}_{l_m} = \mathbf{0}_V \tag{2.38}$$

jokin nollavektorin esitys joukon B vektorien lineaarisena kombinaationa. Lisäämällä siihen nollatermejä eli asettamalla $k_i = 0$ kun $\mathbf{v}_i$ ei ole B:n alkio, voidaan tämä kirjoittaa yhtälönä

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}_V,$$

joka on nollavektorin esitys A:n alkioiden lineaarisena kombinaationa (tai oikeastaan, jos ollaan formaaleja, jonon $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ alkioiden lineaarisena kombinaationa). Edellisen Lemman nojalla $k_i = 0_k$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Erityisesti $k_{l_j} = 0_K$ kaikilla $j = 1, \ldots, m$, joten esitys 2.38 on triviaali. Väite (a) on osoitettu äärellisen joukon A kohdalla.

Ennen kuin todistetaan väitteen (a) myös yleisesti äärettömällekin joukolle A, palataan vapauden määritelmään. Äärellisille joukolle olemme määritelleet vapauden suoraan nollavektorin esityksen kautta (tai oikeastaan tämä ehto osoitettiin olevan ekvivalentti meidän määritelmän kanssa). Yleiselle joukolle A vapaus taas määriteltiin seuraavasti - A on vapaa, jos jokainen sen äärellinen osajoukko on vapaa edellisen määritelmän mielessä. Nyt, jos A on äärellinen ja vapaa (ensimmäisen määritelmän mielessä), jokainen sen osajoukko on myös vapaa, kuten juuri osoitimme, joten se toteuttaa myös vapauden yleisen määritelmän. Kääntäen, jos äärellisen joukon A jokainen äärellinen osajoukko on vapaa, niin erityisesti myös A on itsensä äärellisenä osajoukkona vapaa. Olemme näyttäneet, että äärelliselle joukolle molemmat vapauden määritelmät tuottavat aina saman johtopäätöksen, joten määritelmät eivät ole ristiriidassa keskenään.

Olkoon nyt A mielivaltainen vapaa osajoukko ja olkoon B sen osajoukko. Tällöin, jos C on B:n äärellinen osajoukko, se on myös A:n äärellinen osajoukko. Oletuksen mukaan C on vapaa. Näin ollen joukon B jokainen äärellinen osajoukko on vapaa, joten B on myös vapaa.

(b) Jos C olisi vapaa, (a)-kohdan nojalla myös A olisi vapaa, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa.

(c) Oletetaan, että A on sidottu. Tällöin jokin sen äärellinen osajoukko $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ on sidottu, koska jos tällaista ei löytyisi, A olisi vapaa määritelmän mukaan. Tästä seuraa, että on olemassa nollavektorin epätriviaali esitys

$$\mathbf{0}_V = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n,$$

joissa $\mathbf{v} \in A$ ja jollakin indeksin arvolla i pätee $k_i \neq 0_K$. Koska summan termien järjestyksellä ei ole väliä, voimme olettaa, että $k_n \neq 0$. Tällöin on olemassa k_n^{-1}, joten voidaan ratkaista

$$\mathbf{v}_n = (-k_1/k_n)\mathbf{v}_1 + (-k_2/k_n)\mathbf{v}_2 + \ldots + (-k_{n-1}/k_n)\mathbf{v}_{n-1}.$$

Tämä tarkoittaa sitä, että vektori $\mathbf{v}_n \in A$ voidaan esittää muiden joukon B alkioiden $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ lineaarisena kombinaationa. Erityisesti se voidaan esittää joukon $A \setminus \{\mathbf{v}_n\}$ alkioiden lineaarisena kombinaationa. Olemme löytäneet vektorin $\mathbf{v} \in A$, jolle pätee $\mathbf{v} \in \mathrm{Span}(A \setminus \{\mathbf{v}\})$.

Huomaa, kuinka oletus skalaarin k_n käänteisalkion olemassaolosta (kunnan ominainen piirre, joka erottaa sen renkaista) on ollut keskeisessä roolissa ratkaisun kannalta. Yleisemmässä modulien teoriassa tämä tulos ei enää pidä paikkaansa, juuri siitä syystä, että käänteisalkioita ei enää välttämättä löydy.

Oletetaan kääntäen, että on olemassa $\mathbf{v} \in A$, jolle pätee $\mathbf{v} \in \mathrm{Span}(A \setminus \{\mathbf{v}\})$. Tällöin on olemassa lineaarinen kombinaatio

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_m\mathbf{v}_m,$$

missä $\mathbf{v}_i \in A, \mathbf{v}_i \neq \mathbf{v}$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Voimme selvästi olettaa, että $\mathbf{v}_i$ ovat kaikki **eri** alkioita. Sirtämällä vektori $\mathbf{v}$ yhtälön toiselle puolelle saadaan nollavektorille epätriviaali esitys

$$\mathbf{0}_V = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_m\mathbf{v}_m + (-1_K)\mathbf{v},$$

missä esiintyvät vain joukon A alkiot. Tästä seuraa, että A on sidottu.

Osoitetaan vielä, että ehdosta $\mathbf{v} \in \operatorname{Span}(A \setminus \{\mathbf{v}\})$ seuraa, että

$$\operatorname{Span}(A) = \operatorname{Span}(A \setminus \{\mathbf{v}\}).$$

Merkitään $A' = A \setminus \{\mathbf{v}\}$. Koska $A' \subset A$, selvästi pätee $\operatorname{Span}(A') \subset \operatorname{Span}(A)$. Kääntäen olkoon $W \subset V$ aliavaruus, joka sisältää joukon A'. Koska $\mathbf{v}$ voidaan esittää joukon A' alkioiden lineaarisena kombinaationa, tällöin myös $\mathbf{v} \in W$. Tästä seuraa, että $A \subset W$, joten myös $\operatorname{Span}(A) \subset W$. Erityisesti valitsemalla tässä $W = \operatorname{Span}(A')$ saadaan $\operatorname{Span}(A) \subset \operatorname{Span}(A')$.

Kun A korvataan äärellisellä jonolla $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ c)-kohdan todistus jonolle etenee samalla tavalla. □

Äärellisen jonon tapauksessa voidaan edellisen Lemman (c)-kohdan tulos tiukentaa seuraavasti.

Lemma 2.39. *Olkoon $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ äärellinen jono, joka on sidottu. Tällöin on olemassa indeksi $i = 1, \ldots, n$ siten, että $\mathbf{v}_i \in \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}\}$. Toisin sanoen on olemassa $\mathbf{v}_i$ joka voidaan esittää jonon* **edellisten** *alkioiden lineaarisena kombinaationa.*

Todistus. Koska tyhjä jono on aina vapaa, jono $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ ei voi olla tyhjä, joten erityisesti $n \geq 1$ ja indeksien $i = 1, \ldots, n$ joukko on epätyhjä.

Jos $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}_V$, voidaan tulkita, että $\mathbf{v}_1 \in \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}\}$ arvolla $i = 1$, koska tällöin $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1})$ on tyhjä jono ja $\mathbf{0}_V \in \operatorname{Span}(\emptyset)$.

Jos taas $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}_V$, esimerkin 2.34.4 nojalla jono $(\mathbf{v}_1)$ on vapaa. Erityisesti on olemassa indeksejä j, joille jono $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_j)$ on vapaa. Koska toisaalta $j \leq n$, on olemassa **suurin** indeksi $j = 1, \ldots, n$, jolla on tämä ominaisuus. Lisäksi ei voi olla $j = n$, sillä tämä tarkoittaisi, että jono $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ olisi vapaa, mikä on vastoin oletusta. Näin ollen $j < n$, joten jonossa on olemassa vektori $\mathbf{v}_i$, jonka indeksi on $i = j + 1 \leq n$. Koska $j = i - 1 < i$ oli suurin indeksi, jolle jono $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_j)$ on vapaa, jono $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i)$ on sidottu. Tästä seuraa, että on olemassa nollavektorin epätriviaali esitys

$$\mathbf{0}_V = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + k_i\mathbf{v}_i.$$

Jos tässä $k_i = 0_K$, olisi olemassa nollavektorille epätriviaali esitys jo jonon $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_j)$ jäsenten lineaarisena kombinaationa, mikä on vastoin tämän jonon vapautta. Näin ollen $k_i \neq 0_K$, joten sillä voidaan kunnassa K jakaa. Siirtämällä termi $k_i\mathbf{v}_i$ yhtälön toiselle puolelle ja jakamalla skalaarilla k_i saadaan

$$\mathbf{v}_i = (-k_1/k_i)\mathbf{v}_1 + (-k_2/k_i)\mathbf{v}_2 + \ldots + (-k_{i-1}/k_i)\mathbf{v}_{i-1}.$$

Tämä tarkoittaa sitä, että $\mathbf{v}_i \in \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}\}$ ja olemme valmiit. □

Edellisen Lemman tulos on varsin kätevä joissakin asiayhteyksissä ja tulemme näkemään esimerkkejä sen sovelluksesta. Huomaa, että sitä ei voi muotoilla pelkästään joukkojen kielellä, vaan jonon vektorien järjestyksellä on siinä tärkeä rooli. Tämä on siis esimerkki tilanteesta jossa jonoihin perustuva ajattelutapa osoittautuu käteväksi.

Määritelmä 2.40. *Olkoon V K-vektoriavaruus ja olkoon $A \subset V$. Jos* $\mathrm{Span}(A) = V$, *sanomme, että A* virittää *vektoriavaruuden V. Jos lisäksi A on vapaa, sanomme, että A on avaruuden V* **kanta**.

Jos avaruudella V on olemassa äärellinen osajoukko $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ joka virittää sen, sanomme avaruutta äärellisulotteiseksi *tai* äärellisviritteiseksi.

Olkoon $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ äärellinen jono. Sanomme, että tämä jono virittää *vektoriavaruuden V, jos vastaava joukko $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ virittää avaruuden V. Vastaavasti jono $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ on avaruuden V* kanta *jos vastaava joukko $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ on sen kanta.*

Olkoon $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ äärellisulotteisen vektoriavaruuden V kanta. Määritelmän mukaan tämä tarkottaa täsmälleen sitä, että jokainen avaruuden V vektori $\mathbf{v}$ voidaan esittää jonon jäsenten lineaarisena kombinaationa eli muodossa

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{v}_i$$

yksikäsitteisellä tavalla. Esityksen olemassaolo liittyy siihen, että jono $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ virittää avaruuden V ja esityksen yksikäsitteisyys liittyy siihen, että jono $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ on vapaa. Lukuja a_i, $i = 1, \ldots, n$ sanotaan vektorin $\mathbf{v}$ *koordinaatteiksi* kannassa $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$. Vektorit koordinaatit riippuvat tietysti kannan valinnasta. Toisessa kannassa vektorit koordinaatit ovat tödennäkköisesti erilasia. Vektorin koordinaatit kuitenkin määrävät vektori yksikäsitteisesti, jolloin voidaan ajatella vektori $\mathbf{v}$ jonona $(k_1, \ldots, k_n)$. Tällainen jono on K-vektoriavaruuden K^n alkio. Helposti nähdään, että vastaavuus $\mathbf{v} \mapsto (k_1, \ldots, k_n)$ on tällöin lineaarinen isomorfismi $V \cong K^n$. Palaamme tähän tosiasiaan uudestaan virallisesti seuraavassa aliluvussa Seurauksessa 2.59.

Avaruuden kanta voidaan sanoa myös sen *koordinaatistoksi.*

Voidaan osoittaa, että millä tahansa vektoriavaruudella on olemassa kanta. Lisäksi voidaan osoittaa, että tämän kannan ”koko” (jolla ymmärretään ns. *mahtavuus* yleisemmin äärettömän kannan tapauksessa) on vakio, joka ei riipu kannan valinnasta. Tästä seuraa, että jokaisella vektoriavaruudella on hyvinmääritelty *ulottuvuus* (mahdollisesti ääretön kardinaali). Yleisessä tapauksessa näiden väitteiden tarkka muotoilu ja todistus vaativat kuitenkin epätriviaaleja joukko-opillisia menetelmiä (Zornin Lemma). Palaamme tähän (ehkä) kurssin loppupuolella, tässä vaiheessa käydään asiaa läpi vain äärellisulotteisten vektoriavaruuksien kohdalla, niistähän tällä kurssilla olemme kiinnostuneita enemmän.

Olemme määritelleet vektoriavaruuden V äärellisulotteiseksi, jos se on äärellisen joukon A virittämä. Määritelmässä siis ei vaadita, että A olisi lisäksi vapaa, eli kanta. On selvää, että jos vektoriavarudella on olemassa jopa äärellinen kanta, se on erityisesti äärellisulotteinen. Seuraavan tuloksen mukaan myös käänteinen väite pitää paikkaansa. Itse asiassa tämä tulos sanoo jopa enemmän, nimittäin se sanoo, että jos joukolla on äärellinen viritysjoukko, se voidaan aina ”pienentää” kannaksi heitämällä siitä pois joitakin alkiota.

Propositio 2.41. *Olkoon* $V = \mathrm{Span}(A)$*, missä* A *on äärellinen. Tällöin on olemassa* $B \subset A$ *siten, että* B *on avaruuden* V *kanta.*

Erityisesti jokaisella äärellisulotteisella vektoriavaruudella on äärellinen kanta.

Todistus. Jos A sattuu jo olemaan vapaa, valitaan $B = A$. Muuten A on sidottu, joten Lemman 2.37, c) nojalla on olemassa $\mathbf{v} \in A$ jolle pätee $\mathbf{v} \in \mathrm{Span}(A \setminus \{\mathbf{v}\})$ ja lisäksi

$$\mathrm{Span}(A) = \mathrm{Span}(A \setminus \{\mathbf{v}\}).$$

Merkitään $A_1 = A \setminus \{a\}$. Osajoukossa $A_1 \subset A$ on aidosti vähemmän alkioita kuin A:ssä. Jos A_1 on vapaa, olemme valmiit, jos se ei ole vapaa, jatketaan samalla tavalla, jolloin heitämällä siitä jokin alkio, joka on muiden alkioiden virittämässä aliavaruudessa, saadaan joukko A_2. Jatkamalla näin saadaan jono joukkoa $A, A_1, A_2, \ldots$, jossa seuraava joukko A_i on edellisen joukon A_{i-1} **aito** osajoukko ja lisäksi $\mathrm{Span}(A_i) = V$ jokaisella i.

Koska joukko A on äärellinen, tällainen alkioiden vähentäminen joukosta A ei voi jatkua loputtomiin, vaan jossakin vaiheessa konstruktion täytyy pysähtyä. Toisaalta alkioiden vähentämistä on aina mahdollista jatkaa, jos tässä vaiheessa tarkasteltava joukko on sidottu. Näin ollen, jossakin vaiheessa saadaan A:n osajoukko $A_i = B$, joka on vapaa ja virittää koko avaruuden.

Halutessaan sama todistus voidaan kirjoittaa myös täsmällisemmässä formaalissa muodossa induktio-todistuksena (induktio n:n suhteen). Tämä jätetään lukijalle pohdittavaksi. □

Edellinen tulos on syy siihen, miksi vektoriavaruuksien teoriassa termit ”äärellisviritteinen” (äärellisen joukon virittämä) ja ”äärelliulotteinen” (vapaan äärellisen jonon virittämä) ovat synonyymeja, kuten olemmekin niitä määritelleet. Modulien teoriassa näin ei ole - on olemassa äärellisviritteisiä moduleita, jotka eivät ole äärellisulotteisia. Näin ollen, vaikka vektoriavaruuksien näkökulmasta toinen termeistä on ”turha”, yleisesti molempia tarvitaan. Asiaan palataan modulien teorian yhteydessä myöhemmin.

Seuraavasta tuloksesta seuraa, että vektoriavaruuden kannan koko ei riipu kannan valinnasta, joten voimme puhua avaruuden dimensiosta.

Propositio 2.42. *Olkoon* $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ K*-vektoriavaruuden* V *äärellinen osajoukko, jossa on* n *alkiota. Olkoon* $B = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\} \subset \mathrm{Span}(A)$ *vapaa osajoukko, jolla on* m *alkiota. Tällöin* $m \leq n$*.*

Toisin sanoen avaruuden vapaassa joukossa ei voi olla enemmän alkioita kuin saman avaruuden virittävässä joukossa.

Todistus. Esitämme väitteelle kolme erilaista todistusta, joista yhdessä käytetään lineaaristen yhtälöryhmien teoriaa (eli sellainen todistus, jota esitetään usein lineaarialgebran peruskurssilla) ja kaksi "matriisi-menetelmävapaata" todistusta.

Todistus 1: Koska $B \subset \mathrm{Span}(A)$ jokaisella $j = 1, \ldots, m$, on olemassa skalaarit $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj} \in K$ siten, että

$$\mathbf{w}_j = a_{1j}\mathbf{v}_1 + a_{2j}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{nj}\mathbf{v}_n.$$

Tällöin, jos $x_1, \ldots, x_m \in K$ ovat mielivaltaisia kunnan K alkioita, lineaarinen kombinaatio

$$x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + \ldots + x_m\mathbf{w}_m$$

voidaan kirjoittaa A:n alkioiden lineaarisena kombinaationa seuraavasti

$$x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + \ldots + x_m\mathbf{w}_m = \tag{2.43}$$

$$(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1m}x_m)\mathbf{v}_1+(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2m}x_m)\mathbf{v}_2+\ldots+(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nm}x_m)\mathbf{v}_n.$$

Tarkastellaan homogeenista lineaarista yhtälöryhmää

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1m}x_m = 0_K \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2m}x_m = 0_K \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nk}x_k + \ldots + a_{nm}x_m = 0_K. \end{cases}$$

Jos olisi $m > n$, tällä homogeenisella lineaarisella yhtälöryhmällä olisi myös epätriviaaleja ratkaisuja (Lemma 16), eli sellainen jono $(x_1, \ldots, x_n)$ skalaareja, joille pätisi $x_i \neq 0_K$ ainakin yhdellä i. Yhtälön 2.43 nojalla tällöin

$$x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + \ldots + x_m\mathbf{w}_m = \mathbf{0}_K,$$

joten löydettiin epätriviaali nollavektorin esitys joukon $B = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ alkioiden lineaarisena kombinaationa. Tämä on vastoin oletusta, sillä B on vapaa. Näin ollen täytyy olla $m \leq n$.

Todistus 2: Sovelletaan Lemmaa 2.39.
Esitetään joukko A jonona $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ ja vastaavasti joukko B jonona $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m)$ (toisin sanoen kiinnitetään kummassakin joukossa jokin vektorien järjestys). Tarkastellaan jonoa

$$(\mathbf{w}_m, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n), \tag{2.44}$$

joka saadaan lisäämällä jonon $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ eteen vektori $\mathbf{w}_m$. Koska $\mathbf{w}_m \in \mathrm{Span}(A)$, jono 2.44 edelleenkin virittää saman aliavaruuden $\mathrm{Span}(A)$. Koska $\mathbf{w}_m \in \mathrm{Span}(A)$, jono 2.44 on sidottu (Lemma 2.37, c). Lemman 2.39 nojalla jonosta 2.44 löytyy alkio, joka on edellisten alkioiden virittämässä aliavaruudessa. Tämä ei voi olla ensimmäinen vektori $\mathbf{w}_m$, sillä tämä tarkoittaisi, että $\mathbf{w}_m = \mathbf{0}_V$, mikä on mahdotonta, sillä $\mathbf{w}_m \in B$, joka on vapaa. Näin ollen jonosta 2.44 löytyy jokin muotoa $\mathbf{v}_j$ oleva vektori, joka on edellisten vektorien virittämässä aliavaruudessa, joten poistamalla se jonosta, saadaan uusi jono, jonka pituus on n ja joka edelleenkin virittää saman avaruuden $\mathrm{Span}(A)$ (Lemma 2.37, c).

Jatketaan samalla tavalla. Seuraavaksi lisätään tähän uuteen jonoon alkuun $\mathbf{w}_{m-1}$ eli tarkastellaan jonoa, joka on muotoa $(\mathbf{w}_{m-1}, \mathbf{w}_m, \ldots)$, jossa toisen komponentin jälkeen tulee muotoa $\mathbf{v}_i$ olevia vektoreia. Tämän jonon pituus on $(n+1)$ ja se on sidottu, sillä $\mathbf{w}_{m-1} \in \mathrm{Span}(A)$, joten se voidaan esittää jonon muiden jäsenten lineaarisena kombinaationa. Sovelletaan tähän jonoon Lemmaa 2.39, sen mukaan jonosta löytyy alkio, joka on edellisten jäsenten lineaarinen kombinaatio. Tämä alkio ei voi olla $\mathbf{w}_{m-1}$, sillä se tarkoittaisi sitä, että se on nollavektori, eikä myöskään $\mathbf{w}_m$, sillä se tarkoittaisi, että vapaan joukon B osajoukko $\{\mathbf{w}_{m-1}, \mathbf{w}_m\}$ on sidottu (tämä on vastaan Lemmaa 2.37). Näin ollen tällainen vektori on taas yksi jonon loppupään vektoreista eli muotoa $\mathbf{v}_j$, joukon A alkio. Lemman 2.39 nojalla voidaan heittää se jonosta muuttamatta jonon virittävää aliavaruutta, joka on edelleenkin $\mathrm{Span}(A)$.

Tällä tavalla jatketaan induktiivisesti. Vaiheessa numero l, $l < n$, saadaan n-pituinen jono, joka on muotoa $(\mathbf{w}_{m-l+1}, \ldots, \mathbf{w}_m, \ldots)$, missä on alussa l jäsentä joukosta B ja loput $(n-l)$ alkiota joukosta A. Lisäksi jonon virittämä aliavaruus on $\mathrm{Span}(A)$. Jos $m-l+1 > 1$ ja jonossa esiintyy vielä vektoreita muotoa $\mathbf{v}_i$, siirrytään seuraavaan vaiheseen numero $(l+1)$. Lisätään jonoon alkuun uusi joukon B vektori $\mathbf{w}_{m-l}$ ja todetaan, että tällöin näin saatu $(n+1)$-pituinen jono on sidottu. Lemman 2.39 avulla siitä löydetään vektori, joka on edellisten jäsenten lineaarinen kombinaatio. Tämä vektori ei voi olla mikään joukon B vektori, sillä tämä olisi ristiiridassa joukon B vapauden kanssa. Näin ollen jonosta voidaan heittää yksi joukon A vektori, jolloin saadaan n-pituinen jono, jossa on $(l+1)$ ensimmäistä komponenttia joukosta B ja jonka virittämä aliavaruus on edelleenkin $\mathrm{Span}(A)$.

Tällä tavalla alkuperäinen joukkoa A esittävää jonoa muutetaan yksi vektori kerrallaan lisäämällä siihen aina alkuun yksi uusi vektori joukosta B ja poistamalla samalla yksi A:n vektori, niin kauan kuin kumpikin toimenpide on mahdollinen, eli niin kauan kuin sekä B:ssä on vielä uusia vektoreita että jonossa esiintyy jokin A:n vektori. Jonon pituus pysyy luvussa n ja jonon virittämä aliavaruuskin pysyy samana, sen arvo on $\mathrm{Span}(A)$ jokaisessa välivaiheessa.

Oletetaan nyt, että $m > n$, eli B:ssä on enemmän alkioita kuin A:ssä. Tällöin yllä kuvattu algoritmi pysähtyy n:än askelen jälkeen, jolloin saadaan n-pituinen jono $(\mathbf{w}_{m-n+1}, \ldots, \mathbf{w}_m)$, joka koostuu ainoastaan B:n vektoreista ja virittää aliavaruden $\mathrm{Span}(A)$. Koska $m > n$, on olemassa B:n vektori, joka ei ole tässä jonossa, nimittäin vektori $\mathbf{w}_1$. Tämä vektori on kuitenkin avaruudessa $\mathrm{Span}(A)$. Tämä tarkoittaa sitä, että tämä vektori voidaan esittää jonon $(\mathbf{w}_{m-n+1}, \ldots, \mathbf{w}_m)$ alkioiden lineaarisena kombinaationa. Erityisesti tämä tarkoittaa sitä, että me löysimme joukon B vektorin, joka voidaan esittää muiden joukon B vektorien lineaarisena kombinaationa. Tämä on vastoin oletusta, koska B on vapaa (Lemma 2.37, c). Näin ollen täytyy olla $m \leq n$.

Todistus 3:
Osoitetaan väite induktiolla joukon A koon n suhteen. Jos $n = 0$, niin $\mathrm{Span}(A) = \{\mathbf{0}_V\}$ on triviaali vektoriavaruus. On helppo nähdä, että triviaalissa vektoriavaruudessa ei ole

epätyhjiä vapaita osajoukkoja, joten tällöin välttämättä $m = 0$ ja väite $m \leq n$ on selvä.

Tarkastellaan vielä tapausta $n = 1$, ennen kuin siirrytään induktiovaiheeseen. Nyt $A = \{\mathbf{v}\}$, joten
$$\mathrm{Span}(A) = \{k\mathbf{v} \mid k \in K\}.$$
Jos $m \geq 2$, on olemassa skalaarit $k_1, k_2 \in K$, joille pätee $\mathbf{w}_1 = k_1\mathbf{v}$, $\mathbf{w}_2 = k_2\mathbf{v}$ ja lisäksi $k_1 \neq k_2$ (koska muuten olisi $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2$). Koska B on vapaa, lisäksi täytyy päteä, että $k_1 \neq 0 \neq k_2$. Erityisesti on olemassa k_2^{-1}, josta saadaan nollavektorille epätriviaali esitys

$$\mathbf{w}_1 + (-k_1k_2^{-1})\mathbf{w}_2 = \mathbf{0}_V,$$

mikä on ristiriidassa sen kanssa, että B on vapaa. Saatu ristiirita osoittaa, että $m \leq 1 = n$.

Oletamme, että väite on tosi jollakin $n - 1 \geq 1$ ja osoitamme, että se on voimassa myös luvulle n. Olkoon $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ja olkoon $B = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\} \subset \mathrm{Span}(A)$ vapaa. On osoitettava, että $m \leq n$.

Lemmasta 2.29 seuraa, että jokaisella $j = 1, \ldots, m$ voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{w}_j = k_{1j}\mathbf{v}_1 + \ldots + k_{(n-1)j}\mathbf{v}_{n-1} + k_{nj}\mathbf{v}_n \tag{2.45}$$

joillakin skalaareilla $k_{ij} \in K, i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m$. Jos $k_{n,j} = 0_K$ kaikilla $j = 1, \ldots, m$, joukko B on joukon $A' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}\}$ virittämän aliavaruuden $\mathrm{Span}(A')$ osajoukko. Tällöin induktio-oletuksesta seuraa heti, että $m \leq n - 1 \leq n$ ja asia on selvä.

Toinen vaihtoehto on, että $k_{nj} = k \neq 0_K$ jollakin $j = 1, \ldots, m$. Muuttamalla joukon B alkioiden indeksointia tarvittaessa, voidaan olettaa, että $j = m$. Oletamme siis, että $k = k_{nm} \neq 0_K$. Ideana on muodostaa uusi jono $(\mathbf{w}'_1, \ldots, \mathbf{w}'_{m-1})$ asettamalla jokaisella $j = 1, \ldots, m$

$$\mathbf{w}'_j = \mathbf{w}_j - r_j\mathbf{w}_m \tag{*}$$

sopivalla $r_j \in K$. Lisäksi skalaarit r_j pyritään valitsemaan niin, että pätisi

$$\mathbf{w}'_j \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}).$$

Nimittäin, jos tässä onnistutaan, ja lisäksi osoitetaan, että näin muodostettu uusi jono $(\mathbf{w}'_1, \ldots, \mathbf{w}'_{m-1})$ on vapaa, induktio-oletuksen nojalla voidaan päätellä, että $m-1 \leq n-1$. Tästä saadaan heti $m \leq n$ ja ollaan valmiit.

Aloitetaan osoittamalla, että viimeksi mainittu vaatimus on aina voimassa, toisin sanoen, että kaavalla (*) määritelty jono $(\mathbf{w}'_1, \ldots, \mathbf{w}'_{m-1})$ on aina vapaa, millä tahansa skalaarien $r_1, \ldots, r_{m-1}$ valinnalla. Täsmällisemmin sanottuna olkoot $r_1, \ldots, r_{m-1} \in K$ mielivaltaisia ja asetetaan jokaisella $j = 1, \ldots, m - 1$

$$\mathbf{w}'_j = \mathbf{w}_j - r_j\mathbf{w}_m.$$

Osoitetaan, että tällöin jono $(\mathbf{w}'_1, \ldots, \mathbf{w}'_{m-1})$ on vapaa. Oletetaan, että

$$k_1\mathbf{w}'_1 + \ldots + k_{m-1}\mathbf{w}'_{m-1} = \mathbf{0}_V$$

missä $k_1, \ldots, k_{m-1} \in K$. Sijoittamalla tähän vektorin $\mathbf{w}_j'$ määritelmä (*), saadaan yhtälö

$$k_1\mathbf{w}_1 + \ldots + k_{m-1}\mathbf{w}_{m-1} + (-k_1r_1 - k_2r_2 - \ldots - k_{m-1}r_{m-1})\mathbf{w}_m = \mathbf{0}_V.$$

Tämä on nollavektorin esitys joukon B alkioiden lineaarisena kombinaationa. Koska B on oletuksen mukaan vapaa, tämän kombinaation on pakko olla triviaali, joten erityisesti $k_1 = k_2 = \ldots = k_{m-1} = 0$. Tämä osoittaa sen, että jono $(\mathbf{w}_1', \ldots, \mathbf{w}_{m-1}')$ on vapaa.

Jäljellä on vain sen osoittaminen, että skalaarit $r_1, \ldots, r_{m-1}$ voidaan valita siten, että

$$\mathbf{w}_j' \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1})$$

kaikilla $j = 1, \ldots, m$. Kaavoista (*) ja 2.45 seuraa, että jokaisella $j = 1, \ldots, m-1$ pätee

$$\mathbf{w}_j' = k_{1j}'\mathbf{v}_1 + \ldots + k_{(n-1)j}'\mathbf{v}_{n-1} + k_{nj}'\mathbf{v}_n,$$

missä $k_{ij}' = k_{ij} - r_jk_{im}$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Tästä nähdään, että
$k_{nj}' = 0_K$ kaikilla $j = 1, \ldots, m$ jos ja vain jos valitaan $r_j = k_{n_j}/k_{nm}$. Tämä on myös aina mahdollista, sillä oletuksemme mukaan $k = k_{nm} \neq 0_K$, joten sillä voi jakaa. Näin ollen, asettamalla jokaisella $j = 1, \ldots, m$

$$\mathbf{w}_j' = \mathbf{w}_j - (k_{nj}k^{-1})\mathbf{w}_m,$$

missä $k = k_{nm}$, saadaan vapaa jono $(\mathbf{w}_1', \ldots, \mathbf{w}_{m-1}')$, jonka jokainen jäsen kuuluu aliavaruuteen $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1})$. Induktio-oletuksen nojalla tästä saadaan $m - 1 \leq n - 1$ eli $m \leq n$. Todistus on valmis. □

Seuraus 2.46. *Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus ja olkoot $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ sekä $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m)$ kumpikin avaruuden V kanta. Tällöin $n = m$.*

Todistus. Olkoon $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ja $B = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$. Koska A on vapaa ja $A \subset \mathrm{Span}(B)$, edellisen proposition nojalla $n \leq m$. Samalla tavalla toisaalta B on vapaa ja $B \subset \mathrm{Span}(A)$, joten samasta syystä $m \leq n$. Yhdistämällä tuloksia saadaan väite osoitettua. □

Olkoon V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus ja olkoon $A = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ sen eräs kanta. Tällöin sanomme, että avaruuden V *dimensio* eli *ulottuvuus* on n. Merkitsemme tätä myös yhtälönä $\dim V = n$. Edellisen seurauksen nojalla dimensio on hyvin määritelty, eli ei riipu kannan valinnasta. Kun V ei ole äärellisulotteinen merkitään $\dim V = \infty$. Tällöin V on *ääretönulotteinen* vektoriavaruus. Myös ääretönulotteisille vektoriavaruuksille voidaan määritellä tarkemmin dimension käsitettä, mutta tämä vaatisi äärettömiä kardinaalilukuja.

Jos kuntaa K haluaa korostaa, voi käyttää dimensiolle merkintää $\dim_K V$. Tämä voi olla jossakin asiayhteyksissä tarpeellista, koska usein sama Abelin ryhmää V voidaan ajatella luonnollisella tavalla K-vektoriavaruudella erilaisten kuntien K yli. Esimerkiksi kompleksilukujen joukko $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ voidaan varustaa sekä $\mathbb{C}$-vektoriavaruuden strukturilla, että myös $\mathbb{R}$-vektoriavaruuden struktuurilla. Tällöin $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$, mutta $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$. Samoin $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = 1$, mutta $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$.

Esimerkkejä 2.47. *(1) Olkoon K kunta ja olkoon $n \in \mathbb{N}$ luonnollinen luku. Määrittelemme jokaisella $i = 1, \ldots, n$ K-vektoriavaruudessa K^n vektorin*

$$\mathbf{e}_i = (0_K, \ldots, 1_K, \ldots, 0_K),$$

missä tasan i'nnes koordinaatti on 1_K ja muut ovat nolla-alkioita. Väitämme, että jono $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ on tällöin avaruuden K^n kanta.

Olkoot $k'_1, \ldots, k'_n \in K$ mielivaltaisia. Tällöin suora lasku näyttää sen, että yhtälö

$$k'_1\mathbf{e}_1 + k'_2\mathbf{e}_2 + \ldots + k'_n\mathbf{e}_n = (k'_1, \ldots, k'_n).$$

Olkoon $\mathbf{v} = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in K^n$ avaruuden V vektori. Edellisestä seuraa, että yhtälö

$$\mathbf{v} = k'_1\mathbf{e}_1 + k'_2\mathbf{e}_2 + \ldots + k'_n\mathbf{e}_n$$

pätee jos ja vain jos $k'_i = k_i$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Tästä nähdään, että jokaisella $\mathbf{v} \in K^n$ on tasan yksi lineaarinen esitys muodossa

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2 + \ldots + k_n\mathbf{e}_n.$$

Näin ollen jono $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ on sekä vapaa, että virittää koko avaruuden K^n. Toisin sanoen tämä jono on avaruuden kanta. Vektorin $\mathbf{v} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ koordinaatit tässä kannassa ovat yksinkertaisesti sen komponentit k_i, $i = 1, \ldots, n$.

Samalla osoitettiin, että K^n on n-ulotteinen K-vektoriavaruus. Erityisesti jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on olemassa ainakin yksi n-ulotteinen K-vektoriavaruus. Seuravaassa luvussa osoitamme, että K^n on olennaisesti ainoa n-ulotteinen R-moduli, tarkemmin sanottuna jokainen n-ulotteinen K-vektoriavaruus on isomorfinen avaruuden K^n kanssa.

Yllä konstruoitua avaruuden K^n kantaa $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ sanotaan jatkossa sen **standardikannaksi**.

(2) Olkoon $P_n(\mathbb{R})$ kaikkien sellaisten polynomikuvausten $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muodostama $\mathbb{R}$-vektoriavaruus, joiden aste on korkeintaan n (kts. esim. 2.11). Jokaisella $k = 0, \ldots, n$ olkoon $f_k \in P_n(\mathbb{R})$ kaavalla $f_k(x) = x^k$ määritely kuvaus. Huomaa, että tapaus $k = 0$ vastaa vakiokuvausta, $f_0(x) \equiv 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Tällöin jono $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ on avaruuden $P(\mathbb{R})_n$ kanta. Erityisesti $\dim P_n(\mathbb{R}) = n + 1$.

Tämän väitteen tarkka todistus jätetään lukijalle pohdittavaksi. Funktiota f_k merkitään usein yksinkertaisesti x^k. Polynomifunktion f,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

koordinaatit kannan $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ suhteen ovat sen kertoimet $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

(3) *Vaikka edellisen esimerkin väite tuntuu melkein itsestään selvältä, se ei enää välttämättä pidä paikkaansa, jos* $\mathbb{R}$ *korvataan jollakin toisella kunnalla. Esimerkiksi tarkastellaan avaruutta* $P_2(\mathbb{Z}_2)$*, jonka muodostavat siis kaikki korkeintaan 2-asteiset polynomit* $f\colon \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$.

Kunnassa $\mathbb{Z}_2$ *on vain kaksi alkiota,* 0_2 *ja* 1_2*. Näistä ensimmäinen on polynomifunktion* $f(x) = x$ *juuri ja toinen on polynomifunktion* $g(x) = x - 1$ *juuri. Erityisesti toisen asteen funktiolle* h*,* $h(x) = x^2 - x = x(x-1)$ *pätee* $h(x) = 0$ *kaikilla* $x \in \mathbb{Z}_2$*. Koska* $x^2 - x \equiv 0$*, kunnassa* K *pätee* $f_2 = x^2 = x = f_1$*. Erityisesti jono* (f_0, f_1, f_2) *(joka kyllä virittää edelleenkin avaruuden* $P_2(\mathbb{Z}_2)$*) ei ole vapaa ja avaruus* $P_2(\mathbb{Z}_2)$ *ei ole kolmiulotteinen. Voidaan osoittaa, että* (f_0, f_1) *on tämän avaruuden kanta, jolloin* $\dim P_2(\mathbb{Z}_2) = 2$*. Itse asiassa voidaan osoittaa, että* $P_k(\mathbb{Z}_2) = P_2(\mathbb{Z}_2)$ *kaikilla* $k \geq 2$*, joten erityisesti* $\dim P_k(\mathbb{Z}_2) = 2$ *kaikilla* $k \geq 2$.

Myöhemmin osoitamme, että tällainen tilanne ei ole mahdollinen äärettömässä kunnassa K*, jossa polynomit käyttäytyvät tässä mielessä kuin* $\mathbb{R}$*:ssä. Sen sijaan äärellisessä kunnassa käy oleellisesti samalla tavalla kuin tässä esimerkissä. Äärellisessä kunnassa polynomifunktion*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

kertoimet $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ *eivät välttämättä ole yksikäsitteisiä (itse asiassa eivät koskaan ole).*

Tämän "patologisen käyttäyttäytymisen" takia määritelemme luvussa 3 polynomin käsitteen uudestaan algebrallisesti, ei kuvausten kautta. Tällöin algebrallisina oliona tulkittuna polynomit käyttäytyvät hyvin myös äärellisen kunnan tapauksessa.

(4) *Olkoon* $P(\mathbb{R})$ kaikkien *polynomifunktioiden* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *muodostama* $\mathbb{R}$*-vektoriavaruus. Tällöin, esimerkin (3) nojalla* $P(\mathbb{R})$ *sisältää jokaisella* $n \in \mathbb{N}$ *vapaan jonon* $(f_0, f_1, \ldots, f_{n-1})$ *jonka pituus on tasan* n*. Lemmasta 2.42 seuraa, että* $P(\mathbb{R})$ *ei voi olla äärellisen joukon virittämä. Toisin sanoen* $P(\mathbb{R})$ *on esimerkki* ääretönulotteisesta *vektoriavaruudesta.*

Samalla tavalla voidaan päätellä, että avaruudet $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *(kaikkien funktioiden* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *muodostama avaruus),* $C(\mathbb{R})$ *(kaikki jatkuvat funktiot* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*),* $C^1(\mathbb{R})$ *(kaikki derivoituvat funktiot* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$*) jne ovat kaikki ääretönulotteisia.*

Jos sen sijaan vaihdetaan kunta ja tarkastellaan vektoriavaruutta K^K *jonkun äärellisen kunnan yli, niin tämä vektoriavaruus on itse asiassa jopa äärellinen (jos* K *on äärellinen, on olemassa vain äärellinen määrä kuvauksia* $f\colon K \to K$*), erityisesti myös äärellisulotteinen.*

(5) *Esimerkissä 2.35 olemme näyttäneet, että* K*-vektoriavaruuden* $K^{\mathbb{N}}$ *(ääretön) osajoukko* $A = \{\mathbf{e}_j \mid i \in \mathbb{N}\}$ *on vapaa. Tässä* $\mathbf{e}_j = (a_i)_{n \in \mathbb{N}}$ *on sellainen jono, jolle*

$$a_i = \begin{cases} 1_K, & i = j, \\ 0_K, & i \neq j. \end{cases}$$

Koska A on vapaa, se on virittämänsä aliavaruuden $\mathrm{Span}(A)$ *kanta. Tutkitaan, mikä on aliavaruus* $\mathrm{Span}(A)$*. Olkoot $j_1, \ldots, j_m \in \mathbb{N}$ ja $k_1, \ldots, k_m \in K$. Tyypillinen aliavaruuden* $\mathrm{Span}(A)$ *alkio $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ on lineaarinen kombinaatio muotoa*

$$k_1\mathbf{e}_{j_1} + k_2\mathbf{e}_{j_2} + \ldots + k_m\mathbf{e}_{j_m}.$$

Laskemalla yhtälön vasemmalla puolella olevan lineaarisen kombinaation komponentteja nähdään, että $a_i = k_l$ kun $i = j_l$ jollakin $l = 1, \ldots, m$ ja $a_i = 0_K$ muuten. Erityisesti jonossa $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ esiintyy vain äärellinen määrä kunnan nolla-alkioista eroavia komponentteja. Sanomme tällaisia jonoja äärelliskantajaisiki*. Selvästi jono $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ on äärelliskantajainen jos ja vai jos on olemassa $n \in \mathbb{N}$ siten, että $a_i = 0_K$ kaikilla $i > n$. Olemme näyttäneet, että aliavaruuden* $\mathrm{Span}(A)$ *jokainen vektori on äärelliskantajainen. Kääntäen, olkoon jono $\mathbf{v} = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ äärelliskantajainen. Tällöin on olemassa $n \in \mathbb{N}$ siten, että $a_i = 0_K$ kaikilla $i > n$. Helposti nähdään, että tällöin*

$$\mathbf{v} = \sum_{i=0}^{n} a_i\mathbf{e}_i.$$

Tämä tarkoittaa sitä, että jokainen äärelliskantajainen jono on avaruuden $\mathrm{Span}(A)$ *alkio.*

Olemme osoittaneet sen, että avaruus $\mathrm{Span}(A)$ *on tasan äärelliskantajaisten jonjen muodostama avaruus. Tätä avaruutta merkitään jatkossa $K^{(\mathbb{N})}$. Kokoelma $A = \{\mathbf{e}_j \mid i \in \mathbb{N}\}$ on tämän avaruuden ääretön kanta. Erityisesi $K^{(\mathbb{N})}$ ei ole äärellisulotteinen vektoriavaruus.*

Seuraavan Lemman mukaan äärellisulotteisen avaruuden jokainen *aliavaruus* on myös äärellisulotteinen. Lisäksi jokainen aliavaruuden kanta voidaan täydentää koko avaruuden kannaksi - jopa sillä tavalla, että täydentäviä vektoreita voi ottaa mistä tahansa koko avaruuden kannasta.

Propositio 2.48. *Olkoon V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus, missä K on kunta ja olkoon $W \subset V$ aliavaruus. Tällöin W on myös äärellisulotteinen. Lisäksi jos $W \subsetneq V$,pätee*

$$\dim W < \dim V.$$

Jokainen aliavaruuden W kanta $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m)$ voidaan täydentää *V:n kannaksi. Pätee jopa vahvempi väite, nimittäin olkoon $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m)$ jokin W:n kanta ja olkoon $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ jokin V:n kanta. Tällöin jonolla $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ on olemassa osajono $(\mathbf{v}_{j_1}, \mathbf{v}_{j_2}, \ldots, \mathbf{v}_{j_{n-m}})$ siten, että yhdistetty jono*

$$(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m, \mathbf{v}_{j_1}, \mathbf{v}_{j_2}, \ldots, \mathbf{v}_{j_{n-k}})$$

on avaruuden V kanta.

Todistus. Olkoon $A = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ jokin V:n kanta (joukkona). Olkoon $B = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_l\}$ mielivaltainen avaruuden W äärellinen vapaa osajoukko. Tällöin erityisesi $B \subset \mathrm{Span}(A) = V$, joten Proposition 2.42 nojalla pätee välttämättä $l \leq n$.

Tämä tarkoittaa sitä, että W ei voi sisältää alkioiden lukumäärän suhteen mielivaltaisen "isoja" vapaita osajoukkoja ja itse asiassa jokaisessa W:n vapaassa osajoukossa on korkeintaan n alkiota. Tällöin voidaan valita W:n vapaa osajoukko, jossa on **suurin** mahdollinen määrä alkioita, olkoon $B = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ tällainen W:n vapaa osajoukko. Tällöin B on *maksimaalinen* eli mikä tahansa joukko, joka sisältää B:n aitona osajoukkona, ei voi olla enää vapaa. Lisäksi $m \leq n$.

Osoitetaan, että $B = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ on avaruuden W kanta. Koska B on vapaa, riittää osoittaa, että $W = \mathrm{Span}(B)$.

Olkoon $\mathbf{w} \in W$ mielivaltainen. Haluamme osoittaa, että $\mathbf{w} \in \mathrm{Span}(B)$. Jos $\mathbf{w} = \mathbf{w}_i$ jollakin $i = 1, \ldots, m$, asia on selvä. Muuten joukko

$$C = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m, \mathbf{w}\}$$

on joukon B aitona osajoukkona sisältävä joukko, joten, joukon B valinnan (maksimaalisuuden) nojalla, C ei ole vapaa. Olkoon

$$k_1\mathbf{w}_1 + \ldots + k_m\mathbf{w}_m + k\mathbf{w} = \mathbf{0}_V$$

nolla-vektorin epätriviaali esitys. Jos $k = 0_K$, tässä saadaan nolla-vektorille epätriviaali esitys joukon B alkioiden lineaarisena kombinaationa, mikä on ristiriita, sillä B on vapaa. Näin ollen on pakko olla $k \neq 0_K$, jolloin yhtälöstä saadaan

$$\mathbf{w} = (-k_1/k)\mathbf{w}_1 + \ldots + (-k_m/k)\mathbf{w}_m.$$

Tämä osoittaa sen, että $\mathbf{w} \in \mathrm{Span}(B)$. Näin ollen B on kanta, erityisesti W on äärellisulotteinen ja

$$\dim W = m \leq n = \dim V.$$

Olkoon $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m)$ mielivaltainen aliavaruuden W kanta ja olkoon $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ mielivaltainen avaruuden V kanta. Halutaan osoittaa, että on olemassa osajono $(\mathbf{v}_{j_1}, \mathbf{v}_{j_2}, \ldots, \mathbf{v}_{j_{n-m}})$ siten, että yhdistetty jono

$$(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m, \mathbf{v}_{j_1}, \mathbf{v}_{j_2}, \ldots, \mathbf{v}_{j_{n-k}})$$

on avaruuden V kanta. Laitetaan molemmat kannat jonoon

$$(*) \qquad (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n).$$

Tämä jono virittää avaruuden V, sillä sen viimeiset n vektoria virittävät sen jo.

Jos $m = 0$, W on triviaali aliavaruus $\{\mathbf{0}_V\}$, $m = 0$ ja osajonoksi $(\mathbf{v}_{j_1}, \mathbf{v}_{j_2}, \ldots, \mathbf{v}_{j_{n-m}})$ voidaan valita koko jono $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$. Muuten jonon (*) täytyy olla sidottu, sillä esimerkiksi vektori $\mathbf{v}_1$ voidaan esittää avaruuden V kannan $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ alkioiden lineaarisena kombinaationa. Lemman 2.39 nojalla jonossa on olemassa alkio, joka voidaan esittää edellisten jäsenten lineaarisena kombinaationa. Tämä alkio ei voi olla mikään alkiosta $\mathbf{w}_j$, $j = 1, \ldots, m$, sillä tämä olisi vastaan sitä oletusta, että jono $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m)$ on vapaa. Näin ollen, yksi vektoreista $\mathbf{v}_i$, $i = 1, \ldots, n$, voidaan heittää jonosta pois muuttamatta jonon virittämää joukkoa, joka on koko avaruus V.

Jos tämän alkion poiston jälkeen jono on vapaa, se muodostaa halutun avaruuden kannan. Muuten jatketaan samalla tavalla ja poistetaan siitä Lemman 2.39 avulla seuraava alkio, jonka on myöskin pakko olla yksi vektoreista $\mathbf{v}_i$. Näin jatketaan, kunnes päädytään vapaan jonoon

$$(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m, \mathbf{v}_{i_1}, \ldots, \mathbf{v}_{i_l}).$$

Konstruktion perusteella tämä jono virittää avaruuden V. Haluttu kanta on siis löydetty.

Jos W on V:n aito aliavaruus, tässä kannassa täytyy olla $l \geq 1$, eli sinne pitää jäädä ainakin yksi muotoa $\mathbf{v}_i$ oleva vektori, sillä muuten W:n kanta olisi samalla myös V:n kanta, mistä seuraisi $W = V$. Toisaalta, jos yllä $l \geq 1$, niin tällöin $m = n - l < n$. Olemme siis myös osoittaneet, että kun W on V:n aito aliavaruus, pätee

$$\dim W < \dim V.$$

□

Kun A on joukko, merkintä $|A|$ tarkoittaa joukon A alkioiden lukumäärä. Tällöin äärettömälle joukolle A sovitaan $|A| = \infty$.

Seuraus 2.49. *Olkoon V n-ulotteinen K-vektoriavaruus, $n \in \mathbb{N}$. Olkoon $A \subset V$.*

(1) Jos A on vapaa, niin $|A| \leq n$. Yhtäsuuruus $|A| = n$ pätee tällöin jos ja vain jos A on avaruuden V kanta.

(2) Jos A virittää avaruuden V, niin $|A| \geq n$. Yhtäsuuruus $|A| = n$ pätee tällöin jos ja vain jos A on avaruuden V kanta.

Todistus. Olkoon B jokin avaruuden V kanta, tällöin $|B| = n$ ja erityisesti $\mathrm{Span}(B) = V$. Jos $A \subset V$ on vapaa, Propositiosta 2.42 seuraa tällöin välittömästi $|A| \leq n$.

Oletetaan, että A on vapaa ja $|A| = n = \dim V$. Olkoon $W = \mathrm{Span}(A)$. Tällöin A on aliavaruuden W kanta, joten $\dim W = \dim V$. Edellisen Proposition nojalla $W = V$, joten A on V:n kanta.

Väitteen (2) todistusta jätetään lukijalle harjoitustehtäväksi. □

Esimerkki 2.50. *Tarkastellaan $\mathbb{C}$-vektoriavaruudessa $\mathbb{C}^2$ jonoa $((1, i), (2+3i, -5))$. Helposti nähdään, että tämä jono on vapaa. Koska $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$, edellisestä seuraa, että tämä jono on jopa $\mathbb{C}$-avaruuden $\mathbb{C}^2$* kanta. *Erityisesti se siis virittää avaruuden $\mathbb{C}^2$. Huomaa, että me voimme tässä vaiheessa päätellä tämän tosiasian ilman, että se täytyy verifioida suoraan määritelmästä. Valaistaan vähän tarkemmin mistä on kyse. Väite, jonka mukaan jono $((1, i), (2+3i, -5))$ virittää avaruuden $\mathbb{C}^2$ tarkoittaa määritelmän mukaan sitä, että kaikilla $z, w \in \mathbb{C}$ kahden muuttujan yhtälöllä*

$$x_1(1, i) + x_2(2 + 3i, -5) = (z, w)$$

on (kompleksinen) ratkaisu $(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$. Tämä yhtälö on puolestaan ekvivalentti lineaarisen yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_1 + (2 + 3i)x_2 = z, \\ ix_2 - 5x_2 = w. \end{cases}$$

kanssa (kunnassa $\mathbb{C}$). Se, että jono $((1,i),(2+3i,-5))$ *on vapaa, puolestaan tarkoittaa sitä, että vastaavalla homogeenisella yhtälöryhmällä*

$$\begin{cases} x_1 + (2+3i)x_2 = 0, \\ ix_2 - 5x_2 = 0 \end{cases}$$

on vain triviaali ratkaisu $(x_1, x_2) = (0,0)$. *Koska yhtälöryhmässä on sama määrä yhtälöitä ja tuntemattomia, esimerkin väite seuraa itse asiassa suoraan kurssin Johdanto-osan Lemmasta 21. Tämä lemma johdettiin Gaussin eliminointimenetelmän avulla. Nyt kuitenkin osaamme sen verran teoriaa, että emme tarvitse enää tässä Gaussia - voimme päätellä, että vapaa jono on myös virittävä jono kun jonon pituus on avaruuden dimensio suoraan edellisen seurauksen avulla. Tämä seuraus puolestaan nojautuu vahvasti Propositioon 2.42. Tälle propositiolle esitettiin kyllä yksi todistus, jossa käytettiin Gaussin eliminointimenetelmää, mutta samalla sille annettiin jopa kaksi muuta todistusta, joissa kummassakin ei tarvita Gaussia .*

Tarinan opetus on seuraava. Gaussin eliminointimenetelmä on edelleenkin (ja aina tulee olemaan) tärkeä ja korvaamaton, kun haluaa oikeasti ratkaista jonkun konkreettisen yhtälöryhmän (silloinkin nykyään se tehdään käytännössä tietokoneella tai laskimella). Teoreettisissa kysymyksissä on kuitenkin mahdollista pärjätä ilman sitä.

Esimerkki 2.51. $\mathbb{R}$-*vektoriavaruuden* $\mathbb{R}^4$ *vektorien jono* $((5,6,-2,0),(4,-9,3,0))$ *on vapaa (tarkista!). Olkoon* W *tämän jonon virittämä* $\mathbb{R}^4$*:n aliavaruus. Jono* $((5,6,-2,0),(4,-9,3,0))$ *on tällöin avaruuden* W *(eräs) kanta. Proposition 2.48 nojalla tämä jono voidaan täydentää koko avaruuden* $\mathbb{R}^4$ *kannaksi. Itse asiassa tämän proposition mukaan pätee jopa seuraava. Olkoon* $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ *avaruuden* $\mathbb{R}^4$ standardikanta*, jossa siis* $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1,0)$, $\mathbf{e}_4 = (0,0,0,1)$. *Tällöin (Proposition 2.48 mukaan) avaruuden* W *kanta* $((5,6,-2,0),(4,-9,3,0))$ *voidaan täydentää avaruuden* $\mathbb{R}^4$ *kannaksi joillakin standardikannan vektoreilla. Selvästi tällaisia täydentävitä vektoreita täytyy olla tasan kahdella, koska* $\dim W = 2$
ja $\dim \mathbb{R}^4 = 4$. *Toisin sanoen on olemassa* $i, j \in \{1,2,3,4\}$, $i \neq j$, *joille jono*
$((5,6,-2,0),(4,-9,3,0),\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)$ *on avaruuden* $\mathbb{R}^4$ *kanta.*

Etsitään sopivat indeksit i, j *käymällä läpi standardikannan vektoreita luonnollisessa järjestyksessä. Voisiko esimerkiksi vektori* $\mathbf{e}_1$ *kuulua tähän kantaan? Jos jono*
$((5,6,-2,0),(4,-9,3,0),\mathbf{e}_1)$ *on vapaa, niin periaatteessa voisi, mutta jos se on sidottu, niin ei voi. Jono* $((5,6,-2,0),(4,-9,3,0),\mathbf{e}_1)$ *on sidottu jos ja vain jos* $\mathbf{e}_1 \in W$ *(miksi?), joten tutkitaan päätekö* $\mathbf{e}_1 \in W$ *eli onko yhtälöllä*

$$x(5,6,-2,0) + y(4,-9,3,0) = \mathbf{e}_1 \tag{2.52}$$

ratkaisuja $x, y \in \mathbb{R}$. *Osoittautuu, että on, itse asiassa*

$$\frac{3}{23}(5,6,-2,0) + \frac{2}{23}(4,-9,3,0) = \mathbf{e}_1$$

(tarkista). Näin ollen $e_1 \in W$, *joten jono* $((5,6,-2,0),(4,-9,3,0),\mathbf{e}_1)$ *on sidottu, eikä* $\mathbf{e}_1$ *voi siis olla osa etsittyä kantaa.*

Siirrytään seuraavaksi vektoriin $\mathbf{e}_2$*. Osoittautuu, että jono* $((5,6,-2,0),(4,-9,3,0),e_2)$ *ON vapaa (tarkista), joten* $\mathbf{e}_2$ *kelpaa etsityn kannan jäseneksi.*

Seuraavaksi tutkitaan, mahtuisiko sen jälkeen $\mathbf{e}_3$ *kantaan eli tarkistetaan olisiko jono* $((5,6,-2,0),(4,-9,3,0),\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ *vapaa vai sidottu. Osoittautuu, että se on sidottu (tarkista!). Näin ollen* $\mathbf{e}_3$ *ei kelpaa, joten vektorin* $\mathbf{e}_4$ *on pakko kelvata (muuten Propositio 2.48 ei olisi voimassa). Toisin sanoen*

$$((5,6,-2,0),(4,-9,3,0),\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_4)$$

on esimerkki avaruuden $\mathbb{R}^4$ *kannasta, joka täydentää aliavaruuden* W *kannan* $((5,6,-2,0),(4,-9,3,0))$*. Lukija voi halutessaan tarkistaa, että tämä todellakin on koko avaruuden kanta.*

Löydetty kanta ei ole ainoa mahdollinen, esimerkiksi

$$((5,6,-2,0),(4,-9,3,0),\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4)$$

on myös $\mathbb{R}^4$*:n kanta (tarkista!). Muita mahdollisuuksia ei olekaan.*

Tällainen tapa täydentää aliavaruuden kanta, jossa siis poimitaan kantaan uusia vektoreita jostakin tietystä koko avaruuden kannasta voi olla käytännössä turhan työläs. Jos haluaa täydentää aliavaruuden kannan vain joksikin koko avaruuden kannaksi, sitä varten löytyy nopeampia ja helpompia menetelmiä. Esimerkiksi $\mathbb{R}$ *ja* $\mathbb{C}$*-avaruuksien kohdalla voidaan käyttää hyväksi sisätuloja. Proposition 2.48 annetulla vahvalla tuloksella on lähinnä teoreettista merkitystä.*

2.3. Lineaariset kuvaukset ja matriisit

Palautetaan mieleen, että *lineaarinen kuvaus* $L\colon V \to W$ kahden K-vektoriavaruuden välillä on kuvaus jolle pätee

$$L(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = L(\mathbf{v}) + L(\mathbf{w}) \text{ ja}$$

$$L(k\mathbf{v}) = kL(\mathbf{v})$$

kaikilla $\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$, $k \in K$.

Kaikkien lineaaristen kuvausten $L\colon V \to W$ joukkoa merkitään $L(V,W)$. Kun $V = W$ joukkoa $L(V,V)$ merkitään myös lyhyesti symbolilla $L(V)$. Lineaarisia kuvauksia $L\colon V \to V$ sanotaan myös avaruuden V *lineaarisiksi operaattoreiksi* tai *endomorfismeiksi*. Tämän materiaalin seuraava Luku 3 on omistettu kokonaan lineaaristen operaattorien teorialle.

Olkoot $L, L'\colon V \to W$ kaksi lineaarista kuvausta K-vektoriavaruuksien välillä, toisin sanoen L ja L' ovat joukon $L(V,W)$ alkiota. Kuvausten L, L' *summa* $L + L'$ määritellään luonnollisella tavalla pisteittäin kuvauksena $L + L'\colon V \to W$, joka on määritelty ehdolla

$$(L+L')(\mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) + L(\mathbf{v}) \text{ kaikilla } \mathbf{v} \in V.$$

Helposti nähdään, että tällöin $L + L'$ on myös lineaarinen kuvaus. Nimittäin olkoot $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, $k \in K$. Tällöin

$$(L + L')(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = L(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + L'(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = L(\mathbf{v}_1) + L(\mathbf{v}_2) + L'(\mathbf{v}_1) + L(\mathbf{v}_2) =$$

$$(L(\mathbf{v}_1) + L'(\mathbf{v}_2)) + (L(\mathbf{v}_2) + L'(\mathbf{v}_2)) = (L + L')(\mathbf{v}_1) + (L + L')(\mathbf{v}_2).$$

Lisäksi

$$(L+L')(k\mathbf{v}_1) = L(k\mathbf{v}_1)+L'(k\mathbf{v}_1) = kL(\mathbf{v}_1)+kL'(\mathbf{v}_1) = k(L(\mathbf{v}_1)+L(\mathbf{v}_1')) = k(L+L')(\mathbf{v}_1).$$

Näin ollen $+$ on hyvinmääritelty laskutoimitus joukossa $L(V, W)$.

Joukossa $L(V, W)$ voidaan määritellä myös K-skalaarikertolasku $K \times L(V, W) \to L(V, W)$. Olkoon $L\colon V \to W$ lineaarinen. Määritellään $kL\colon V \to W$ kaavalla

$$(kL)(\mathbf{v}) = kL(\mathbf{v}), \mathbf{v} \in V.$$

Tarkistetaan, että tällöin kuvaus kL on myös lineaarinen. Olkoot $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, $k' \in K$. Tällöin

$$(kL)(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) = kL(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) = k(L(\mathbf{v}_1)+L(\mathbf{v}_2)) = kL(\mathbf{v}_1)+kL(\mathbf{v}_2) = (kL)(\mathbf{v}_1)+(kL)(\mathbf{v}_1).$$

Lisäksi

$$(kL)(k'\mathbf{v}_1) = kL(k'\mathbf{v}_1) = k(k'L(\mathbf{v}_1)) \overset{(i)}{=} k'(kL(\mathbf{v}_1)) = k'(kL)(\mathbf{v}_1).$$

Huomaa, että kohdassa (i) käytetään hyväksi kunnan kertolaskun vaihdannaisuutta!

Ei ole vaikeata verifioida, että laskutoimituksella $+$ ja ulkoisella laskutoimituksella $\cdot$ varustettuna $L(V, W)$ on K-vektoriavaruus. Tarkka todistus jätetään lukijalle harjoitustehtäväksi.

Propositio 2.53. *Olkoot V, W K-vektoriavaruuksia. Tällöin $(L(V, W), +, \cdot)$ on K-vektoriavaruus. Nolla-vektori on nollakuvaus $\mathbf{0}\colon V \to W$, joka on määritelty ehdolla $\mathbf{0}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$ kaikilla $\mathbf{v} \in V$. Vektorin $L \in L(V, W)$ vasta-vektori $-L$ on määritelty pisteittäin ehdolla $(-L)(\mathbf{v}) = -L(\mathbf{v})$, $\mathbf{v} \in V$.*

Huomautus: Jos kuntien sijaan tarkastellaan *vinokuntia*, joissa kertolasku ei ole välttämättä vaihdannainen, voi käydä niin, että lineaarisen kuvauksen L ”skalaaritulo” kL ei olekaan enää lineaarinen kuvaus, jolloin joukossa $L(V, W)$ ei voi määritellä skalaarikertolaskua ainakaan tällä tavalla. Palataan tähän ongelmaan kun puhutaan moduleista yleisesti.

Koska lineaariset kuvaukset ovat kuvauksia, niitä voi yhdistää silloin kuin toisen kuvauksen maalijoukko on sama kuin toisen kuvauksen lähtöjoukko. Toisin sanoen jos $L\colon V \to W$ ja $L'\colon W \to U$ ovat lineaarisia kuvauksia K-vektoriavaruuksien välillä, on olemassa yhdistetty kuvaus $L' \circ L\colon V \to U$. Osoittautuu, että yhdistetty kuvaus $L' \circ L$ on tällöin myös lineaarinen kuvaus (tämä muotoillaan viralliseksi seuraavassa lemmassa). Lineaaristen kuvausten yhdistämisen yhteydessä on tapana jättää symboli $\circ$ kirjoittamatta, eli yhdistetty kuvaus merkitään yksinkertaisesti $L'L$ ja ajatellaan ”kertolaskuna”.

Lemma 2.54. *(i) Olkoon V K-vektoriavaruus. Tällöin identtinen kuvaus* $\mathrm{id}\colon V \to V$ *on lineaarinen kuvaus.*

(ii) Olkoot V, W, U K-vektoriavaruuksia ja olkoot $L\colon V \to W$ ja $L'\colon W \to U$ lineaarisia kuvauksia. Tällöin yhdistetty kuvaus $L'L = L' \circ L$ on lineaarinen kuvaus $V \to U$.

Todistus. (i): Triviaali.
(ii): Harjoitustehtävä. □

Lineaarikuvausta $L\colon V \to W$ sanotaan *monomorfismiksi* jos se on injektio. Sitä sanotaan *epimorfismiksi* jos se on surjektio. Lineaarikuvaus on *isomorfismi* jos se on bijektio eli jos se on sekä mono-, että epimorfismi.

Koska kahden vektoriavaruuden välinen kuvaus $L\colon V \to W$ on erityisesti Abelin ryhmien $(V, +)$ ja $(W, +)$ välinen ryhmähomomorfismi, Lemmasta 1.64 saadaan suoraan seuraava tulos.

Propositio 2.55. *Olkoon $L\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus K-vektoriavaruuksien välillä. Tällöin*

(i) L on epimorfismi jos ja vain jos $\operatorname{Im} L = W$.

(ii) L on monomofirmismi jos ja vain jos $\operatorname{Ker} L = \{\mathbf{0}_V\}$.

(iii) L on isomorfismi jos ja vai jos $\operatorname{Im} L = W$ *ja* $\operatorname{Ker} L = \{\mathbf{0}_V\}$.

Jos $L\colon V \to W$ on vektoriavaruuksien välinen isomorfismi, se on erityisesti kuvauksena bijektio. Tällöin on olemassa käänteiskuvaus $L^{-1}\colon W \to V$. Ei ole vaikeata todistaa, että myös L^{-1} on lineaarinen kuvaus, erityisesti siis myös isomorfismi. Kuitataan tämä tulos viralliseksi lemmaksi, mutta jätetään (helppo) todistus lukijalle harjoitustehtävänä.

Lemma 2.56. *Olkoon $L\colon V \to W$ vektoriavaruuksien välinen isomorfismi. Tällöin $L^{-1}\colon W \to V$ on myös lineaarinen kuvaus, erityisesti se on isomorfismi.*

Seuravaksi tutkitaan tarkemmin äärellisulotteisten vektoriavaruuksien välisiä lineaarisia kuvauksia. Seuraavan Proposition mukaan lineaarinen kuvaus riittää määritellä avaruuden kannan jäsenille.

Propositio 2.57. *Olkoon V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus ja olkoon $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ sen kanta. Olkoon W mielivaltainen K-vektoriavaruus ja olkoon $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n)$ mielivaltainen jono sen alkiota, jonka pituus on $n = \dim V$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen lineaarinen kuvaus $L\colon V \to W$ siten, että kaikilla $i = 1, \ldots, n$ pätee $L(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$.*

Todistus. Vektoriavaruuden V jokainen vektori $\mathbf{v}$ voidaan esittää *yksikäsitteisellä tavalla* muodossa

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n,$$

missä $k_1, \ldots, k_n \in K$. Jos on olemassa lineaarinen kuvaus $L\colon V \to W$, jolle pätee $L(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$, tämän kuvauksen lineaarisuudesta seuraa, että

$$L(\mathbf{v}) = k_1L(\mathbf{v}_1) + k_2L(\mathbf{v}_2) + \ldots + k_nL(\mathbf{v}_n) = k_1\mathbf{w}_1 + k_2\mathbf{w}_2 + \ldots + k_n\mathbf{w}_n.$$

Tämä osoittaa sen, että kuvaus L on yksikäsitteinen. Lisäksi nähdään, että sen täytyy olla määritelty kaavalla

$$L(\mathbf{v}) = k_1\mathbf{w}_1 + k_2\mathbf{w}_2 + \ldots + k_n\mathbf{w}_n, \tag{2.58}$$

missä

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n.$$

Koska tällainen vektorin $\mathbf{v}$ esitys on aina yksikäsitteinen, kaava 2.58 määrittelee kuvauksen $L\colon V \to W$. Ainoa mitä pitää vielä verifioida on se, että tällä kaavalla määritelty kuvaus todellakin on lineaarinen kuvaus. Tämä on helppoa, mutta tylsää, joten se jätetään lukijalle harjoitustehtäväksi. □

Huomautus: Edellinen propositio on voimassa myös yleisesti eli silloin kun avaruuden kanta ei ole välttämättä äärellinen. Todistus on samantyyppinen. Tarkemmin sanottuna pätee seuraava. Olkoon V K-vektoriavaruus ja olkoon $(\mathbf{v}_i)_{i\in I}$ jokin sen kanta, joka on indeksoitu joukolla I. Olkoon W K-vektoriavaruus ja olkoon $(\mathbf{w}_i)_{i\in I}$ mielivaltainen kokoelma sen vektoreita, joka on indeksoitu samalla joukolla I. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen lineaarinen kuvaus $L\colon V \to W$ siten, että $L(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ kaikilla $i \in I$.

Seuraus 2.59. *Olkoot V, W äärellisulotteisia K-vektoriavaruuksia. Tällöin on olemassa lineaarinen isomorfismi $L\colon V \to W$ jos ja vain jos $\dim V = \dim W$.*

Erityisesti K-vektoriavaruus V on n-ulotteinen jollakin $n \in \mathbb{N}$ jos ja vain jos on olemassa isomorfismi $L\colon V \cong K^n$.

Todistus. Olkoon $L\colon V \overset{\cong}{\to} W$ isomorfismi. Olkoon $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ avaruuden V kanta, $n = \dim V$. Helposti nähdään, että isomorfismi kuvaa kannan kannaksi, näin pitääkin olla, sillä isomorfismin täytyy säilyttää kaikki algebralliset ominaisuudet molemmin puolin. Tarkka todistus sille, että jono $(L(\mathbf{e}_1), \ldots, L(\mathbf{e}_n))$ on tällöin avaruuden W kanta jätetään lukijalle. Koska avaruudelle W löytyy n-pituinen kanta, $\dim W = n = \dim V$.

Erityisesti, jos on olemassa isomorfismi $L\colon V \cong K^n$, niin $\dim V = \dim K^n = n$ (esim. 2.47, 1).

Kääntäen oletetaan, että $\dim V = \dim W = n$. Olkoon $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ jokin avaruuden V kanta ja olkoon $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$ vastaavasti jokin avaruuden W kanta. Edellisen proposition nojalla on olemassa (yksikäsitteinen) lineaarinen kuvaus $L\colon V \to W$, jolle pätee $L(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ jokaisella $i = 1, \ldots, n$. Toisaalta samalla perustelulla on olemassa lineaarinen kuvaus $L'\colon W \to V$, jolle pätee $L'(\mathbf{w}_i) = \mathbf{v}_i$ jokaisella $i = 1, \ldots, n$.

Tarkastellaan yhdistettyä kuvausta $A = L' \circ L\colon V \to V$. Väitämme, että $A = \mathrm{id}_V$ on avaruuden V identtinen kuvaus. Tämän voi osoittaa suoraan, mutta me käytämme abstraktimpaa *katagoriateoreettista* lähestymistapaa. Lemman 2.54, (ii) nojalla A on lineaarinen kuvaus. Lisäksi kaikilla $i = 1, \ldots, n$ pätee

$$A(\mathbf{v}_i) = L'L(\mathbf{v}_i) = L'(\mathbf{w}_i) = \mathbf{v}_i.$$

Toisaalta identtinen kuvaus $\mathrm{id}\colon V \to V$ on myös sellainen lineaarinen kuvaus $V \to V$, jolle pätee $\mathrm{id}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_i$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Koska $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ on avaruuden V kanta, edellisen proposition nojalla tällainen kuvaus on kuitenkin *yksikäsitteinen*. Näin ollen täytyy olla $A = \mathrm{id}_V$. Toisin sanoen pätee $L' \circ L = \mathrm{id}$.

Samalla tavalla nähdään, että myös $L \circ L' = \mathrm{id}_W$. Näin ollen L ja L' ovat toistensa käänteiskuvauksia. Erityisesti L (sekä L') on bijektiivinen lineaarinen kuvaus (koska sillä on käänteiskuvaus). Toisin sanoen L on isomorfismi. Olemme osoittaneet, että kun $\dim V = \dim W \in \mathbb{N}$, on olemassa isomorfismi $V \cong W$.

Olkoon V n-ulotteinen vektoriavaruus. Koska (esimerkki 2.34) $\dim K^n = n$, edellisen nojalla on olemassa isomorfismi $L\colon V \to K^n$ (kuten myös isomorfismi $L'\colon K^n \to V$). $\square$

Edellisen proposition voidaan ajatella ratkaisevan äärellisulotteisten avaruuksien "isomorfismiongelman" täydellisesti, sillä se antaa hyvin yksinkertaisen karakterisaation sille, milloin kaksi äärellisulotteista K-vektoriavaruutta ovat isomorfisia keskenään. Isomorfismin olemassaoloa karakterisoi täysin yksi ainoa *invariantti* eli tässä tapauksessa luonnollinen luku $n = \dim V$. Erityisesti isomorfiaa vaille on olemassa "täsmälleen yksi" n-ulottenen K-vektoriavaruus. Vektoriavaruutta K^n voidaan pitää tällaisen avaruuden "mallina".

Voidaanko tehdä tästä sellainen johtopäätös, että äärellisulotteinen lineaarialgebra olisi tämän jälkeen jotenkin "triviaali"? No, ei oikeastaan. Vektoriavaruuksien "säännöllinen" rakenne (muihin algebrallisiin struktuureihin verrattuna) kyllä tekee lineaarialgebrasta "helpon" ja kätevän, mistä syystä sillä on runsaasti sovelluksia. Tämä ei kuitenkaan tarkoittaisi, että lineaarialgebra ja sen osaaminen eivät olisi *tärkeitä*, päinvastoin. Vaikka isomorfiaongelma voidaan nyt pitää jo tässä vaiheessa äärellisulotteisille vektoriavaruuksissa ratkaistuna, niissä on vielä hyvin paljon tutkittavaa.

Lisäksi on tärkeätä pitää mielessä seuraava tosiseikka. Olkoon V n-ulotteinen vektoriavaruus kunnan K yli. Tällöin on kyllä olemassa isomorfismi $V \overset{\cong}{\to} K^n$, *mutta tämä isomorfismi ei yleensä ole yksikäsitteinen.* Itse asiassa se on yksikäsitteinen hyvin harvoin - jos $n = 0$ tai jos $n = 1$ ja lisäksi $K = \mathbb{Z}_2$ on kahden alkion kunta. Kaikissa muissa tapauksissa (eli "melkein aina") isomorfismin *valinta* eli tapa "samaistaa" V ja K^n samaksi algebralliseksi olioksi ei ole yksikäsitteinen. Toisella valinnalla saadaan toisenlainen samaistus. Joissakin tapauksessa vektoriavaruudella on olemassa "luonnollinen kanta", joka voidaan pitää *kanonisena*, mutta monille luonnollisella tavalla eteen tuleville vektoriavaruuksille sellaista ei löydy. Esimerkiksi avaruudella $\mathbb{R}^4$ on olemassa "luonnollinen samaistus" itsensä kanssa, identtinen kuvaus, mutta otetaanpa jokin $\mathbb{R}^4$:n satunnainen kaksiulotteinen aliavaruus W, joka ei ole standardin kannan alkioiden virittämä. Mikä olisi "luonnollinen" isomorfismi $W \to \mathbb{R}^2$? On selvää, että ei sellaista ole. Näin ollen, on kyllä olemassa "samaistus", eli isomorfismi W:n ja $\mathbb{R}^2$:n välillä, mutta niitä on hyvin paljon (ääretön määrä), eikä ole mitään syytä pitää toista "luonnollisempana" kun toista.

Matriisit

Olkoon V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus, jolla on kanta $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)$ ja olkoon W jokin K-vektoriavaruus. Proposition 2.57 nojalla jokainen avaruuden W vektoreista muodostettu jono $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m)$ määrittelee yksikäsitteisen lineaarisen kuvauksen $L\colon V \to W$. Tämä voidaan tulkita myös sillä tavalla, että kuvausten $L\colon V \to W$ joukko voidaan samastaa kaikkien n-pituisten jonojen $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m)$, $\mathbf{w}_i \in W$, muodostaman joukon eli joukon W^n kanssa. Tähän näkökulmaan palataan suorien summien yhteydessä myöhemmin.

Oletetaan, että edellisessä kappaleessa tarkastellussa tilanteessa avaruus W on myös äärellisulotteinen, $\dim W = n$ (huom., yleisesti ottaen $n \neq m$). Olkoon $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$ jokin sen kanta. Olkoon $L\colon W \to V$ lineaarinen kuvaus. Koska $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$ on W:n kanta, jokaisella $j = 1, \ldots, n$ on olemassa yksikäsitteinen esitys muotoa

$$L(\mathbf{v}_j) = a_{1j}\mathbf{w}_1 + a_{2j}\mathbf{w}_2 + \ldots + a_{mj}\mathbf{w}_m = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{w}_i,$$

missä $k_{ij} \in K$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Propositiosta 2.57 seuraa, että skalaarikunnan K alkioista muodostettu *tuplasti indeksoitu perhe* $(a_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m}$ määrää kuvauksen L yksikäsitteisesti. Yleensä tämä perhe kirjoitetaan taulukkona eli **matriisina**, jolla on n riviä ja m saraketta, eli muodossa

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Tällaista matriisia sanotaan kuvauksen L *matriisiksi kantojen* $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)$ *ja* $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$ *suhteen.*

Huomaa, miten kannan käsittely järjestettynä **jonona** on olennaista tässä yhteydessä.

Määritellään K-kertoimisen matriisin käsite yleisesti. Merkitään yksinkertaisuuden vuoksi jokaisella $m \in \mathbb{N}$ symbolilla $[m]$ äärellistä indeksijoukkoa $\{1, \ldots, m\}$.

Määritelmä 2.60. *Olkoon K-kunta ja olkoot $m, n \in \mathbb{N}$. K-kertoiminen $(n \times m)$-matriisi on mikä tahansa joukolla $[n] \times [m]$ indeksoitu perhe $A = (a_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m}$, missä $a_{ij} \in K$ kaikilla $i \in [n], j \in [m]$. Toisin sanoen formaalisti matriisi on kuvaus $[n] \times [m] \to K$, joka kuvaa parin (i, j) alkioksi a_{ij}.*

Matriisi $(a_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m}$ esitetään käytännössä yleensä taulukkona

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

jolla on n riviä ja m saraketta. Alkio a_{ij} on tällöin se taulukon yksikäsitteinen alkio, joka sijaitsee rivillä i ja sarakkeessa j. Alkioita a_{ij} sanotaan matriisin $A = (a_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m}$ kertoimiksi tai yksinkertaisesti sen alkioiksi. Matriisin koolla tarkoitetaan lauseketta $(n \times m)$.

Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

K-kertoiminen matriisi. Symbolilla $r_i(A)$ merkitsemme matriisin A riviä, jonka järjestysluku (ylhäältä laskettuna) on i. Vastavaasti symbolilla $c_j(A)$ merkitsemme matriisin A saraketta, jonka järjestysluku (vasemmalta laskettuna) on j. Rivi $r_i(A)$, $i = 1, \ldots, n$ voidaan tulkita vektoriavaruuden K^m alkiona eli jonona

$$r_i(A) = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}).$$

Tällaisen tulkinnan yhteydessä puhutaan myös ”*vaakavektorista*” $r_i(A)$.

Samoin tulkitsemme jatkossa tarvittaessa jokaisen matriisin sarakkeen

$$c_j(A) = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}), j = 1, \ldots, m$$

vektoriavaruuden K^n alkiona. Saraketta voidaan sanoa myös ”*pystyvektoriksi*”.

Huomautus: Kirjallisuudessa usein merkitään matriisin A rivejä symboleilla A_i (alaindeksi) ja sarakkeita symboleilla A^j (yläindeksi). Kuitenkin ainakin yläindeksien käyttö on ongelmallista, koska samalla symbolilla A^j merkitään myös matriisin *potensseja* (kun ne ovat määriteltyjä) matriisien kertolaskun suhteen. Tästä syystä tällä kursilla käytämme toisenlaisia merkintätapoja.

Matriisia, jolla on sama määrä riveja ja sarakkeita, eli $(n \times n)$-matriisia sanotaan (ilmeisestä syystä) *neliömatriisiksi.*

Olkoot $m, n \in \mathbb{N}$ ja olkoon K kunta. Kaikkien $(n \times m)$-matriisien joukkoa merkitään jatkossa $M(n \times m; K)$. Tässä joukossa voidaan määritellä luonnollinen K-vektoriavaruuden struktuuri, jonka laskutoimitukset ovat määriteltyjä ”komponenteittain”. Toisin sanoen olkoot $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ ja $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ molemmat $(n \times m)$-kokoisia K-kertoimisia matriiseja. Tällöin niiden summa $A + B$ määritellään olevan K-kertoiminen $(n \times m)$-matriisi $(a_{ij} + b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \ldots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \ldots & a_{2m} + b_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \ldots & a_{nm} + b_{nm} \end{bmatrix}.$$

Vastaavasti, jos $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ on $(n \times m)$-kokoinen K-kertoiminen matriisi ja $k \in K$ on skalaari, määritellään K-kertoiminen $(n \times m)$-matriisi kA matriisina $(ka_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$,

$$k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \ldots & ka_{1m} \\ ka_{21} & ka_{22} & \ldots & ka_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \ldots & ka_{nm} \end{bmatrix}.$$

Ei ole vaikeata tarkistaa, että näin määritellyt laskutoimitukset todellakin määrittelevät joukossa $M(n \times m; K)$ K-vektoriavaruuden struktuurin. Itse asiassa, koska matriisi on formaalisti kuvaus $[n] \times [m] \to K$, vektoriavaruus $M(n \times m; K)$ ei ole mitään muuta kuin esimerkissä 2.4, 2 esitetyn funktioavaruuden K^X erikoistapaus, jossa asetetaan $X = [n] \times [m]$.

Lemma 2.61. *$(M(n \times m; K), +, \cdot)$ on K-vektoriavaruus.*

Lemma 2.62. *K-vektoriavaruus $(M(n\times m; K), +, \cdot)$ on isomorfinen K-vektoriavaruuden K^{nm} kanssa. Erityisesti $M(n \times m; K)$ on (nm)-ulotteinen K-vektoriavaruus.*

Todistus. Määritellään kuvaus $L\colon M(n \times m; K) \to K^{nm}$ seuraavasti. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

K-kertoiminen $n \times m$-matriisi. Asetetaan vektoriksi $L(A) \in K^{nm}$ jono

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2m}, a_{31}, ..., a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nm}),$$

missä siis ensin esiintyvät ensimmäisen rivin alkiot, sitten toisen rivin alkiot ja niin edelleen.
Helposti nähdään, että näin saatu kuvaus $L\colon M(n \times m; K) \to K^{nm}$ on lineaarinen isomorfismi. Viimeinen väite seuraa sitä, että $\dim_K K^{nm} = nm$ □

Erikoistapauksissa $n = 0$ tai $m = 0$ indeksien joukko $[n] \times [m]$ on tyhjä, joten tällöin matriisi on kuvaus tyhjältä joukolta kunnalle K. Tällaisia kuvauksia on olemassa tasan yksi (tämän tarkka perustelu vaatisi kuvauksen formaalia joukko-opillista määritelmää eräänä relaationa). Näin ollen, tällä tavalla tulkittuna avaruuden $M(n \times m; K)$ täytyy olla triviaali yhden alkion nollaultotteinen vektoriavaruus kun $n = 0$ tai $m = 0$. Tämä tulkinta on täysin sopusoinnissa edellisen lemman tuloksen kanssa.

Edellisen lemman todistuksessa olemme konstruoineet isomofismin
$L\colon M(n \times m; K) \xrightarrow{\cong} K^{nm}$. Koska avaruudella K^{nm} on standardikanta $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{nm})$ (kts. esim. 2.34), K-vektoriavarudella $M(n \times m; K)$ on olemassa sitä vastaava (kuvauksen L suhteen) *kanoninen* kanta $(E_{ij})_{i=1,\dots,n, j=1,\dots,m}$, josta käytämme jatkossa myös nimitystä *standardikanta*. Tässä E_{ij} on sellainen matriisi, jonka (i, j)-alkio on 1_K ja muut alkiot ovat nolla-alkiota. Matriisi E_{ij} voidaan myös kirjoittaa ns. *Kroneckerin deltanotaation* δ_{ij} avulla muodossa $E_{ij} = (\delta_{ij})$.

Lineaarisen kuvauksen matriisi

Olkoot V ja W äärellisulotteiset K-vektoriavaruudet. Olkoon $E = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ avaruuden V kanta ja olkoon $F = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ avaruuden W kanta. Olkoon $L\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus. Tällöin *kuvauksen L matriisi kantojen E ja F suhteen* on matriisi

$$[L]_{F,E} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

jonka kertoimet $a_{ij} \in K$ määräytyvät (yksikäsitteisesti) yhtälöistä

$$L(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{w}_j, \; j = 1, \dots, m.$$

Toisin sanoen matriisin $A = [L]_{F,E}$ j:nnes sarake $c_j(A)$ saadaan laitamalla siihen V:n kannan alkion $\mathbf{v}_j$ kuvan $L(\mathbf{v}_j)$ *koordinaatit* W:n kannan F suhteen. Huomaa kantojen järjestys merkinnässä $[L]_{F,E}$. Siinä alaindeksissä ensimmäisenä tulee *maaliavaruuden* W kanta, toisena *lähtövaruuden* V kanta. Syy tällaiseen notaatioon selviää kohta, kun puhumme yhdistettyjen kuvausten matriiseista. Huomaa myös, että kun $\dim V = m$ ja $\dim W = n$, kuvauksen $L\colon V \to W$ matriisi on nimenomaan $(n \times m)$-kokoinen, eli tässäkin maaliavaruuden dimensio tulee ensimmäisenä, sillä se vastaa matriisin rivien lukumäärää.

Esimerkki 2.63. *Kolmeulotteisen $\mathbb{R}$-vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ standardikanta on* $E = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$. *Lauseen 2.57 mukaan on olemassa* tasan yksi $\mathbb{R}$-*lineaarinen kuvaus* $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *jolle pätee*

$$L(1,0,0) = (1,-1),$$

$$L(0,1,0) = (1,0),$$
$$L(0,0,1) = (0,2).$$

Olkoon $F = ((1,0),(0,1))$ *avaruuden* $\mathbb{R}^2$ *standardikanta. Tällöin esimerkiksi*

$$L(1,0,0) = (1,-1) = 1\cdot(1,0) + (-1)\cdot(0,1),$$

joten kuvauksen L matriisi $[L]_{F,E}$ standardikantojen suhteen on (2×3)-*matriisi*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Johdetaan kuvaukselle L kaava. Olkoon $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *mielivaltainen. Tällöin*

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1),$$

joten

$$L(x,y,z) = x(1,-1) + y(1,0) + z(0,2) = (x+y, 2z-x).$$

Olkoon $E' = ((1,0,-1),(1,1,1),(1,0,0))$ *ja* $F' = ((1,-1),(0,2))$. *Tällöin E' on avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta ja F' avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta (tämän verifikaatio jätetään lukijalle harjoitustehtäväksi). Nyt*

$$L(1,0,-1) = (1,-3) = 1\cdot(1,-1) + (-1)\cdot(0,2),$$

$$L(1,1,1) = (2,1) = 2\cdot(1,-1) + \frac{3}{2}\cdot(0,2)$$
$$L(1,0,0) = (1,-1) = 1\cdot(1,-1) + 0\cdot(0,2),$$

joten kuvauksen L matriisi kantojen F' ja E' suhteen on

$$[L]_{F',E'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Propositiosta 2.57 seuraa helposti seuraava väite.

Propositio 2.64. *Olkoot V ja W äärellisulotteiset K-vektoriavaruuksia. $E = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ avaruuden V kanta ja olkoon $E' = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ avaruuden W kanta. Tällöin kuvaus $\Phi_{E',E}\colon L(V,W) \to M(n \times m; K)$, $\Phi_{E',E}(L) = [L]_{E',E}$ on lineaarinen* isomorfismi.

Erityisesti $L(V,W)$ on (mn)-ulotteinen K-vektoriavaruus, kun $\dim V = m$ ja $\dim W = n$.

Todistus. Olkoot $L, L' \in L(V,W)$ ja olkoon $k \in K$. Olkoot $[L]_{E',E} = (a_{ij})$ ja $[L']_{E',E} = (b_{ij})$. Tämä tarkoittaa sitä, että kaikilla $j = 1, \dots, n$ pätee

$$L(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{w}_i, \text{ ja}$$

$$L'(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\mathbf{w}_i.$$

Tästä seuraa, että jokaisella $j = 1, \dots, n$

$$(L + L')(\mathbf{v}_j) = (\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{w}_i) + (\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\mathbf{w}_i) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ij} + b_{ij})\mathbf{w}_i.$$

Matriisien yhteenlaskun määritelmän nojalla tästä voidaan päätellä, että

$$\Phi_{E',E}(L + L') = [L + L']_{E',E} = [L]_{E',E} + [L']_{E',E} = \Phi_{E',E}(L) + \Phi_{E',E}(L').$$

Samalla tavalla voidaan osoittaa, että

$$\Phi_{E',E}(kL) = k[L]_{E',E} = k\Phi_{E',E}(L).$$

Näin ollen $\Phi_{E',E}$ on lineaarinen.

Osoitetaan, että $\Phi_{E',E}$ on surjektio. Oletetaan, että $A = (a_{ij}) \in M(n \times m; K)$ on K-kertoiminen $(n \times m)$-matriisi. Proposition 2.57 nojalla on olemassa (yksikäsitteinen) lineaarinen kuvaus $L\colon V \to W$, jolle pätee jokaisella $j = 1, \dots, n$

$$L(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{w}_i.$$

Tällöin määritelmän mukaan pätee $\Phi_{E',E}(L) = A$. Näin ollen $\Phi_{E',E}$ on surjektio.

Osoitetaan, että Φ on injektio. Oletetaan, että $\Phi_{E',E}(L) = \Phi_{E',E}(L')$ joillekin lineaarisille kuvauksille $L, L'\colon V \to W$. Tällöin kuvauksen $\Phi_{E',E}$ määritelmän nojalla jokaisella $j = 1, \dots, m$ pätee $L(\mathbf{v}_j) = L'(\mathbf{v}_j)$. Propositiosta 2.57 (yksikäsitteisyys) seuraa tällöin, että $L = L'$. Näin ollen $\Phi_{E',E}$ on injektio.

Olemme todistaneet, että vektoriavaruudet $L(V,W)$ ja $M(n \times m; K)$ ovat isomorfisia. Lemman 2.62 nojalla viimeksi mainittu on isomorfinen aliavaruuden K^{nm} kanssa ja erityisesti on nm-ulotteinen. Näin ollen myös avaruus $L(V,W)$ on nm-ulotteinen. $\square$

Edellinen propositio sanoo siis sen, että äärellisulotteisten vektoriavaruuksien V, W tapauksessa voimme samaistaa lineaariset kuvaukset $V \to W$ ja $(n \times m)$-kokoiset matriisit, missä $m = \dim W$ ja $n = \dim V$. Tämä on hyvin hyödyllinen näkökulma käytännössä - usein kannattakina ajatella lineaarista kuvausta ja sitä vastaavaa matriisia "samana oliona", kahtena eri tapana käsitellä ja kuvata "sama objekti". Riippuen tilanteesta joskus on kätevämpää ajatella tämä objekti lineaarisena kuvauksena, joskus taas matriisina. Näemme jatkossa paljon esimerkkejä tästä periaatteesta.

Täytyy kuitenkin ehdottomasti muistaa, että tämä vastaavuus lineaaristen kuvausten ja matriisien välillä **riippuu avaruuksien kantojen valinnasta**! Toisin sanoen se ei ole koskaan absoluuttinen ja ennalta kiinnitetty. Vaihtamalla kannat saadaan samalle lineaariselle kuvaukselle erilainen matriisiesitys.

Esimerkiksi olemme aikaisemmin konstruoineet matriisiavaruudelle $M(n \times m; K)$ "standardikannan" E_{ij}, missä matriisin E_{ij} (i, j)-alkio on skalaarikunnan ykkösalkio 1_K ja muut alkiot ovat nollia. Käytämällä hyväksi sitä, että edellisessä propositiossa käsitelty kuvaus $\Phi_{E',E} \colon L(V, W) \colon M(n \times m; K)$ on isomorfismi, voidaan nyt konstuoida sen avulla myös eräs konkrettinen kanta avaruudelle $L(V, W)$.

Olkoon $E = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)$ vektoriavaruuden V kanta ja olkoon $E' = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$ vektoriavaruuden W kanta. Kaikilla $i = 1, \ldots, n$ ja $j = 1, \ldots, m$ Lemman 2.57 nojalla on olemassa yksikäsitteinen lineaarinen kuvaus $\varepsilon_i^j \colon V \to W$ jolle pätee $\varepsilon_i^j(\mathbf{v}_j) = \mathbf{w}_i$ ja $\varepsilon_i^j(\mathbf{v}_l) = \mathbf{0}_W$ kaikilla $l \neq j$. Tällöin

$$\Phi_{E,E'} = [\varepsilon_i^j]_{E',E} = E_{ij}.$$

Koska kuvaus $\Phi_{E',E}$ on vektoriavaruuksien välinen isomorfismi ja matriisit $(E_{ij})_{i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,m}$ muodostavat matriisiavaruuden $M(n \times m; K)$ kannan, tästä saadaan heti seuraava tulos.

Seuraus 2.65. *Olkoon $E = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)$ K-vektoriavaruuden V kanta ja olkoon $E' = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$ K-vektoriavaruuden W kanta. Tällöin*

$$\{\varepsilon_i^j \mid i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m\}.$$

on vektoriavaruuden $L(V, W)$ kanta.

Pannaan erityisesti merkille, että edellisessä tuloksessa kanta $\{\varepsilon_i^j\}$ riippuu avaruuksien V ja W kantojen valinnasta.

Huomautus: Yleensä vektoriavaruuden alkioita on tapana merkitä lihavoidulla fontilla ja noudattamme tätä sopimusta tässä materiaalissa. Kuitenkin lineaariset kuvaukset ja matriisit muodostavat poikkeuksen tästä säännöstä. Vaikka lineaariset kuvaukset ja matriisit ovat tietynlaisten vektoriavaruuksien alkioita, emme kuitenkaan yleensä merkitä niitä lihavoidulla fontilla.

Yksikkömatriisi

Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Me tiedämme, että on olemassa ainakin yksi n-ulotteinen K-vektoriavaruus V, esimerkiksi K^n on tällainen vektoriavaruus. Kiinnitetään jokin tällaisen avaruuden V kanta E (esimerkiksi avaruuden K^n standardikanta). Identtinen kuvaus $\mathrm{id}_V \colon V \to V$

on aina lineaarinen kuvaus. Helposti nähdään, että tämän kuvauksen matriisi $[\mathrm{id}_V]_{E,E}$ (huom., sama kanta molemmilla puolella!) on niin sanottu **yksikkö-matriisi** $I_n = (\delta_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in M(n \times n; K)$ eli sellainen $n \times n$-kokoinen neliömatriisi, jonka kertoimet ovat määriteltyjä ehdoilla

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1_K, & i = j, \\ 0_K, & i \neq j. \end{cases}$$

Tässä δ_{ij} on Kroneckerin deltafunktio. $(n \times n)$-kokoisen neliömatriisin **(pää)diagonaali** koostuu sen muotoa a_{ii} olevista alkioista, $i = 1, \dots, n$. Näitä alkioita sanotaan myös *(pää)diagonaalialkioiksi*. Yksikkömatriisi on siis sellainen matriisi, jonka jonkainen diagonaalialkio on kunnan K ykkösalkio ja muut alkiot ovat kunnan nolla-alkioita.

Algebrat ja matriisien kertolasku

Palautetaan mieleen, että lineaaristen kuvausten $L \colon V \to W$ ja $L' \colon W \to U$ yhdiste $L'L = L' \circ L \colon V \to U$ on myös lineaarinen kuvaus (Lemma 2.54). Kiinteillä K-vektoriavaruuksilla V, W, U lineaaristen kuvausten yhdistämisoperaatio määrittelee kuvauksen $\circ \colon L(W,U) \times L(V,W) \to L(V,U)$, $(L', L) \mapsto L'L$.

Lineaaristen kuvausten yhdistämisoperaatio noudattaa lukuisia tärkeitä algebrallisia ehtoja (kts. yhtälöitä 2.66-2.71 alla). Tästä syystä se voidaan tulkita jonkinlaisena ”kertolaskuna”, joka määrittää alkioiden L, L' ”tuloa” $L'L$ (tässä järjestyksessä). Täytyy kuitenkin ymmärtää, että yleisesti ottaen tämä operaatio ei ole laskutoimitus missään joukossa eikä edes vasemman- (tai oikean-)puoleinen ulkoinen laskutoimitus, sillä jos V, W, U ovat eri avaruuksia joukot $L(V,W), L(W,U), L(V,U)$ ovat eri joukkoja. Tämän ”kertolaskun” voidaan ajatella edustavan hyvin yleistä ”laskutoimituksen” tyyppiä, jota emme formalisoi tällä kurssilla sen tarkemmin.

Katsotaan tarkemmin mistä algebrallisista ominaisuuksista on kyse.
Olkoot $L, L_1, L_2 \colon V \to W$, $L', L'_1, L'_2 \colon W \to U$ lineaarisia kuvauksia K-vektoriavaruuksien V, W, U välillä. Olkoot $k, k' \in K$. Tällöin seuraavat yhtälöt pitävät paikkansa.

(2.66) $$L'(L_1 + L_2) = L'L_1 + L'L_2$$

(kuvausten yhdistämisen ”vasemmanpuoleinen osittelulaki”),

(2.67) $$(L'_1 + L'_2)L = L'_1 L + L'_2 L$$

(kuvausten yhdistämisen ”oikeanpuoleinen osittelulaki”),

(2.68) $$k(L'L) = (kL')L = L'(kL).$$

Kun $L'' \colon U \to Z$ on myös lineaarinen kuvaus (missä Z on myös K-vektoriavaruus) pätee myös

(2.69) $(L''L')L = L''(L'L)$ (kuvausten yhdistämisen ”liitännäisyys”).

Olkoon $\mathrm{id}_V \colon V \to V$ identtinen kuvaus (joka on lineaarinen). Tällöin

(2.70) $L' \,\mathrm{id}_V = L'$ (identtinen kuvaus on ”oikeanpuoleinen neutraalialkio”).

Vastaavasti identtiselle kuvauselle $\mathrm{id}_W \colon W \to W$ pätee

$$\mathrm{id}_W\, L = L \text{ (identtinen kuvaus on "vasemmanpuoleinen neutraalialkio").} \tag{2.71}$$

Yhtälöiden (2.66)-(2.71) tarkka todistus jätetään lukijalle mietittäväksi. Ominaisuus (2.69) ei ole mitään muuta kuin kuvausten yhdistämisen "tavallinen" liitännäisyys-ominaisuus, joka on voimassa aina, lineaarisuudella ei ole mitään merkitystä sen kannalta. Myös ominaisuudet (2.70) ja (2.71) ilmaisevat yleisluontaisia, universaaleja identtisen kuvauksen ominaisuuksia. Oikeanpuoleinen osittelulaki (2.67) on voimassa kaikille kuvauksille, mutta vasemmanpuoleisessa (2.66) tarvitaan kuvausten lineaarisuutta, samoin yhtälössä (2.68), joka kytkee yhteen skalaarikertolaskun ja kuvausten yhdistämisen "kertolaskun".

Algebrat

Kun valitaan yllä $V = W = U = Z$ yllä, eli kun käsitellään lineaarisia endomorfismeja $L \colon V \to V$, kuvausten yhdistämisoperaatiosta tulee kuvaus $\circ \colon L(V) \times L(V) \to L(V)$ eli siis **laskutoimitus** joukossa $L(V)$. Tässä joukossa on tähän mennessä määritelty K-vektoriavaruuden struktuuri. Lisäksi edellisestä seuraa, että joukossa $L(V)$ on määritelty myös liitännäinen "kertolasku"-laskutoimitus, joka toteuttaa lisäksi ehdot (2.66)-2.71). Näistä ehdot (2.66), (2.67) tarkoittavat sitä, että tämä kertolasku on ositteleva vektoriavaruuden $L(V)$ yhteenlaskun suhteen. Ehto (2.69) tarkoittaa, että kertolasku $\circ$ on liitännäinen ja ehdot (2.70-2.71) ilmaisevat tasan sitä, että tällä kertolaskulla on olemassa neutraalialkio id_V. Toisin sanoen nämä ehdot sekä vektoriavaruuden $L(V)$ neljä ensimmäistä ehtoa yhdessä ilmaisevat sen, että kolmikko $(L(V), +, \circ)$ on rengas. Ehto (2.69) kytkee tämän renkaan kertolasku ja vektoriavaruuden $L(V)$ skalaarikertolasku yhteen.

Tämän tyyppisiä algebrallisia olioita sanotaan **algebroiksi**[2]. Annetaan tälle uudelle käsitteelle virallinen määritelmä.

Määritelmä 2.72. *Olkoon K Kunta. K-*algebra *on systeemi $(A, +, \cdot, \odot)$, missä $(A, +, \cdot)$ on K-vektoriavaruus ja $(A, +, \odot)$ on rengas ja lisäksi kaikilla $k \in K$ ja kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in A$ pätee*

$$(k\mathbf{v}) \odot \mathbf{w} = k(\mathbf{v} \odot \mathbf{w}) = \mathbf{v} \odot (k\mathbf{w}). \tag{2.73}$$

Algebraa voidaan siis ajatella renkaan ja vektoriavaruuden luonnollisena yhdistelmänä eli havainnollisesti "vektoriavaruutena, jonka alkioita voi myös kertoa keskenään". Näillä renkailla ja vektoriavaruuksilla on sama yhteenlasku-operaatio. Ehto 2.73 algebran määritelmässä on ainoa ehto, joka sitoaa vektoriavaruuden skalaarikertolaskun ja renkaan kertolaskun yhteen. Algebran laskutoimitusta $\odot$ (vastaavan renkaan kertolasku) sanotaan yleensä kyseisen algebran *kertolaskuksi.* Formaalissa määritelmässä yllä sille oli pakko käyttää erilaista merkintää, kuin skalaarikertolaskulle $\cdot$, mutta käytännössä algebran kertolasku ja skalarikertolasku merkitään täsmälleen samalla tavalla *multiplikatiivisesti* eli kirjoitetaan lausekkeen $a \odot b$ sijaan yksinkertaisesti ab. Koska algebran kertolasku ja skaarikertolasku ovat määriteltyjä erityyppisille pareille - skalaarikertolaskussa kerrotaan algebran alkio skalaarilla vasemmalta, kun taas kertolaskussa kaksi algebran alkiota kerrotaan keskenään - tällainen "tuplanotaatio" ei yleensä tuota ongelmia käytännössä.

[2]Sana "algebra" siis ei tarkoita ainoastaan matematiikan alaa, joka tutkii abstrakteja algebrallisia struktuureja, mutta myös erästä esimerkkiä tällaisesta algebrallisesta struktuurista! Nämä kaksi sanan "algebra" merkitystä täytyy osata erota toisistaan asiayhteydessä.

Algebran kertolaskun ei tarvitse olla kommutatiivinen. Algebraa, joka on renkaana vaihdannainen, sanotaan vaihdannaiseksi algebraksi. Koska $(A, +, \odot)$ on rengas, algebralla A on olemassa kertolaskun neutraalialkio, *algebran ykkösalkio* 1_A. Kirjallisuudessa tarkastellaan usein yleisempiä algebroja, joissa esimerkiksi ei oleteta ykkösalkion olemassaoloa tai edes kertolaskun liitännäisyyttä, mutta tällä kurssilla tarkoitamme algebralla määritelmän 2.72 toteuttavaa otusta.

Kahden K-algebran A, A' välinen *algebrahomomorfismi* $f\colon A \to A'$ on sellainen kuvaus, joka on sekä lineaarinen kuvaus algebrojen A, A' K-vektoriavaruuksien struktuurien suhteen, että myös rengashomomorfismi niiden rengasstrukturien suhteen. Huomaa, että algebrahomomorfismi kuvaa erityisesti algebran A ykkösalkion algebran A' ykkösalkiolle.

Bijektiivista algebrahomomorfismia sanotaan algebojen väliseksi isomorfismiksi. Tällöin sen käänteiskuvaus on myös algebraisomorfismi.

Algebran A *alialgebra* B on sellainen algebran A osajoukko, joka on sekä sen aliavaruus A:n K-vektoriavaruuden struktuurin suhteen, että alirengas A:n renkaan struktuurin suhteen.

Esimerkkejä 2.74. *(1) Olkoon V $K-$vektoriavaruus. Tällöin lineaaristen endomorfismisien $L\colon V \to V$ muodostama K-vektoriavaruus $L(V)$ on varustettu kuvausten yhdistämisoperaatiolla $(L', L) \mapsto L'L$. Yhtälöistä (2.66)-(2.71) yllä seuraa, että tällä laskutoimituksella varustettuna $L(V)$ on K-algebra. Tämän algebran ykkösalkio on identtinen kuvaus $\mathrm{id}_V\colon V \to V$. Tämä algebra* ei yleensä ole *kommutatiivinen, sillä kuvausten yhdistäminen ei ole yleisesti ottaen kommutatiivinen (mieti esimerkkiä kahdesta lineaarisesta kuvauksesta $L, L'\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ joille $L'L \neq LL'$). Algebran $L(V)$ alkio eli lineaarinen kuvaus $L\colon V \to V$ on* kääntyvä *tämän algebran kertolaskun suhteen jos ja vain jos se on kuvauksena bijektio eli jos ja vain jos se on isomorfismi. Tällöin sen käänteisalkio on käänteiskuvaus $L^{-1}\colon V \to V$ (joka on lineaarinen Lemman 2.56 nojalla).*

(2) Olkoon K kunta ja olkoon $n \in \mathbb{N}$. n-ulotteisessa K-vektoriavaruudessa K^n voidaan määritellä kertolasku $K^n \times K^n \to K^n$ luonnollisella tavalla kunnan K kertolaskun avulla eli pisteittäin*, toisin sanoen kaavalla*

$$(k_1, k_2, \dots, k_n) \cdot (k_1', k_2', \dots, k_n') = (k_1k_1', k_2k_2', \dots, k_nk_n').$$

Ei ole vaiketa tarkistaa, että K^n muodostaa vaihdannaisen K-algebran, jos se varustetaan lisäksi tällä kertolaskulla (HT). Huomaa, että ehdon (2.73) verifioinnissa tarvitaan kunnan K kertolaskun vaihdannaisuutta.

Tämän algebran neutraalialkio on alkio $(1_K, 1_K, \dots, 1_K)$. Alkio $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ on kääntyvä jos ja vain jos $k_i \neq 0_K$ kaikilla $i = 1, \dots, n$.

(3) Edellisen esimerkin nojalla erityisesti kaksiulotteisessa $\mathbb{R}$-vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^2$ on olemassa $\mathbb{R}$-algebran struktuuri. Tässä algebrassa kertolasku on reaalilukujen tavallinen kertolasku komponeitteitain,

$$(x, y)(x', y') = (xx', yy').$$

Tämä algebra ei ole renkaana kunta, sillä esimerkiksi nolasta eroavalla alkiolla $(1,0)$ *ei ole käänteisalkiota tässä algebrassa. Annetaan toinen esimerkki* $\mathbb{R}$*-algebran struktuurista avaruudessa* $\mathbb{R}^2$*, joka on renkaana kunta.*

Teidetään, että kompleksilukujen joukko $\mathbb{C}$ *muodostaa renkaan* $(\mathbb{C},+,\cdot)$ *(tässä* $\cdot$ *on kompleksilukujen kertolasku). Toisaalta, koska* $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$*, kompleksilukujen joukko voidaan myös tulkita* $\mathbb{R}$*-vektoriavarudeksi* $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ *(tässä* $\cdot$ *on skalaarikertolasku* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$*). Vertaamalla määritelmiä nähdään, että molemmissa struktuureissa on sama yhteenlasku. Lisäksi* $\mathbb{R}$*-skalaarikertolasku vektoriavaruudessa* $\mathbb{R}^2$ *ei ole mitään muuta kuin kompleksilukujen kertolaskun rajoittuma erikoistapaukseen, jossa ensimmäinen tulon tekijä on reaaliluku (eli meidän sopimuksen mukaan, muotoa* $(x,0)$ *oleva kompleksiluku). Koska kompleksilukujen kertolasku on vaihdannainen ja liitännäinen, kaikilla* $r\in\mathbb{R}$ *("skalaari") ja kaikilla kompleksiluvuilla* z,w *pätee*

$$r(zw)=(rz)w=z(rw).$$

Näin ollen kompleksilukujen kunta $\mathbb{C}$ *on* $\mathbb{R}$*-algebra. Se on esimerkki kaksiulotteisesta* $\mathbb{R}$*-algebrasta, joka on lisäksi renkaana kunta. Tällaisia algebroita sanotaan myös* jakoalgebroiksi *(engl.* division algebra*).*

(4) *Edellisen esimerkin valossa nousee luonnolliseksi kysymys siitä, onko muissa äärellisulotteisissa* $\mathbb{R}$*-vektoriavaruuksissa* $\mathbb{R}^n$ *mahdollista määritellä* $\mathbb{R}$*-jakoagebran struktuuri. Osoittautuu, että tämä on mahdollista jos ja vain jos* $n=1,2,4$*. Tämä tulos tunnetaan nimellä* Frobeniuksen Lause*. Lisäksi kaikissa näissä tapauksissa jakoalgebran struktuuri on isomorfiaa vaille yksikäsitteinen. Kun* $n=1$ *kyseessä on tavallinen kunnan* $\mathbb{R}$*-struktuuri, jossa skalaarikertolasku ja renkaan kertolasku ovat täsmälleen samoja laskutoimituksia. Kun* $n=2$ *saadaan kompleksilukujen algebra* $\mathbb{C}$*. Esitetään pintapuoleisesti viimeinen tapaus, eli neliulotteinen* $\mathbb{R}$*-jakoalgebra* $\mathbb{H}$*, joka tunnetaan paremmin nimellä* kvaternioiden algebra.

Kvaternioiden lähtökohta on samantyyppinen kuin kompleksilukujen kohdalla - kvaternio on muotoa $a+bi+cj+dk$ *oleva "luku", jossa* a,b,c,d *ovat reaalilukuja ja* i*,* j*,* k *ovat toisistaan riippumattomia "imaginääriyksikköjä" eli niille pätee*

$$i^2=j^2=k^2=-1.$$

Lisäksi määritellään $ij=-ji=k$*,* $ik=-ki=-j$*,* $jk=-kj=i$*. Näistä voidaan johtaa yksikäsitteisellä tavalla kaava kvaternioiden kertolasku-operaatiolle, olettamalla, että lopputuloksena on* $\mathbb{R}$*-algebra. Formaalisti kvaternio* $a+bi+cj+dk$ *voidaan ajatella avaruuden* $\mathbb{R}^4$ *alkioina* (a,b,c,d)*, jolloin esimerkiksi* $i=(0,1,0,0)$*,* $j=(0,0,1,0)$ *jne. Tarkka konstruktio sekä kvaternioiden algebran ominaisuuksien verifioiminen suoritetaan kurssin harjoitustehtävien yhteydessä. Kvaternioiden algebra ei ole vaihdannainen, minkä näkee jo siitä, että* $ij\neq ji$*.*

Ulottuvuudessa $n=8$ *on mahdollista konstruoida 8-ulotteinen niin sanottu* oktonioiden jakoalgebra $\mathbb{R}$*:n yli, mutta tämä ei ole enää algebra meidän määritelmän mukaan - sen kertolasku ei ole liitännäinen.*

(5) *Olkoon X joukko. Kuvausten $f\colon X \to K$ muodostamassa vektoriavaruudessa K^X (kts. esimerkki 2.4, (2)) voidaan tarkastella "pisteittäistä" kertolasku-operaatiota, joka on määritelty kaavalla*

$$(fg)x = f(x)g(x).$$

Tässä $f, g \in K^X$, $x \in X$ ja kertolasku oikealla puolella on kunnan K kertolasku. Helposti nähdään, että K^X muodostaa K-algebran tällä kertolaskulla varustettuna (tarkistus harjoitustehtävänä).

Yhdistettyjen kuvausten matriisi ja matriisien kertolasku

Tutkimme seuraavaksi voidaanko yhdistetyn kuvauksen $L' \circ L$ matriisi esittää kuvausten L', L matriisien avulla ja jos voi, niin millä tavalla.

Olkoot V, W, U äärellisulotteisia K-vektoriavaruuksia. Olkoon $E = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ avaruuden V kanta, olkoon $F = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ avaruuden W kanta, ja olkoon $G = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)$ avaruuden U kanta. Olkoot $L\colon V \to W$ ja $L'\colon W \to U$ lineaarisia kuvauksia. Tällöin voidaan muodostaa matriisit

$$[L]_{F,E} = B = (b_{jk})_{1 \le j \le m, 1 \le k \le n}$$

ja

$$[L']_{G,F} = A = (a_{ij})_{1 \le i \le p, 1 \le j \le m}.$$

Näiden matriisien kertoimet saadaan yhtälöistä

$$L(\mathbf{v}_k) = \sum_{j=1}^{m} b_{jk}\mathbf{w}_j, \ \ k = 1, \dots, n$$

ja

$$L'(\mathbf{w}_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij}\mathbf{u}_i, \ \ j = 1, \dots, m.$$

Tästä saadaan yhdistetylle kuvaukselle $L'L$, että kaikilla $1 \le k \le n$ pätee

$$L'L(\mathbf{v}_k) = L'(\sum_{j=1}^{m} b_{jk}\mathbf{w}_j) = \sum_{j=1}^{m} b_{jk}L'(\mathbf{w}_j) =$$

$$\sum_{j=1}^{m} b_{jk}(\sum_{i=1}^{p} a_{ij}\mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^{p}(\sum_{j=1}^{m} b_{jk}a_{ij})\mathbf{u}_i.$$

Näin ollen yhdistetyn kuvauksen $L'L$:n matriisi $[L'L]_{G,E}$ kantojen G ja E suhteen on $(p \times n)$-matriisi $(c_{ik})_{1 \le i \le p, 1 \le k \le n}$, missä

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} b_{jk}a_{ij}.$$

Koska kunnan kertolasku on vaihdannainen, tämä voidaan kirjoittaa myös yhtä hyvin muodossa

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}.$$

Tämä lasku motivoi seuraavan määritelmän.

Määritelmä 2.75. *Olkoon K kunta, olkoot $n, m, p \in \mathbb{N}$, $A \in M(p \times m; K)$, $B \in M(m \times n; K)$. Tällöin matriisien A ja B* matriisitulo *AB määritellään $(p \times n)$ K-kertoimisena matriisina $C = (c_{ik})$, jolle*

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}$$

kaikilla $i = 1, \ldots, n, k = 1, \ldots, p$.

Kahden matriisin A ja B tulo AB on määritelty täsmälleen silloin kun matriisissa A on sama määrä sarakkeita kuin matriisissa B on rivejä. Sääntö

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk},$$

esitetään usein havainnollisesti muodossa ”matriisin A rivi i kerrotaan matriisin B sarakkeella k”.

Matriisin tulon määritelmää edeltävä tarkastelu antaa heti seuraavan tärkeän tuloksen. Matriisien kertolasku on määritelty täsmälleen sillä tavalla, että se vastaisi lineaaristen kuvausten yhdistämistä.

Propositio 2.76. *Olkoot V, W, U äärellisulotteisia K-vektoriavaruuksia. Olkoon E avaruuden V kanta, F avaruuden W kanta ja G avaruuden U kanta. Olkoot $L\colon V \to W$ ja $L'\colon W \to U$ lineaarisia kuvauksia. Tällöin*

$$[L'L]_{G,E} = [L']_{G,F}[L]_{F,E}.$$

Kaavasta $[L'L]_{G,E} = [L']_{G,F}[L]_{F,E}$ näkee miksi olemme sopineet merkitä kuvauksen lähtö- ja maalivektoriavaruuksien kantoja alaindekseissä nimenomaan tässä järjestyksessä - ensimmäisenä maaliavaruuden kanta ja toisena lähtöavaruuden kanta. Tällä merkinnällä tulossa $[L']_{G,F}[L]_{F,E}$ keskellä oleva kanta F ”supistuu pois” ja tuloksena on kaavan mukaan matriisi $[L'L]_{G,E}$. Laskusääntö on helppo muistaa näillä merkinnöillä.

Palautetaan mieleen, että edellisen Proposition tilanteessa on olemassa K-vektoriavaruuksien isomorfismi $\Phi_{F,E}\colon L(V, W) \to M(m \times n; K)$, $\Phi(L) = [L]_{F,E}$, missä $m = \dim W$, $n = \dim V$. Tämän kuvauksen avulla Proposition väite voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$\Phi_{G,E}(L'L) = \Phi_{G,F}(L')\Phi_{F,E}(L).$$

Tämä yhtälö voidaan tulkita tarkoittavan, että isomorfismien $\Phi_{F,E}$ muodostama ”perhe” on siis eräänlainen ”homomorfismi” (jopa ”isomorfismi”) myös kuvausten yhdistämisen ja matriisien kertolaskun suhteen eli se ”säilyttää” nämä ”laskutoimitukset”. Koska kaikki tämän perheen kuvaukset ovat bijektioita, tästä voidaan suhteellisen helposti päätellä, että matriisien kertolasku toteuttaa samat algebralliset ominaisuudet kuin lineaaristen kuvausten yhdistämisoperaatio. Tällöin pitää kuitenkin muistaa, että kyseessä ei kuitenkaan ole jokin yksi fiksattu bijektio Φ, vaan se pitää valita erikseen jokaiselle parille V, W (mikä edellyttää sitä, että avaruuksissa V, W fiksataan jotkut kannat). Jätämme tämän lähestymistavan tarkastelun lukijalle pohdittavaksi ja siirrytään sen sijaan johtamaan matriisien kertolaskun ominaisuudet jossain mielessä käänteisestä näkökulmasta.

Matriisin indusoima kanoninen kuvaus

Tiedämme, että jokainen lineaarinen kuvaus äärellisulotteisten avaruuksien välillä voidaan esittää matriisina. Tällainen esitys kuitenkin riippuu sen lähtö-, ja maaliavaruuksien kantojen valinnasta. Tästä seuraa, että jokainen kiinnitetty $(m \times n)$-kokoinen matriisi A on hyvin monen erilaisen kuvauksen $L\colon V \to W$ matriisi $[L]_{E',E}$ joidenkin kantojen E', E suhteen. Tällainen kuvaushan riippuu paitsi avaruuksien V ja W valinnasta, myös niiden kantojen valinnasta. Tästä syystä sovitaan eräästä kanonisesta tavasta liittää annettuun matriisiin kuvaus.

Olkoon $A = (a_{ij}) \in M(n \times m; K)$ matriisi. Palautetaan mieleen, että m-ulotteisella K-vektoriavaruudella K^m on olemassa *standardikanta* $E^m = (\mathbf{e}_1^m, \ldots, \mathbf{e}_m^m)$ (kts. esimerkki 2.47, 1)). Käytämme tässä yhteydessä yläindeksejä korostaaksemme, että kyse on avaruuden K^m standardista kannasta. Vastaavasti n-ulotteisella K-vektoriavaruudella K^n on olemassa *standardikanta* $E^n = (\mathbf{e}_1^n, \ldots, \mathbf{e}_n^n)$.

Lemmasta 2.64 seuraa, että on olemassa täsmälleen yksi lineaarinen kuvaus $L_A\colon K^m \to K^n$, jonka matriisi $[L_A]_{E^n,E^m}$ avaruuksien K^m ja K^n standardikantojen E' ja E suhteen on matriisi A. Tämä on siis sellainen kuvaus, jolle pätee

$$L_A(\mathbf{e}_j^m) = \sum_{i=1} a_{ij}\mathbf{e}_i^n$$

kaikilla $j = 1, \ldots, m$. Helposti nähdään (HT), että alkioiden tasolla kuvaus L_A on määritelty kaavalla

$$L_A(x_1, \ldots, x_m) = (y_1, \ldots, y_n), \text{ missä} \tag{2.77}$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j.$$

Huomaa, että Lauseesta 2.64 seuraa, että jokainen lineaarinen kuvaus $L\colon K^m \to K^n$ voidaan esittää muodossa L_A, eli kaavana 2.77. Tästä kaavasta myös seuraa, että jos tulkitsemme vektoriavaruuden K^n alkion $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ”pystyvektorina”, eli $(n \times 1)$-matriisina

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

ja samalla tavalla tulkitsemme mielivaltaisen vektorin $\mathbf{y} \in K^m$ pystyvektorina eli $(m \times 1)$-matriisina

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

voimme kirjoittaa kuvauksen L_A määritelmän myös matriisien kertolaskun avulla kaavana

$$L_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

Konstruktiomme perusteella pätee

$$\Phi_{E^n,E^m} = [L_A]_{E^n,E^m} = A,$$

joten, koska kuvaus Φ_{E^n,E^m} on bijektio, vastaavuus $A \mapsto L_A$ ei ole mitään muuta kuin *tämän bijektion käänteiskuvaus*, toisin sanoen

$$L_A = \Phi^{-1}_{E^n,E^m}(A).$$

Samastuksen $\Phi^{-1}_{E^n,E^m}\colon A \leftrightarrow L_A$ kautta voimme ajatella jokaisen matriisin lineaarikuvauksena *kanonisella tavalla.* Koska kuvaus $\Phi^{-1}_{E^n,E^m}$ on lineaarisen bijektion käänteiskuvauksena lineaarinen, kaikille $A, B \in M(n \times m; K)$ ja $k \in K$ pätee

$$L_{A+B} = L_A + L_B, \text{ ja}$$

$$L_{kA} = kL_A.$$

Koska vastaavuuden $A \leftrightarrow L_A$ kautta voidaan ajatella matriisi A lineaarisena kuvauksena L_A, voimme myös yleistää kaikki lineaarisiin kuvauksiin liittyvät käsitteet matriiseihin. Voimme siis puhua esim. matriisin A ytimestä, kuvajoukosta, ominaisarvoista jne. Tällöin siis tarkoitamme vastaavan lineaarisen kuvauksen L_A ydintä, ominaisarvoa jne. Teemme näin usein jatkossa.
Joskus haluamme taas suorittaa päinvastaisen tempun eli yrittää yleistää matriiseihin liittyviä käsitteitä lineaarisiin kuvauksiin. Tällöin kuitenkin pitää aina tarkistaa, että kyseinen olio on *hyvinmääritelty*, eli ei riipu siitä, minkälaisten kantojen, tai millaisen kannan suhteen esitämme kuvauksen matriisina. Esimerkiksi vaikka voimme puhua matriisin $(1, 1)$-alkiosta a_{11}, mitään vastaava lukua emme voi kuvaukselle määritellä, sillä se riippuisi esityksestä. Sen sijaan esimerkiksi determinantti, joka ensin määritellään matriiseille, voidaan määritellä myös kuvauksille, sillä se on sama riippumatta siitä, missä kannassa kuvaus esitetään (tähän palataan kunnolla myöhemmin).

Matriisien kertolaskun algebralliset ominaisuudet.
Kanoninen vastaavuus $A \mapsto L_A$ on myös ”yhteensopiva” matriisien kertolaskun ja lineaarikuvausten yhdistämisoperaation kanssa. Täsmällisesti sanottuna, olkoot $A \in M(n \times m; K)$, $B \in M(p \times n; K)$. Tällöin voimme muodostaa matriisin $BA \in M(p \times m; K)$, jota vastaa lineaarikuvaus $L_{BA}\colon K^m \to K^p$. Voimme myös muodostaa yhdistetyn kuvauksen $L_B L_A\colon K^m \to K^p$. Tutkimalla standardikantojen kuvavektoreita molempien kuvausten tapauksessa, nähdään helposti, että ne ovat samoja. Toisin sanoen tässä tilanteessa pätee

$$L_{BA} = L_B L_A. \tag{2.78}$$

Lisäksi, konstruktion perusteella yksikkömatriisille $I_n \in M(n \times n; K)$ pätee jokaisella $n \in \mathbb{N}$

$$L_{I_n} = \mathrm{id}_{K^n}, \tag{2.79}$$

sillä tällöin kuvauksen molemmilla puolella käytetään samaa kantaa. Tämä on sellainen ominaisuus, jota mielivaltaisella bijektiolla $\Phi_{E',E}\colon L(V) \to M(n \times n; K)$ ei olisi, jos saman avaruuden V kannat E', E ovat valittu eri kannoina, $E' \neq E$.

Koska kanoninen vastaavuus $A \mapsto L_A$ on bijektiivinen, kuvausten yhdistämisen ominaisuuksista (2.66)-(2.71) sekä yhtälöistä (2.78) ja (2.79) saadaan vastaavat ominaisuudet myös matriisin kertolaskulle. Tarkemmin sanottuna seuraavat kaavat (2.80)-(2.84) pätevät matriisien kertolaskulle, kun $A, A' \in M(n \times m; K)$, $B, B' \in M(m \times p; K)$, $C \in M(p \times q; K)$, $n, m, p, q, \in \mathbb{N}$.

$$(AB)C = A(BC) \quad \text{(matriisien kertolaskun liitännäisyys)}, \tag{2.80}$$

$$A(B + B') = AB + AB' \quad \text{(ensimmäinen osittelulaki)}, \tag{2.81}$$

$$(A + A')B = AB + A'B \quad \text{(toinen osittelulaki)}, \tag{2.82}$$

$$I_n A = A I_m = A \quad \text{(kertolaskun ”neutraalialkiot”)}, \tag{2.83}$$

$$k(AB) = (kA)B = A(kB) \quad \text{(kertolasku ja skalaarikertolasku kommutoivat)}. \tag{2.84}$$

Esimerkiksi yhtälö (2.80) voidaan johtaa seuraavasti. Yhtälön (2.78) ja vastaavan kuvausten yhdistämisen ominaisuuden (2.66) nojalla pätee

$$L_{(AB)C} = L_{AB} L_C = (L_A L_B) L_C = L_A (L_B L_C) = L_A L_{BC} = L_{A(BC)}.$$

Koska vastaavuus $A \mapsto L_A$ on injektiivinen, tästä seuraa $(AB)C = A(BC)$. Muut ominaisuudet johdetaan samalla periaatteella.

Edellä esitetty päättely on mainio esimerkki siitä, miten lineaaristen kuvausten samastaminen matriiseihin helpottaa matriisien ominaisuuksien tutkimista. Esimerkiksi matriisitulon liitännäisyyttä $(AB)C = A(BC)$, kuten muutkin matriisikertolaskun ominaisuudet, voidaan osoittaa suoraan kertolaskun formaalista määritelmästä (”kerrotaan rivi sarakkeella”) lähtien, mutta tällainen tapa tarkoittaisi puuduttavaa, formaalia, eimotivoitua, tylsää laskua, täynnä indeksien pyörittelyjä ja monimutkaisen näköisiä välivaiheita. Tällainen todistus ei myöskään kerro MIKSI liitännäisyys on voimassa matriisien kertolaskulle, mikä on olennainen syy siihen. Sen sijaan, kun käytetään hyväksi matriisien ja lineaaristen kuvausten luonnollista vastaavuutta, väite on melkein itsestään selvä. Samalla paljastuu miksi matriisien kertolaskun liitännäisyys on oikeasti voimassa - koska se on räätälöity vastaamaan kuvausten yhdistämisoperaatiota ja sellainen operaatio on tunnetusti liitännäinen. Lisäksi kuvausten yhdistämisen kohdalla liitännäisyys tuntuu erittäin luonnolliselta ja sen todistus on yhden rivin pituinen yksinkertainen ja selkeä lasku.

Neliömatriisien algebra

Yleisesti ottaen matriisien kertolasku ei ole laskutoimitus missään joukossa, sillä kun tulo AB on hyvinmääritelty sen tekijät kuuluvat eri joukkoihin - A on $(m \times n)$-matriisi ja B on $(n \times p)$-matriisi. Kuitenkin erikoistapauksessa $m = n = p$ matriisien kertolasku **on** hyvinmääritelty laskutoimitus $(n \times n)$-kokoisten eli *neliömatriisien* joukossa $M(n \times n; K)$, jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Lisäksi tässä vaiheessa tunnetuista matriisilaskutoimitusten ominaisuuksista *neliömatriisien* tapauksessa tarkasteltuna saadaan seuraava tärkeä tulos.

Seuraus 2.85. *Olkoon K kunta ja olkoon $n \in N$. Tällöin $(n \times n)$-matriisien joukko $M(n \times n; K)$ on K-algebra matriisien yhteenlaskun, skalaarikertolaskun ja matriisienkertolaskun suhteen. Algebran ykkösalkio on yksikkömatriisi I_n.*

Neliömatriisien algebra on yleensä ei-vaihdannainen. Neliömatriisia sanotaan *kääntyväksi*, jos sillä on neliömatriisien algebrassa käänteisalkio (eli käänteisalkio matriisien kertolaskun suhteen).

Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus, $n = \dim V$. Valitaan jokin sen kanta E. Tällöin kuvaus $\Phi_E = \Phi_{E,E}\colon L(V) \to M(n \times n; K)$, joka kuvaa lineaarisen endomorfismin $L\colon V \to V$ matriisille $[L]_E = L_{E,E}$ (huom., sama kanta molemmilla puolella) on Propositioiden 2.64 ja 2.76 nojalla sekä lineaarinen isomorfismi, että kertolaskun säilyttävä,

$$\Phi_E(LL') = \Phi_E(L) \circ \Phi_E(L').$$

Lisäksi selvästi pätee $\Phi_E(\mathrm{id}_V) = I_n$ (huom., tässä on olennaista se, että molemmilla puolilla käytetään samaa kantaa). Tästä saadaan heti seuraava tulos.

Seuraus 2.86. *Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus, $n = \dim V$. Valitaan jokin sen kanta E. Tällöin kuvaus $\Phi_E\colon L(V) \to M(n \times n; K)$ on K-algebrojen välinen isomorfismi.*

Kantojen vaihto.

Tutkitaan miten avaruuksien kantojen vaihto vaikuttaa lineaarisen kuvauksen matrisiin. Tutkitaan ensin identtisen kuvauksen $\mathrm{id}\colon V \to V$ matriisiesityksiä ja siirrytään tämän jälkeen mielivaltaisen lineaarisen kuvauksen $L\colon V \to W$ tapaukseen.

Olkoon V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus, $n = \dim V$ ja olkoot $E = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ ja $E' = \{\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_n\}$ sen (mahdollisesti) eri kannat (huom. äärellisulotteisen vektoriavaruuden kantojen vektorien lukumäärä on aina sama). Olkoon $A = (a_{ij})$ identtisen kuvauksen $\mathrm{id}_V\colon V \to V$ matriisi $[\mathrm{id}_V]_{E',E}$ kantojen E ja E' suhteen. Tällöin sen kertoimet a_{ij} määräytyvät yksikäsittisestä lineaarisista kombinaatioista

$$\mathbf{v}_j = \mathrm{id}_V(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{v}'_i.$$

Toisin sanoen tässä esitetään kannan E alkiot kannan E' alkioiden yksikäsitteisinä lineaarisina kombinaatioina ja poimitaan matriisin kertoimet niistä (huom. kantojen järjestys!). Sanomme tällaista matriisia **kannanvaihtomatriisiksi** ja merkitään sitä myös $[E'|\ E]$. Tämä matriisi on $(n \times n)$-kokoinen neliömatriisi.

Samalla tavalla voidaan vaihtaa kantojen roolia ja esittää jokainen kannan E' alkio $\mathbf{v}'_i$ kannan E avulla,

$$\mathbf{v}'_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ji}\mathbf{v}_j.$$

Tällöin kertoimet b_{ji} ovat kannavaihtomatriisin $B = [E \mid E']$ kertoimet. Propositiosta 2.76 seuraa, että

$$AB = [\mathrm{id}_V]_{E',E} \cdot [\mathrm{id}_V]_{E,E'} = [\mathrm{id}_V \circ \mathrm{id}_V]_{E,E} = [\mathrm{id}_V]_{E,E} = I_n.$$

Samalla tavalla nähdään, että $BA = I_n$. Toisin sanoen kannanvaihtomatriisi $[E' \mid E]$ on aina kääntyvä ja sen käänteismatriisi on itse asiassa kannanvaihtomatriisi $[E \mid E']$,

$$[E' \mid E]^{-1} = [E \mid E'].$$

Tarkastellaan seuraavaksi yleistä tilannetta. Olkoon $L\colon V \to W$ mielivaltainen äärellisulotteisten K-vektoriavaruuksien V, W välinen lineaarinen kuvaus. Olkoot E, E' avaruuden V (mahdollisesti) eri kannat ja samoin olkoot F, F' avaruuden W eri kannat. Tällöin yhtälöstä $L = \mathrm{id}_W \circ L \circ \mathrm{id}_V$, Propositiosta 2.76 ja edellisen kappaleen tuloksista seuraa, että

$$(2.87) \qquad [L]_{F',E'} = [\mathrm{id}_W]_{F',F} \cdot [L]_{F,E} \cdot [\mathrm{id}_V]_{E,E'} = [F' \mid F] \cdot [L]_{F,E} \cdot [E' \mid E]^{-1}.$$

Tämä on **kannanvaihtokaava** lineaarisen kuvauksen matriiseille. Toisin sanoen, jos Y on matriisi $[L]_{F',E'}$ (esitys "uusien" kantojen suhteen), X on matriisi $[L]_{F,E}$ (esitys "vanhojen" kantojen suhteen), A on kannanvaihtomatriisi $[E', E]$ (vaihdetaan kannat V:ssä) ja B on kannanvaihtomatriisi $[F', F]$ (vaihdetaan kannat W:ssä), kuvauksen L "uusi" esitys Y saadaan "vanhasta" esityksestä X kaavalla

$$Y = BXA^{-1}.$$

Kaava 2.87 voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$[L]_{F',E'}[E' \mid E] = [F' \mid F] \cdot [L]_{F,E}.$$

Erityisen tärkeän erikoistapauksen tästä saadaan, kun tarkastellaan lineaarisen endomorfismin $L\colon V \to V$ esityksiä avaruuden V eri kannoissa. Jos E on avaruuden V a kanta, L:n matriisi $[L]_{E,E}$ (huom., sama kanta molemmilla puoleella!) merkitään yksinkertaisuuden vuoksi vain $[L]_E$.
Oletetaan, että E' on avaruuden V jokin (mahdollisesti) toinen kanta. Tällöin edellisen nojalla

$$(2.88) \qquad [L]_{E'} = [E' \mid E][L]_E[E' \mid E]^{-1}.$$

Jos merkitään tässä $Y = [L]_{E'}$ (matriisi "uudessa" kannassa), $X = [L]_E$ (matriisi "vanhassa" kannassa) ja $A = [E' \mid E]$ (kannanvaihtomatriisi), kuvauksen L matriisien kannanvaihtoyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $Y = AXA^{-1}$.
Kahta samankokoista neliömatriisia Y ja X sanotaan *similaarisiksi* jos on olemassa kääntyvä neliömatriisi A jolle $Y = AXA^{-1}$. Näin ollen lineaarisen endomorfismin matriisit $[L]_E$ avaruuden eri kantojen E suhteen ovat aina similaarisia keskenään.

Esimerkki 2.89. *Esimerkissä 2.63 olemme laskenneet lineaariselle kuvaukselle* $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L(x, y, z) = (x + y, 2z - x)$ *matriisiesitykset* $[L]_{F,E}$, $[L]_{F',E'}$, *joissa* F, E *ovat vastaavasti avaruuksien* $\mathbb{R}^2$ *ja* $\mathbb{R}^3$ *standardit kannat,* $E' = ((1, 0, -1), (1, 1, 1), (1, 0, 0))$ *ja* $F' = ((1, -1), (0, 2))$. *Lopputuloksena olivat matriisit*

$$[L]_{F,E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ ja}$$

$$[L]_{F',E'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Kannanvaihtokaavan (2.87) nojalla on voimassa yhtälö

$$[L]_{F',E'} = [F' \mid F] \cdot [L]_{F,E} \cdot [E' \mid E]^{-1},$$

joka voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$[L]_{F',E'}[E' \mid E] = [F' \mid F][L]_{F,E}. \tag{2.90}$$

Lasketaan kannanvaihtomatriisejä. Matriisi $[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{E,E'} = [E \mid E'] = [E' \mid E]^{-1}$ *on helppo laskea, sillä sen muodostamista varten meidän on esittävää kannan* E' *alkiot standardikannan* E *alkioiden lineaarisina kombinaationa. Näiden kombinaatioiden koordinaatit ovat samoja kuin* $\mathbb{R}^3$*:n vektorin koordinaatteja. Toisin sanoen*

$$[E \mid E'] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kannanvaihtomatriisin $[E' \mid E]$ *laskeminen ei ole niin suoraanviivaista. Sen voi laskea määritelmästä lähtien (esitetään* E*:n alkiot kannassa* E'*) tai matriisin* $[E \mid E']$ *käänteismatriisina. Jälkimmäistä laskutapaa varten meidän on osattava kääntää matriisit käytännössä, tästä aiheesta ei tällä kurssilla ainakaan vielä puhuttu, vaikka matriisin kääntämismenetelmät saattaavat olla tuttuja ennestään lineaarialgebran aikaisemmista kursseista. Tästä syystä muodostetaan* $[E' \mid E]$ *määritelmästä lähteä. Ensimmäinen sarake saadaan kun vektori* $(1,0,0)$ *esitetään kannassa* E' *eli kun ratkaistaan yhtälö*

$$x(1,0,-1) + y(1,1,1) + z(1,0,0) = (1,0,0).$$

Koska vektori $(1,0,0)$ *kuuluu kumpaankin kantaan, tämän ratkaisu on selvästi* $x = 0 = y$, $z = 1$. *Toinen sarake saadaan kun ratkaistaan yhtälö*

$$x(1,0,-1) + y(1,1,1) + z(1,0,0) = (0,1,0).$$

Tämä on oleennaisesti kolmen muuttujan ja kolmen yhtälön lineaarinen yhtälöryhmä kunnassa $\mathbb{R}$. *Ratkaisemalla se saadaan ratkaisuksi (käy läpi yksityiskohdat!)* $x = y = 1, z = -2$. *Vastaavalla tavalla ratkaistaan matriisin* $[E' \mid E]$ *kolmas sarake. Lopputuloksena on matriisi*

$$[E' \mid E] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Laskemalla suoraan (tämä on samalla hyvä tapa tarkistaa menikö lasku oikein) saadaan

$$[E' \mid E]\cdot[E \mid E'] = \begin{bmatrix} 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + (-1)\cdot(-1) & 0\cdot 1 + 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 & 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + (-1)\cdot 0 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot(-1) & 0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1 & 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 0 \\ 1\cdot 1 + (-2)\cdot 0 + 1\cdot(-1) & 1\cdot 1 + (-2)\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot 1 + (-2)\cdot 0 + 1\cdot 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3,$$

kuten pitääkin olla.

Vastaavalla tavalla voidaan laskea

$$[F \mid F'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$[F' \mid F] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Kannanvaihtokaavan 2.90 mukaan pitää päteä

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Verifioi suoraan laskemalla, että näin todellakin on.

Yleiset lineaariset ryhmät.
Olkoon $(A, +, \cdot, \odot)$ jokin algebra. Koska tällöin $(A, +, \odot)$ on erityisesti rengas, voidaan puhua algebran kääntyvistä alkioista, jotka muodostavat joukon A^* ja joita sanotaan myös algebran *yksikkö-alkioiksi*. Luvun 1 Lemman 1.26 nojalla yksikkö-alkiot muodostavat ryhmän algebran kertolaskun suhteen.

Olkoon V K-vektoriavaruus. Tällöin lineaariset endomorfismit $L\colon V \to V$ muodostavat K-algebran $L(V)$, jonka kertolaskuoperaatio on kuvausten yhdistäminen. Edellisen kappaleen nojalla kaikki lineaariset bijektiot eli isomorfismit $L\colon V \to V$ (eli tämän algebran kääntyvät alkiot) muodostavat *ryhmän* $L(V)^*$ kuvausten yhdistämisen suhteen. Tätä ryhmää merkitään myös $GL(V)$ ja sanotaan vektoriavaruuden V *yleiseksi lineaariseksi ryhmäksi* (engl. general linear group). Se on kaikkien $V \to V$ bijektioiden muodostaman ryhmän $\mathrm{Perm}(M)$ aliryhmä.

Samoin jokaisella $n \in \mathbb{N}$ $(n \times n)$-kokoisten K-kertoimiset matriisit muodostavat algebran $M(n \times n; K)$, jonka kertolaskuoperaatio on matriisien kertolasku. Näin ollen kaikki kääntyvät $(n \times n)$-kokoiset matriisit muodostavat ryhmän matriisien kertolaskun suhteen. Tätä ryhmää merkitään $GL(n; K)$ ja sanotaan myös *yleiseksi lineaariseksi (matriisi)ryhmäksi*. Yleisen lineaarisen ryhmän aliryhmiä sanotaan renkaan K *matriisiryhmiksi*. Matriisiryhmillä on erittäin tärkeä rooli algebrassa, topologiassa, differentiaaligeometriassa ja monissa muissa matematiikan osa-alueissa.
Myöhemmin törmäämme esimerkiksi sellaisiin matriisiryhmiin kuin erikoinen lineaarinen ryhmä $SL(n; K)$, $\mathbb{R}$-kertoimisten ortogonaalisten matriisien ryhmään $O(n)$ (avaruuden $\mathbb{R}^n$ kierrot), unitaaristen matriisien ryhmään $U(n)$ (avaruuden $\mathbb{C}^n$:n kierrot) jne.

Olkoot R ja Q renkaita ja olkoon $f\colon R \to Q$ rengasisomorfismi. Tällöin f selvästi määrittelee ryhmäisomorfismin $R^* \to Q^*$ (mieti yksityiskohdat). Soveltamalla tätä havaintoa algebraisomorfismiin $\Phi_{E,E}\colon L(V) \to M(n \times n; R)$, missä E on jokin kiinteä n-ulotteisen vektoriavaruuden V kanta, saadaan seuraava tulos.

Seuraus 2.91. *Olkoon V n-ulotteinen K-vektoriavaruus. Olkoon E avaruuden V kanta. Tällöin kuvaus $\Phi_E\colon GL(V) \to GL(n; K)$, $\Phi(L) = [L]_E$ on ryhmäisomorfismi.*

Toisin sanoen yleinen lineaarinen ryhmä $GL(V)$ ja yleinen lineaarinen matriisiryhmä $GL(n; K)$ ovat ryhminä isomorfisia.

Lineaariset kuvaukset, matriisit ja dimensiokysymykset

Palataan edellisen luvun aiheisiin ja tutkitaan minkälaisia yhteyksiä on lineaarikuvauksen ytimen ja kuvajoukon dimensioilla on.

Propositio 2.92. *Olkoon $L\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus ja oletetaan, että V on äärellisulotteinen. Tällöin $\operatorname{Im} L$ on myös äärellisulotteinen ja*

$$\dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L = \dim V.$$

Todistus. Lemman 2.48 nojalla avaruudella V on olemassa kanta E, joka on muotoa

$$(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-m}),$$

missä $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$ on aliavaruuden $\operatorname{Ker} L$ kanta, $\dim \operatorname{Ker} L = m$, $\dim V = n$. Osoitetaan, että jono

$$(L(\mathbf{v}_1), \dots, L(\mathbf{v}_{n-m}))$$

on avaruuden $\operatorname{Im} L$ kanta. Ensinnäkin, olkoon $\mathbf{w} = L(\mathbf{v})$ kuvajoukon $\operatorname{Im} L$ alkio. Tällöin, koska E on avaruuden V kanta, on olemassa esitys muodossa

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^{n-m} b_j \mathbf{v}_i.$$

Sovelletaan tähän yhtälöön kuvausta L. Ottamalla huomioon kuvauksen lineaarisuuden ja sen, että $L(\mathbf{u}_i) = 0_V$ kaikilla $i = 1, \dots, m$, saadaan

$$L(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{m} a_i L(\mathbf{u}_i) + \sum_{j=1}^{n-m} b_j L(\mathbf{v}_i) = \sum_{j=1}^{n-m} b_j L(\mathbf{v}_i).$$

Erityisesti jono $(L(\mathbf{v}_1), \dots, L(\mathbf{v}_{n-m}))$ virittää avaruuden $\operatorname{Im} V$. Sen osoittaminen, että tämä jono on vapaa, jätetään harjoitustehtäväksi.

Koska jono $(L(\mathbf{v}_1), \dots, L(\mathbf{v}_{n-m}))$ on avaruuden $\operatorname{Im} L$ kanta, tämä avaruus on erityisesti äärellisulotteinen ja pätee

$$\dim \operatorname{Im} L = n - m = \dim V - \dim \operatorname{Ker} L.$$

Siirtämällä termi $\dim \operatorname{Ker} L$ yhtälön toiselle puolelle saadaan väite. □

Seuraus 2.93. *Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus ja olkoon W sen aliavaruus. Tällöin tekijäavaruus V/W on äärellisulotteinen ja*

$$\dim(V/W) = \dim V - \dim W.$$

Todistus. Saadaan edellisestä Propositiosta soveltamalla sitä kanoniseen projektioon $p\colon V \to V/W$, joka on surjektiivinen lineaarinen kuvaus. □

Ennen kuin siirrytään seuraavan tulokseen eli Seuraukseen 2.94, palautetaan mieleen tunnettuja tuloksia äärellisten joukkojen teoriasta. Olkoot A ja B *äärellisiä joukkoja.* Olkoon $f\colon A \to B$ mikä tahansa kuvaus. Tällöin seuraavat (intuitiivisesti selvät) tosiasiat pätevät.

- Jos $|A| < |B|$, kuvaus f ei voi olla surjektio (A:ssä ei ”riittävästi alkioita” peitämään koko B).
- Jos $|A| > |B|$, kuvaus f ei voi olla injektio (”lokeroperiaate”).
- Jos $|A| = |B|$ kuvaus f on injektio jos ja vain jos se on surjektio.

Osoittautuu, että äärellisulotteisten vektoriavaruuksien lineaarisilla kuvauksilla on analogisia ominaisuuksia avaruuksien dimensioiden suhteen. Voidaan siis ikään kuin ajatella, että äärellisulotteisilla avaruuksilla on vektoriavaruuksien teoriassa ”sama rooli” kuin äärellisillä joukoilla on joukkojen teoriassa. Tämä on hyödyllinen analogia, jonka kannattaa pitää mielessä.

Seuraus 2.94. *Olkoon $L\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus äärellisulotteisten K-vektoriavaruuksien välillä. Tällöin seuraavat väitteet pitävät paikkansa.*

(1) Jos $\dim V < \dim W$, kuvaus L ei voi olla surjektio.

(2) Jos $\dim V > \dim W$, kuvaus L ei voi olla injektio.

(3) Jos $\dim V = \dim W$, kuvaus L on injektio jos ja vain jos se on surjektio. Toisin sanoen injektiivinen tai surjektiivinen lineaarinen kuvaus samanulotteisten avaruuksien välillä on aina automaattisesti isomorfismi.

Todistus. (1) Proposition 2.92 nojalla pätee

$$\dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L = \dim V.$$

Erityisesti tästä seuraa, että $\dim \operatorname{Im} L \leq \dim V$. Näin ollen, jos $\dim V < \dim W$, myös $\dim \operatorname{Im} L < \dim W$, jolloin yhtälö $\operatorname{Im} L = W$ on mahdoton. Toisin sanoen L ei voi olla surjektio.

(2) Samasta kaavasta seuraa, että jos L on injektio (eli $\operatorname{Ker} L = \{\mathbf{0}\}$), niin $\dim \operatorname{Ker} L = 0$, joten $\dim \operatorname{Im} L = \dim V$. Jos $\dim V > \dim W$, tästä saadaan $\dim \operatorname{Im} L > \dim W$, mikä on mahdotonta Lemman 2.48 nojalla, sillä $\operatorname{Im} L$ on W aliavaruus. Näin ollen L ei voi olla injektio.

(3) L on injektio jos ja vain jos $\dim \operatorname{Ker} L = 0$ eli jos ja vain jos $\dim \operatorname{Im} L = \dim V$. Oletuksen $\dim V = \dim W$ nojalla tämä on ekvivalentti yhtälön $\dim \operatorname{Im} L = \dim W$ kanssa. Koska $\operatorname{Im} L$ on avaruuden W aliavaruus, Lemman 2.48 nojalla tämä voi toteuttua jos ja vain jos $\operatorname{Im} L = W$ eli jos ja vain jos L on surjektio. □

Edellisen Seurauksen kohdan (3) tulosta usein käytetään hyväksi seuraavaksi. Oletetaan, että $\dim V = \dim W < \infty$ ja $L\colon V \to W$ on lineaarinen kuvaus. Haluamme osoittaa, että lineaarisella yhtälöllä $L(\mathbf{x}) = \mathbf{w}$ on ratkaisu kaikilla $\mathbf{w} \in W$. Tämä on yhtäpitävä sen kanssa, että L on surjektio. Kuitenkin edellisen tuloksen mukaan riittää osoittaa sen sijaan, että L on injektio (mikä taas tarkoittaa sitä, että lineaarisella yhtälöllä $L(\mathbf{x}) = \mathbf{w}$ on aina *korkeintaan yksi ratkaisu*). Näemme tästä tekniikasta konkrettisia esimerkkejä jatkossa ja myös harjoitustehtävien yhteydestä.

Seuraava matriisien ominaisuus todistetaan usein Lineaarialgebran peruskurssilla monimutkaisten ja formaalien matriisioperaatioiden avulla. Me voimme kuitenkin helposti johtaa sen paljon yksinkertaisemmin lineaaristen kuvausten teorian avulla.

Palautetaan mieleen ensin seuraava asia. Olkoon $\cdot$ liitännänen laskutoimitus joukossa X, jolla on olemassa neutraalialkio e. Olkoon $x \in X$. Tällöin x:n käänteisalkio $y = x^{-1}$ on sellainen joukon X alkio, jolle pätee $xy = e = yx$. Jos laskutoimitus on vaihdannainen, tässä tietysti riittäisi vain toinen näistä yhtälöistä, eli $xy = e$ tai $yx = e$. Mutta jos laskutoimitus ei ole vaihdannainen, yleensä vain toinen näistä yhtälöistä **ei riitä**. Esimerkiksi kuvauksella $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$ ei ole kuvausten yhdistämisen suhteen käänteisalkiota, sillä se ei ole bijektio. Kuitenkin kuvaukselle $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n) = n/2$ kun n on parillinen ja $g(n) = 0$ kun n on pariton, pätee $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Näin ollen yleisesti siitä, että jokin alkio y kelpaa alkion x niin sanotuksi *vasemmanpuoleiseksi* tai *oikeanpuoleiseksi* käänteisalkioksi, ei seuraa vielä, että alkio x olisi kääntyvä. Kuitenkin neliömatriisien kertolaskulla on hyvin erikoinen ominaisuus, jonka mukaan vain "toinen puoli" kääntyvyysehdosta riittää matriisin kääntevyydelle - siitä huolimatta, että matriisien kertolasku ei tunnetusti ole vaihdannainen.

Seuraus 2.95. *Olkoon K kunta ja olkoon $n \in \mathbb{N}$. Olkoon $A \in M(n \times n; K)$ neliömatriisi. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä.*

(1) A on kääntyvä eli sillä on olemassa käänteismatriisi A^{-1}.

(2) Matriisilla A on olemassa niin sanottu vasemmanpuoleinen käänteisalkio *joukossa $M(n \times n; K)$ eli sellainen matriisi $B \in M(n \times n; K)$ jolle pätee $BA = I_n$.*

(3) Matriisilla A:lla on olemassa niin sanottu oikeanpuoleinen käänteisalkio *joukossa $M(n \times n; K)$ eli sellainen matriisi $B \in M(n \times n; K)$ jolle pätee $AB = I_n$.*

Todistus. Neliömatriisia $A \in M(n \times n; K)$ vastaa lineaarinen kuvaus $L_A : K^n \to K^n$. Koska vastaavuus $A \mapsto L_A$ on bijektiivinen ja säilyttää kertolaskun, matriisi A on kääntyvä jos ja vain jos kuvaus L_A on kääntyvä kuvausten yhdistämisen suhteen, eli on bijektio. Edellisen seurauksen nojalla kuvaus $L_A : K^n \to K^n$ on kuitenkin bijektio jos ja vain jos se on on injektio tai yhtä hyvin jos ja vain jos se on surjektio.

Oletetaan esimerkiksi, että matriisilla A on vasemmanpuoleinen käänteisalkio $B \in M(n \times n; K)$ eli pätee yhtälö $BA = I$. Matriisia B vastaa lineaarinen kuvaus $L_B : K^n \to K^n$. Tällöin matriisiyhtälöä $BA = I$ vastaa kuvausten tasolla yhtälö $L_B \circ L_A = \mathrm{id}_{K^n}$. Tästä seuraa, että L_A on injektio, sillä jos $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in K^n$ sellaiset, että $L_A(\mathbf{v}) = L_A(\mathbf{w})$, niin

$$\mathbf{v} = \mathrm{id}_{K^n}(\mathbf{v}) = L_B(L_A(\mathbf{v})) = L_B(L_A(\mathbf{w})) = \mathrm{id}_{K^n}(\mathbf{w}) = \mathbf{w}.$$

Edellisen seurauksen mukaan siitä, että L_A on injektio, seuraa, että se on bijektio. Edellisen kappaleen nojalla tästä puolestaan seuraa, että A on kääntyvä.

Yhtäpitävyys (3)$\Rightarrow$(1) osoitetaan samalla tavalla. □

Matriisin aste ja sarakeavaruus

Olkoon $A \in M(m \times n; K)$ matriisi. Olkoon $L_A : K^m \to K^n$ tähän matriisiin liittyvä kanoninen lineaarinen kuvaus. Matriisin A *aste* $\mathrm{rank}(A)$ määritellään kuvauksen L_A kuvajoukon dimensiona,

$$\mathrm{rank}(A) = \dim \mathrm{Im}\, L_A.$$

Vaikka aste määritellään käyttämällä tiettyä kiinnitettyä lineaarista kuvausta, jonka matriisi on A, itse asiassa sama käsite saadaan kun käytetään mitä tahansa sellaista lineaarista kuvausta $L\colon V \to W$ jolle $[L]_{E',E} = A$. Tämä on seuraavan lemman sisältö. Todistus jätetään harjoitustehtäväksi.

Lemma 2.96. *Olkoot V, W äärellisulotteisia K-vektoriavaruuksia. Olkoon $L\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus. Olkoon E avaruuden V kanta ja E' avaruuden W kanta. Tällöin*

$$\dim \operatorname{Im} L = \operatorname{rank}(A),$$

missä $A = [L]_{E',E}$.

Palautetaan mieleen, että merkinnöillä $c_1(A)$, $c_2(A)$,..., $c_m(A)$ tarkoitamme $(n \times m)$-matriisin A *sarakkeita*. Lisäksi me tulkitsemme jokaisen sarakkeen $c_i(A)$ avaruuden K^n alkiona luonnollisella tavalla ("pystyvektori"). Matriisin A **sarakeavaruus** $\operatorname{Col}(A)$ on sen sarakkeiden virittämä avaruuden K^n aliavaruus,

$$\operatorname{Col}(A) = \operatorname{Span}\{c_1(A), c_2(A), \dots, c_m(A)\}.$$

Olkoon $L_A\colon K^m \to K^n$ matriisiin A liittyvä kanoninen lineaarinen kuvaus. Tällöin kuvauksen L_A määritelmän mukaan $L_A(\mathbf{e}_i) = c_i(A)$, missä $\mathbf{e}_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ on avaruuden K^m standardin kannan i:nnes vektori. Koska kuvauksen L_A kuvajoukko on selvästi vektorien $L_A(\mathbf{e}_i)$, $i = 1, \dots, m$ virittämä, tästä saadaan heti yhtälö

$$\operatorname{Im} L_A = \operatorname{Col}(A).$$

Erityisesti pätee seuraava tulos.

Lemma 2.97. *Matriisin A aste on sama kuin sen sarakeavaruuden* $\operatorname{Col}(A)$ *dimensio.*

Lineaariset yhtälöryhmät

Nyt voidaan vihdoinkin palata lineaarisiin yhtälöryhmiin ja todistaa niiden ratkaisujen lukumäärää koskevat tulokset käytämättä Gaussin eliminointimenetelmiä tai muita vastaavia matriisipyörittelyjä.

Olkoon

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n, \end{cases} \tag{2.98}$$

lineaarinen yhtälöryhmä, jonka kertoimet $(a_{ij})_{i=1,\dots,n, j=1,\dots,m}$ ja vakiot $b_1, \dots, b_n$ ovat kunnan K alkioita. Tällöin $(n \times m)$-matriisia $A = (a_{ij})$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

jonka muodostavat yhtälöryhmän kertoimet, sanotaan yhtälöryhmän 2.98 *perusmatriisiksi*. Tässä matriisissa yhtälöryhmän oikeanpuoleiset vakiot b_i eivät näy ollenkaan. Toinen matriisi, joka liitetään yhtälöryhmään 2.98 on tämän yhtälöryhmän *täydennetty matriisi* $[A \mid \mathbf{w}]$, joka on $(n \times (m+1))$-matriisi

$$[A \mid \mathbf{w}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{bmatrix}.$$

Täydennetty matriisi siis saadaan perusmatriisista lisäämällä siihen viimeisenä vielä yksi sarake, joka on pystyvektori

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix},$$

joka koostuu yhtälöryhmän oikeanpuoleisista vakioista.

Kun yhtälöryhmää 2.98 ratkaistaan Gaussin tai Gauss-Jordanin menetelmillä, käytännössä yleensä suoritetaan alkeisrivitoimituksia sen täydennettyyn matriisiin, ei varsinaiseen yhtälöryhmään, koska se on selkeämpää, mekanisempaa eikä silloin tarvitse kirjoittaa näkyviin ratkaisun kannalta epäoleellisia asioita, kuten muuttujasymboleita eikä esim. turhia plus- tai yhtäsuuruus-merkkejä.

Olemme jo aikaisemmin todenneet, että yhtälöryhmä (2.98) on ekvivalentti lineaarisen yhtälön $L(\mathbf{x}) = \mathbf{w}$ kanssa, missä $L\colon K^m \to K^n$ on lineaarinen kuvaus, joka on määritelty kaavalla

$$L(x_1, \dots, x_m) = (y_1, \dots, y_n),$$
$$y_i = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j.$$

Tässä vaiheessa voidaan itse asiassa todeta, että tämä kuvaus L ei ole mitään muuta kuin yhtälöryhmän perusmatriisiin A liitetty kanoninen kuvaus $L_A\colon K^m \to K^n$.

Yhtälöryhmää (2.98) vastaava homogeeninen lineaarinen yhtälöryhmä on yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = 0_K \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = 0_K \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = 0_K. \end{cases} \tag{2.99}$$

Tämän yhtälöryhmän perusmatriisi on sama matriisi A kuin alkuperäisellä yhtälöryhmällä (2.98). Homogeeninen yhtälöryhmä (2.99) on ekvivalentti homogeenisen lineaarisen yhtälön $L_A(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ kanssa. Tämä yhtälön ratkaisujoukko on taas määritelmän mukaan kuvauksen L_A ydin. Tästä, ja aikaisemmista tuloksista saadaan seuraava tulos.

Lemma 2.100. *Olkoon (2.99) homogeeninen yhtälöryhmä, jossa on m tuntematonta. Tällöin sen ratkaisujoukko on avaruuden K^m aliavaruus $W = \operatorname{Ker} L_A$ jonka dimensio on*

$$\dim W = m - \operatorname{rank}(A),$$

missä A on yhtälöryhmän perusmatriisi.

Todistus. Koska $\operatorname{rank}(A) = \dim \operatorname{Im} L_A$ ja $W = \operatorname{Ker} L_A$, väite seuraa suoraan Propositiosta 2.92. □

Lemmasta 2.15 (takemmin sanottuna sen todistuksesta) saadaan suoraan myös seuraava tulos.

Seuraus 2.101. *Olkoon (2.98) lineaarinen yhtälöryhmä. Tällöin sen ratkaisujoukko on joko tyhjä joukko (jolloin yhtälöryhmä ei ole konsistentti) tai on affiini joukko*

$$\mathbf{w} + W,$$

missä $W = \operatorname{Ker} L_A$ on vastaavan homogeenisen yhtälöryhmän ratkaisujoukko ja $\mathbf{w}$ on jokin yhtälöryhmän (2.98) ratkaisu.

Sovelletaan kuvaukseen L_A propositio 2.92 sekä sen seurauksia.

Tapaus $m > n$ - tuntemattomia on enemmän kuin yhtälöitä.
Seurauksen 2.94 nojalla kuvaus $L_A \colon K^m \to K^n$ ei voi olla injektio. Tämä tarkoittaa sitä, että tämän kuvauksen ydin $\operatorname{Ker} L_A$, joka on samalla vastaavan homogeenisen yhtälöryhmän ratkaisujoukko, ei ole triviaali. Näin ollen vastaavalla homogeenisella yhtälöllä on aina olemassa epätriviaali ratkaisu. Lisäksi, jos tarkasteltavalla yhtälöryhmällä (2.98) on olemassa ainakin yksi ratkaisu $\mathbf{v}$ (eli jos se ei ole ristiriitainen), sen ratkaisujoukko on affiini joukko

$$\mathbf{v} + \operatorname{Ker} L_A$$

(Lemma 2.15). Koska $\operatorname{Ker} L_A$ ei ole nyt triviaali, myös tämä ratkaisujoukko ei ole yksiö. Näin ollen saadaan seuraava tulos (todistettu aikaisemmin $\mathbb{R}$-kertoimisessa tapauksessa Johdanto-luvussa Lemmassa 16).

Propositio 2.102. *Oletetaan, että lineaarisella yhtälöryhmällä (2.98) on muuttujia aidosti enemmän kuin yhtälöitä, $m > n$. Tällöin yhtälöryhmä on joko ristiriitainen tai sen ratkaisu ei ole yksikäsitteinen.*
Toisin sanoen tällaisella yhtälöryhmällä ei voi olla tasan yhtä ratkaisua.

Jos yhtälöryhmä on homogeeninen, sillä on epätriviaali ratkaisu.

Tapaus $m < n$ - tuntemattomia on vähemmän kuin yhtälöitä.
Tällöin seurauksen 2.94 nojalla kuvaus $L_A \colon K^m \to K^n$ ei voi olla surjektio. Tällöin on olemassa $\mathbf{w} \in K^n$ siten, että $\mathbf{w} \notin \operatorname{Im} L$ eli yhtälöllä $L_A(\mathbf{x}) = \mathbf{w}$ ei ole ratkaisuja. Tämä tarkoittaa sitä, että jos yhtälöryhmän (2.98) kertomia (a_{ij}) pidetään kiinnitettynä, voidaan aina löytää sellaisia oikeanpuoleisia vakioita $b_1, \ldots, b_n$, joilla varustettuna yhtälöryhmällä ei ole ratkaisuja.

Tapaus $m = n$ - tuntemattomia on vähemmän kuin yhtälöitä.
Tällöin seurauksen 2.94 nojalla kuvaus $L_A\colon K^m \to K^n$ on injektio jos ja vain jos se on surjektio. Se, että tämä kuvaus on injektio tarkoittaa sitä, että $\operatorname{Ker} L_A$ on triviaali, eli täsmälleen sitä, että vastaavalla homogeenisella yhtälöryhmällä on vain triviaali ratkaisu. Tällöin yhtälöryhmän (2.98) ratkaisu on aina yksikäsitteinen (jos olemassa), sillä se on ytimen translaatio.

Kuvauksen surjektivisyys taas tarkoittaa sitä, että yhtälöllä $L_A(\mathbf{x}) = \mathbf{w}$ on aina ratkaisu. Näin ollen tässä tapauksessa saadaan seuraavat tulokset (jotka on myös todistettu aikaisemmin Johdanto-luvussa Gaussin eliminointimenetelmän avulla).

Lemma 2.103. *Oletetaan, että lineaarisessa yhtälöryhmässä (2.98) on sama määrä muuttujia ja yhtälöitä eli $m = n$. Tällöin yhtälöryhmä on tasan yksi ratkaisu jos ja vain jos vastaavalla homogeenisella yhtälöryhmällä on ainoastaan triviaali ratkaisu $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0_K$.*

Lemma 2.104. *Olkoon*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{jk}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

homogeeninen lineaarinen yhtälöryhmä, jolla on sama muuttujien ja yhtälöiden lukumäärä. Oletetaan, että tällä yhtälöryhmällä on vain triviaali ratkaisu $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Tällöin millä tahansa $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ lineaarisella yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu.

2.4. Duaali-avaruus

Olkoon V K-vektoriavaruus. Koska $K = K^1$ on itse (yksiulotteinen) K-vektoriavaruus luonnollisella tavalla, voimme tarkastella lineaarisia kuvauksia $L\colon V \to K$. Tällaisia kuvauksia sanotaan myös avaruuden V *lineaarisiksi muodoiksi*. Lineaariset muodot muodostavat K-vektoriavaruuden $L(V, K)$. Tätä vektoriavaruutta sanotaan avaruuden V **duaaliavaruudeksi** tai yksinkertaisesti sen **duaaliksi**. Duaali $L(V, K)$ merkitään myös symbolilla V^*.

Olkoon V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus ja olkoon $E = (\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_m)$ jokin sen kanta. Propositiosta 2.57 seuraa, että jokaisella $j = 1, \ldots, m$ on olemassa tasan yksi lineaarinen kuvaus $\varepsilon^j\colon V \to K$ jolle pätee

$$\varepsilon^j(\mathbf{e}_i) = \begin{cases} 1, & \text{jos } j = i, \\ 0, & \text{jos } j \neq i. \end{cases}$$

Lause 2.105. *Olkoot V, $E = (\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_m)$ ja ε^j, $j = 1, \ldots, m$ kuten yllä. Tällöin $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^m)$ on duaali-avaruuden V^* kanta. Erityisesti V^* on myös äärellisulotteinen ja*

$$\dim V^* = \dim V.$$

Todistus. Tämä on erikoistapaus Korollarin 2.65 tuloksesta, kun valitaan $W = K$ ja sen kannaksi yhden alkion joukko $\{1_K\}$. ☐

Olkoon $E = (\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_m)$ äärellisulotteisen K-vektoriavaruuden V kanta. Yllä konstruoitua duaali-avaruuden V^*:n kantaa

$$(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^m)$$

sanotaan kannan E *duaaliksi kannaksi.*

Lineaarikuvauksen duaali ja sen matriisi.
Duaalin konstruktio voidaan suorittaa myös vektoriavaruuksien väliselle lineaariselle kuvaukselle. Olkoot V, W K-vektoriavaruuksia ja $L\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus. Olkoon $A\colon W \to K$ avaruuden W duaalin W^* alkio. Tällöin yhdistetty kuvaus $A \circ L$ on lineaarinen kuvaus $V \to K$, toisin sanoen duaalin V^* alkio. Näin saadaan määriteltyä kuvaus $L^*\colon W^* \to V^*$,

$$L^*(A) = A \circ L = AL.$$

Tämä kuvaus on lineaarinen, sillä kaikilla $A, B \in W^*$, $k \in K$ pätee

$$L^*(A + B) = (A + B)L = AL + BL = L^*(A) + L^*(B),$$

$$L^*(kA) = (kA)L = k(AL) = kL^*(A).$$

Kuvausta $L^*\colon W^* \to V^*$ sanotaan kuvauksen $L\colon V \to W$ *duaalikuvaukseksi* tai yksinkertaisesti sen *duaaliksi*. Huomaa, että duaalikuvauksen suunta on "päinvastainen" kuvauksen L verrattuna - sen lähtöavaruus on kuvauksen L maaliavaruuden duaali ja maaliavaruus on kuvauksen L lähtöavaruuden duaali.

Duaalikuvauksen konstruktio onnistuu jokaisella $L \in L(V, W)$, joten voimme määritellä "tähti"-kuvauksen ${}^*\colon L(V, W) \to L(W^*, V^*)$ kaavalla

$${}^*(L) = L^*.$$

Helposti nähdään, että * on lineaarinen kuvaus K-vektoriavaruuksien $L(V, W)$ ja $L(W^*, V^*)$ välillä. Mitä tulee kuvausten yhdistämiseen, niin *-operaatio "kääntää" niiden järjestystä. Täsmällisesti sanoen olkoon U myös K-vektoriavaruus ja oletetaan, että $L'\colon W \to U$ on lineaarinen kuvaus. Tällöin yhdistetty kuvaus $L'L\colon V \to U$ on lineaarinen, joten on olemassa sen duaali $(L'L)^*\colon U^* \to V^*$. Olkoon $A\colon U \to K$ duaalin U^* alkio. Tällöin, kuvausten yhdistämisen liitännäisyyden nojalla

$$(L'L)^*(A) = A \circ (L'L) = (A \circ L') \circ L = (L'^*(A)) \circ L = L^*(L'^*(A)) = (L^* \circ L'^*)(A).$$

Näin ollen kaikilla lineaarisilla kuvauksilla $L\colon V \to W$, $L'\colon W \to U$ pätee

$$(L'L)^* = L^*L'^*. \tag{2.106}$$

Operaatiota * voidaan siis sanoa "antimorfismiksi". Toinen nimitys mitä tämäntyyppisestä "suuntia ja järjestyksiä kääntävästä" operaatiosta matematiikasta käytetään on *kontravariantti funktori.*

Duaaliakuvauksen matriisi

Olkoot V, W äärellisulotteiset K-vektoriavaruudet. Olkoot $E = (\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_m)$, $E' = (\mathbf{e}'_1, \ldots \mathbf{e}'_n)$ vastaavasti avaruuksien V ja W kanta. Olkoon $L\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus. Tällöin on olemassa $(n \times m)$-matriisi $A = (a_{ij}) = [L]_{E',E}$, kuvauksen L matriisi näiden kantojen suhteen. Matriisin A kertoimet määräytyvät yhtälöistä

$$L(\mathbf{e}_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\mathbf{e}'_k,\ \ j = 1, \ldots, m.$$

Lauseen 2.105 nojalla duaaliavaruudet W^*, V^* ovat myös äärellisulotteiset ja kantoja E, E' vastaavat duaalin V^* duaalikanta

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^m)$$

ja duaalin W^* duaalikanta

$$\boldsymbol{\eta} = (\eta^1, \ldots, \eta^m).$$

Kuvauksella L^* on olemassa näiden duaalikantojen suhteen $(m \times n)$-matriisi

$$B = (b_{ji}) = [L^*]_{\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\eta}}.$$

Tutkitaan mikä yhteys matriiseillä A ja B on. Määritelmän mukaan jokaisella $i = 1, \ldots, n$ pätee

$$L^*(\eta^i) = \sum_{l=1}^{m} b_{li}\varepsilon^l \tag{2.107}$$

Tämän yhtälön molemmalla puolella esiintyy eräs lineaarinen kuvaus $V \to K$. Lasketaan tämän kuvauksen arvo avaruuden V kannan alkiossa $\mathbf{e}_j$, jokaisella $j = 1, \ldots, m$. Vasemmalla puolella tällöin saadaan

$$(L^*(\eta^i))(\mathbf{e}_j) = (\eta^i \circ L)(\mathbf{e}_j) = \eta^i(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\mathbf{e}'_k) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(\eta^i(\mathbf{e}'_k)) = a_{ij},$$

sillä duaalikannan määritelmän mukaan pätee $\eta^i(\mathbf{e}'_k) = \delta_{ik}$. Yhtälön 2.107 oikealla puolella saadaan samalla tavalla

$$(\sum_{l=1}^{m} b_{li}\varepsilon^l)(\mathbf{e}_j) = \sum_{l=1}^{m}(b_{li}\varepsilon^l)(\mathbf{e}_j) = b_{ji}.$$

Näin ollen kaikilla $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ pätee

$$a_{ij} = b_{ji}.$$

Toisin sanoen matriisi B on niin sanottu matriisin A **transpoosi** A^T. Palautetaan mieleen transpoosin määritelmä. Olkoon A $(n \times m)$-kokoinen K-kertoiminen matriisi. Tällöin sen transpoosi A^T on sellainen $(m \times n)$-kokoinen matriisi, jolle pätee $A^T(i,j) = A(j,i)$. Toisin sanoen transpoosi saadaan kun kaikki matriisin rivit muutetaan sarakkeiksi ja kaikki sarakkeet muutetaan riveiksi. Edellisen kappaleen nojalla saadaan seuraava tulos.

Propositio 2.108. *Olkoon E äärellisulotteisen K-vektoriavaruuden V kanta ja olkoon $\boldsymbol{\varepsilon}$ tämän kannan duaalikanta duaaliavaruudessa V^*. Vastaavasti olkoon E' äärellisulotteisen K-vektoriavaruuden W kanta ja olkoon $\boldsymbol{\eta}$ tämän kannan duaalikanta duaaliavaruudessa W^*. Olkoon $L\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus. Tällöin duaalikuvauksen L^* matriisi kantojen $\boldsymbol{\eta}$ ja $\boldsymbol{\varepsilon}$ suhteen on kuvauksen L matriisin kantojen E ja E' suhteen transpoosi. Toisin sanoen*

$$[L^*]_{\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\eta}} = [L]^T_{E',E}.$$

Tämän tuloksen kautta saadaan matriisin transpoosin käsitteelle luonnollinen ”lineaarikuvauksellinen” tulkinta. Koska matriisien ja lineaarikuvausten vastaavuus on yksikäsitteinen, tästä voidaan päätellä suoraan seuraavat transpoosin ominaisuudet.

Lemma 2.109. *Olkoot A, A_1, A_2 $(n \times m)$-kokoisia K-kertoimisia matriisia, B $(m \times p)$-kokoinen K-kertoiminen matriisi ja $k \in K$. Tällöin*

$$(A_1 + A_2)^T = A_1^T + A_2^T, \tag{2.110}$$

$$(kA)^T = k(A^T), \tag{2.111}$$

$$(AB)^T = B^T A^T, \tag{2.112}$$

Todistus. Korvataan jokainen matriisi A vaikkapa kanonisella kuvauksella $L_A\colon K^m \to K^n$ ja matriisin A transpoosi sen duaalikuvauksellaan L_A^*. Tällöin väitteet saadaan suoraan vastaavista lineaarisia kuvauksia koskevista väitteistä, esimerkiksi yhtälö 2.112 on matriisiversio yhtälöstä 2.106. Yksityiskohdat jätetään lukijalle pohdittavaksi. □

Seuraavaksi tutkitaan duaalikuvauksen L^* ydintä ja kuvajoukkoa.

Lemma 2.113. *Olkoon $L\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus. Tällöin*

$$\operatorname{Ker} L^* = \{A \in W^* \mid A(\mathbf{w}) = 0 \text{ kaikilla } \mathbf{w} \in \operatorname{Im} L\}.$$

$$\operatorname{Im} L^* = \{A \in V^* \mid \operatorname{Ker} L \subset \operatorname{Ker} A\}.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Seuraus 2.114. *Olkoot V ja W äärellisulotteisia K-vektoriavaruuksia. Olkoon $L\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus. Tällöin*

$$\dim \operatorname{Ker} L^* = \dim W - \dim \operatorname{Im} L, \text{ ja}$$

$$\dim \operatorname{Im} L^* = \dim \operatorname{Im} L. \tag{2.115}$$

Todistus. Osoitetaan ensin, että

$$\dim \operatorname{Ker} L^* = \dim W - \dim \operatorname{Im} L.$$

Osajoukko $\operatorname{Im} L$ on avaruuden W aliavaruus, joten Lemman 2.48 nojalla W:llä on kanta $E = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ siten, että $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ on aliavaruuden $\operatorname{Im} L$ kanta, $k = \dim \operatorname{Im} L$. Kantaa E vastaa duaaliavaruuden W^* on duaalikanta

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n).$$

Väitämme, että duaaliavaruuden W^* aliavaruus $\operatorname{Ker} L^*$ on vapaan jonon $(\varepsilon^{k+1}, \ldots, \varepsilon^n)$ virittämä aliavaruus. Jos tämä on totta, niin

$$\dim \operatorname{Ker} L^* = n - k = \dim W - \dim \operatorname{Im} L,$$

ja olemme valmiit.

Edellisen lemman nojalla $\operatorname{Ker} L^*$ koostuu tasan niistä lineaarisista kuvauksista $A \colon W \to K$, joille pätee $A| \operatorname{Im} L = 0$. Osoitetaan, että $A \in \operatorname{Ker} L^*$ jos ja vain jos $A(\mathbf{v}_i) = 0$ kaikilla $i = 1, \ldots, k$ (eli kaikilla aliavaruuden $\operatorname{Im} L$ kannan alkioilla). Jos $A \in \operatorname{Ker} L^*$, eli $A \circ L = 0$, niin $A(\mathbf{v}) = 0$ kaikilla $\mathbf{v} \in \operatorname{Im} L$, erityisesti $A(\mathbf{v}_i) = 0$ kaikilla $i = 1, \ldots, k$. Kääntäen, oletetaan, että $A(\mathbf{v}_i) = 0$ kaikilla $i = 1, \ldots, k$. Olkoon $\mathbf{v} \in \operatorname{Im} L$. Koska $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ on avaruuden $\operatorname{Im} L$ kanta, on olemassa lineaarinen esitys

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathbf{v}_i.$$

Tällöin lineaarisuuden nojalla

$$A(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{k} a_i A(\mathbf{v}_i) = 0.$$

Olemme osoittaneet, että $A \in \operatorname{Ker} L^*$ jos ja vain jos $A(\mathbf{v}_i) = 0$ kaikilla $i = 1, \ldots, k$.

Kun $l > k$, $\varepsilon_l(\mathbf{v}_i) = 0$ kaikilla $i = 1, \ldots, k$. Tästä seuraa, että vapaan jonon $(\varepsilon^{k+1}, \ldots, \varepsilon^n)$ jokainen jäsen on aliavaruuden $\operatorname{Ker} L^*$ alkio, joten myös tämän jonon virittämä aliavaruus U on avaruuden $\operatorname{Ker} L^*$ osajoukko. Kääntäen olkoon $A \in \operatorname{Ker} L^*$ mielivaltainen, tällöin erityisesti $A \in W^*$, joten on olemassa yksikäsitteinen lineaarinen esitys muodossa

$$A = \sum_{j=1}^{n} b_j \varepsilon^j.$$

Koska $A \in \operatorname{Ker} L^*$, pätee erityisesti $A(\mathbf{v}_i) = 0$ jokaisella $i = 1, \ldots, k$, mikä on taas yhtäpitävä sen kanssa, että

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \varepsilon^j(\mathbf{v}_i) = A(\mathbf{v}_i) = 0$$

jokaisella $i = 1, \ldots, k$. Näin ollen

$$A = \sum_{j=k+1}^{n} b_j \varepsilon^j \in U.$$

Olemme osoittaneet, että $\operatorname{Ker} L^* = U$, mistä seuraa ensimmäinen väite.

Toinen väite seuraa Propositiosta 2.92 ja ensimmäisestä väitteestä seuraaavasti:

$$\dim \operatorname{Im} L^* = \dim W^* - \dim \operatorname{Ker} L^* = \dim W - (\dim W - \dim \operatorname{Im} L) = \dim \operatorname{Im} L.$$

□

Seuraus 2.116. *Olkoot V ja W äärellisulotteiset K-vektoriavaruudet. Olkoon $L\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus. Tällöin*

(1) Duaalikuvaus L^* on injektio jos ja vain jos L on surjektio.

(2) Duaalikuvaus L^* on surjektio jos ja vain jos L on injektio.

(3) Duaalikuvaus L^* on bijektio jos ja vain jos L on bijektio.

Todistus. (1) L^* on injektio jos ja vain jos $\dim \operatorname{Ker} L^* = 0$. Edellisen korollaarin nojalla tämä on yhtäpitävä sen kanssa, että $0 = \dim W - \dim \operatorname{Im} L$, eli $\dim \operatorname{Im} L = \dim W$. Lemman 2.48 mukaan tämä on mahdollista jos ja vain jos $\operatorname{Im} L = W$ eli jos ja vain jos L on surjektio.
(2) Osoitetaan samalla tavalla (HT).
(3) Seuraa suoraan (1) ja (2):stä. □

Esimerkki 2.117. *Olkoon W vektoriavaruuden V aliavaruus. Tällöin inkluusiokuvaus $i\colon W \hookrightarrow V$ on lineaarinen injektio. Edellisen nojalla $i^*\colon V^* \to W^*$ on surjektio. Tämä on helppo nähdä myös suoraan. Nimittäin kun määritelmiä avataan auki, nähdään, että kuvauksen i^* surjektiivisyys tarkoittaa täsmälleen sitä, että jokainen lineaarinen muoto $L\colon W \to K$ voidaan jatkaa koko avaruuden lineaariseksi muodoksi $L\colon V \to K$. Tämä puolestaan seuraa siitä, että voimme aina jatkaa aliavaruuden W kannan koko avaruuden V kannaksi, jolloin helposti päästään jatkamaan kuvausta L Proposition 2.57 avulla (mieti yksityiskohdat läpi).*

Matriisin rivi- ja sarakeavaruudet

Sovelluksena yllä osoitetusta näytetään, että K-kertoimisen matriisin rivi- ja sarakeavaruudet ovat aina samaa dimensiota. Olkoon $A \in M(n \times m; R)$ matriisi renkaan R yli,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Matriisin **sarakeavaruuden** $\operatorname{Col}(A)$ olemme määritelleet jo aikaisemmin, se on matriisin sarakkeiden virittämä K^m:n aliavaruus. Matriisin **riviavaruus** $\operatorname{Row}(A)$ määritellään samalla tavalla - se on kaikkien matriisin rivien virittämä K^n:n aliavaruus. Kun $n \neq m$, sarake- ja riviavaruuksilla ei näytä olevan mitään yhteistä - ovathan ne silloin jopa eri avaruuksien aliavaruudet. Kuitenkin osoittautuu, että niillä on sama dimensio.

Propositio 2.118. *Olkoon K kunta ja $A \in M(m \times n; K)$ mielivaltainen matriisi. Tällöin*

$$\dim \mathrm{Row}(A) = \dim \mathrm{Col}(A) = \mathrm{rank}(A).$$

Todistus. Yhtälö $\dim \mathrm{Col}(A) = \mathrm{rank}(A)$ osoitettiin jo aikaisemmin Lemmassa 2.97, joten riittää osoittaa, että

$$\dim \mathrm{Row}(A) = \dim \mathrm{Col}(A).$$

Olkoon $L_A \colon K^n \to K^m$ matriisia A vastaava kanoninen lineaarinen kuvaus. Tällöin $\mathrm{Col}\, A$ on itse asiassa sama joukko kuin kuvauksen L_A kuvajoukko $\mathrm{Im}\, L_A$. Seurauksen 2.114 nojalla pätee

$$\dim \mathrm{Im}\, L_A = \dim \mathrm{Im}\, L_A^*.$$

Toisaalta (Lemma 2.108) mukaan kuvauksen L_A^* matriisi duaalikantojen suhteen on matriisin A transpoosi A^T. Lemman 2.96 sekä Lemman 2.97 nojalla tästä saadaan, että

$$\dim \mathrm{Im}\, L_A^* = \mathrm{rank}\, A^T = \dim \mathrm{Col}\, A^T.$$

Kuitenkin transpoosin määritelmän nojalla selvästi pätee $\mathrm{Col}\, A^T = \mathrm{Row}\, A$ (transpoosin sarakkeet ovat alkuperäisen matriisin rivejä). Näin ollen

$$\dim \mathrm{Col}\, A = \dim \mathrm{Im}\, L_A = \dim \mathrm{Im}\, L_A^* = \dim \mathrm{Col}\, A^T = \dim \mathrm{Row}\, A.$$

□

Biduaali ja refleksiivisyys

Olkoon V K-vektoriavaruus. Tällöin sen duaali V^* on myös K-vektoriavaruus, joten voimme muodostaa sen duaaliavaruuden $(V^*)^*$. Tätä duaalin duaalia merkitään V^{**} ja sanotaan avaruuden V *biduaaliksi* tai yksinkertaisesti sen *toiseksi duaaliksi.*

Jos V on äärellisulotteinen, pätee

$$\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V,$$

mistä seuraa erityisesti, että kaikki kolme avaruutta V, V^*, V^{**} ovat erityisesti isomorfisia keskenään. Osoittautuu, että tässä tapauksessa on olemassa jopa niin sanottu *kanoninen* eli *luonnollinen* isomorfismi $V \cong V^{**}$. Tätä äärellisulotteisten vektoriavaruuksien ominaisuutta sanotaan *refleksiivisyydeksi.* Tässä yhteydessä sana ”luonnollinen” viittaa siihen, että tämä isomorfismi *ei riipu kantojen valinnoista.* Jätetään lukijalle harjoitustehtäväksi näyttää, että isomorfismi $V \to V^*$ joka kuvaa kannan E duaalikannakseen yleensä riippuu kannan valinnasta eikä näin ollen ole ”kanoninen” tai ”luonnollinen”.

Kanoninen kuvaus $\Phi \colon V \to V^{**}$ (missä V on mielivaltainen vektoriavaruus, ei välttämättä äärellisulotteinen) konstruoidaan seuraavasti. Olkoon $\mathbf{v} \in V$. Kuva-alkion $\Phi(\mathbf{v})$ on oltava biduaalin V^{**} alkio, eli lineaarinen kuvaus $\Phi(\mathbf{v}) \colon V^* \to K$. Olkoon $L \in V^*$ lineaarinen kuvaus $L \colon V \to K$. Tällöin asetamme

$$\Phi(\mathbf{v})(L) = L(\mathbf{v}) \in K.$$

Kun L käy läpi duaalin V^* alkioita, tämä määrittelee kuvauksen $\Phi(\mathbf{v})\colon V^* \to K$. Tarkistetaan, että tämä kuvaus on lineaarinen kaikilla $\mathbf{v} \in V$. Olkoot $L, L' \in V^*$, $k \in K$. Tällöin

$$\Phi(\mathbf{v})(L + L') = (L + L')(\mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) + L'(\mathbf{v}) = \Phi(\mathbf{v})(L) + \Phi(\mathbf{v})(L'),$$

$$\Phi(\mathbf{v})(kL) = (kL)(\mathbf{v}) = kL(\mathbf{v}) = k\Phi(\mathbf{v})(L).$$

Näin ollen $\Phi(\mathbf{v})$ on lineaarinen kuvaus $V^* \to K$ eli on biduaalin V^{**} alkio. Koska tämä pätee kaikilla $\mathbf{v} \in V$, voidaan määritellä kuvaus $\Phi\colon V \to V^{**}$, $\mathbf{v} \mapsto \Phi(\mathbf{v})$.

Seuraavaksi tarkistetaan, että näin määritelty kuvaus $\Phi\colon V \to V^{**}$ on lineaarinen. Olkoot $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$, $k \in K$, $L \in V^*$. Tällöin

$$\Phi(\mathbf{v} + \mathbf{v}')(L) = L(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = L(\mathbf{v}) + L(\mathbf{v}') = \Phi(\mathbf{v})(L) + \Phi(\mathbf{v}')(L) = (\Phi(\mathbf{v}) + \Phi(\mathbf{v}'))(L),$$

$$\Phi(k\mathbf{v})(L) = L(k\mathbf{v}) = kL(\mathbf{v}) = k(\Phi(\mathbf{v})(L)) = (k\Phi(\mathbf{v}))(L).$$

Koska tämä pätee kaikilla $L \in V^*$, on voimassa yhtälöt

$$\Phi(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = \Phi(\mathbf{v}) + \Phi(\mathbf{v}'),$$

$$\Phi(k\mathbf{v}) = k\Phi(\mathbf{v}).$$

Toisin sanoen kuvaus $\Phi\colon V \to V^{**}$ on lineaarinen.

Seuraavassa propositiossa annetaan formaali, kategoriateoreettinen selitys väitteelle "Φ on luonnollinen".

Propositio 2.119. *Olkoot V, W K-vektoriavaruuksia ja olkoon $L\colon V \to W$ lineaarinen kuvaus. Olkoot $\Phi_V : V \to V^{**}$, $\Phi_W : W \to W^{**}$ kanoniset kuvaukset, $\Phi_V(\mathbf{v})(L') = L'(\mathbf{v})$ ja vastaavasti W:lle. Tällöin*

$$L^{**} \circ \Phi_V = \Phi_W \circ L$$

eli diagrammi

(2.120)
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\Phi_V"] & W \arrow[d, "\Phi_W"] \\ V^{**} \arrow[r, "L^{**}"] & W^{**}. \end{tikzcd}$$

kommutoi. Tässä L^{**} on kuvauksen $L^* : W^* \to V^*$ duaali-kuvaus eli kuvauksen L biduaali.

Todistus. Harjotustehtävä. □

Propositio 2.121. *Olkoon V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus. Tällöin kanoninen kuvaus $\Phi\colon V \to V^{**}$ on vektoriavaruuksien välinen isomorfismi.*

Todistus. Tiedetään, että $\dim V = \dim V^{**}$. Tästä syystä riittää osoittaa, että Φ on injektio (Seuraus 2.94).

Osoitetaan, että $\Phi\colon V \to V^{**}$ on injektio. Koska tämä kuvaus on lineaarinen, riittää osoittaa, että sen ydin on triviaali. Olkoon $\mathbf{v} \in V$ sellainen, että $\Phi(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

Olkoon $E = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ vektoriavaruuden V kanta ja olkoon $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ kannan E duaalikanta. On olemassa lineaarinen esitys

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{e}_i.$$

Jokaisella $i = 1, \dots, n$ saadaan tällöin

$$a_i = \varepsilon_i(\mathbf{v}) = (\Phi(\mathbf{v}))(\varepsilon_i) = 0_K,$$

joten $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$. Näin ollen Φ on injektio. □

Äärellisulotteisen vektoriavaruuden *refleksiivisyys* (eli edellisen proposition tulos) tarkoittaa konseptualisella tasolla seuraavaa. Samalla tavalla kuin ajattelemme avaruutta V^* avaruuden V duaali-avaruutena, voimme myös kääntäen ajatella avaruutta V avaruuden V^* duaaliavaruutena V^{**} - isomofirsmin $\Phi\colon V \to V^{**}$ kautta. Avaruudet V ja V^* ovat siis tämän tulkinnan mukaan "toistensa duaaleja" symmetrisellä tavalla. Duaaliavaruuden V^* alkio L "operoi" avaruuden V alkiolla $\mathbf{v} \in V$ - lopputuloksena saadaan skalaari $L(\mathbf{v})$. Yhtä hyvin vektori $\mathbf{v} \in V$ "operoi" duaaliavaruuden V^* alkiolla L - tämän operaation lopputuloksena saadaan taas sama skalaari $L(\mathbf{v})$. Usein käytetään merkintää $\langle L, x\rangle$ perinteisen "funktionaalisen" merkinnän $L(\mathbf{v})$ sijaan. Tällä tavalla korostetaan, että $L \in V^*$ ja $\mathbf{v}$ ovat samanarvoisessa, symmetrisessä asemassa. Kuvaus $(L, \mathbf{v}) \mapsto \langle L, \mathbf{v}\rangle$ on tärkeä esimerkki *bilineaarisesta muodosta*, joita käsittelemme seuraavassa aliluvussa.

2.5. Multilineaariset kuvaukset ja determinantti

Olkoot $V_1, V_2, \dots, V_n$ ja W K-vektoriavaruuksia. Olkoon $F\colon V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \to W$ kuvaus. Kuvaus F on siis määritelty joukkojen V_i, $i = 1, \dots, n$ *karteesisessa tulossa*, jonka alkiot ovat järjestyt jonot $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$, missä $\mathbf{v}_i \in V_i$ kaikilla $i = 1, \dots, n$. Voidaan sanoa, että F *riippuu n:stä muuttujasta.*

Olkoon $i \in \{1, \dots, n\}$ jokin indeksi. Kiinnitetään *jokaisessa vektoriavaruudessa* V_j **paitsi** avaruudessa V_i yksi vektori $\mathbf{v}_j \in V_j$, $j \neq i$. Määritellään kuvaus

$$F^i = F^i_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n}\colon V_i \to W$$

kaavalla

$$F^i(\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n) \text{ kaikilla } \mathbf{v} \in V_i.$$

Toisin sanoen annetaan kaikille muuttujille, paitsi i:nnelle, vakioarvot ja tarkastellaan näin syntyvää kuvauksen F "rajoittumaa", joka riippuu vain muuttujasta $\mathbf{v} \in V_i$.

Jos tällainen rajoittuma on aina *lineaarinen* kuvaus $V_i \to W$, kaikilla mahdollisilla $i = 1, \dots, n$ ja vektorien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ valinnoilla, sanomme kuvausta F *n-lineaariseksi.* Toisin sanoen kuvaus

$$F\colon V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \to W$$

on *n-lineaarinen* jos ja vain jos kaikilla $i = 1, \dots, n$, kaikilla $\mathbf{v}_1 \in V_1, \mathbf{v}_2 \in V_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1} \in V_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1} \in V_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n \in V_n$, kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V_i$ ja kaikilla $k \in K$ pätevät yhtälöt

$$F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v} + \mathbf{v}', \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n) =$$

$$= F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n) + F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}', \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n),$$

ja

$$F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, k\mathbf{v}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n) = kF(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n).$$

Kuvausta, joka on n-lineaarinen jollakin $n \in \mathbb{N}$, sanotaan yleisesti *multilineaariseksi.* 1-lineaarinen kuvaus on sama asia kuin lineaarinen kuvaus $L\colon V \to W$. 2-lineaarisia kuvauksia sanotaan *bilineaarisiksi.* Bilineaarinen kuvaus on siis kuvaus $F\colon V_1 \times V_2 \to W$ jolle pätee

$$\begin{aligned} F(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2) &= F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + F(\mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2), \\ F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2') &= F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2'), \\ F(k\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) &= kF(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = F(\mathbf{v}_1, k\mathbf{v}_2), \end{aligned}$$

kaikilla $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1' \in V_1$, $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2' \in V_2$, $k \in K$.

Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja olkoot $V_1, V_2, \ldots, V_n$ ja W K-vektoriavaruuksia. Kaikkien n-lineaaristen kuvausten $F\colon V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n \to W$ muodostamaa joukkoa merkitään

$$L(V_1, V_2, \ldots, V_n; W).$$

Aivan kuten erikoistapauksessa $n = 1$ (lineaaristen kuvausten joukko $L(V, W)$), tällä joukolla on luonnollinen K-vektoriavaruuden struktuuri, jonka laskutoimitukset määritellään pisteittäin ehdoilla

$$(F + F')(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) = F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) + F'(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n),$$

$$(kF)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) = k \cdot F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n).$$

Se tosiasia, että nämä kaavat todellakin määrittelevät laskutoimitukset $+$, $\cdot$ joukossa $L(V_1, V_2, \ldots, V_n; W$ sekä se, että kolmikko

$$(L(V_1, V_2, \ldots, V_n; W), +, \cdot)$$

on K-vektoriavaruus, osoitetaan samalla tavalla kun tapauksessa $n = 1$ eli avaruuden $L(V, W)$ kohdalla. Skalaarikertolaskun kohdalla tarvitaan kertolaskun vaihdannaisuutta. Yksityiskohtien läpikäynti jätetään lukijalle.

Myös seuraava Proposition 2.57 yleistys multilineaarisille kuvauksille pätee samantyyppisellä todistuksella, joten sen verifiointi jätetään lukijalle mietittäväksi. Palautetaan mieleen, että merkintä $[k]$, missä $k \in \mathbb{N}$, tarkoittaa joukkoa $\{1, \ldots, k\}$.

Propositio 2.122. *Olkoon $n \in \mathbb{N}$, $V_1, \ldots, V_n$ ja W K-vektoriavaruuksia. Oletetaan, että V_i on äärellisulotteinen jokaisella $i = 1, \ldots, n$, olkoon $(\mathbf{v}^i_j)_{j=1,\ldots,m_i}$ sen kanta, $m_i =$* $\dim V_i$. *Olkoon $(\mathbf{w}_{j_1,\ldots,j_n})$ kokoelma vektoriavaruuden W vektoreita, joka on indeksoitu karteesisella tulolla $[m_1] \times [m_2] \times \ldots \times [m_n]$.*

Tällöin on olemassa yksikäsitteinen n-lineaarinen kuvaus $F\colon V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n \to W$ jolle pätee

$$F(\mathbf{v}^1_{j_1}, \mathbf{v}^2_{j_2}, \ldots, \mathbf{v}^n_{j_n}) = \mathbf{w}_{j_1, j_2, \ldots, j_n}$$

kaikilla $(j_1, j_2, \ldots, j_n) \in [m_1] \times [m_2] \times \ldots \times [m_n]$.

Havainnollisesti edellinen Propositio siis sanoo, että riittää antaa multilineaarisen kuvauksen arvoja jonoilla $\mathbf{v}^1_{j_1}, \mathbf{v}^2_{j_2}, \dots, \mathbf{v}^n_{j_n}$, missä $\mathbf{v}^i_{j_i}$ on poimittu jostakin avaruuden V_i kiinnitetystä kannasta. Periaate on samanlainen kuin lineaarisille kuvauksille, joiden kohdalla riittää kertoa miten kannan alkiot kuvautuvat.

Propositio 2.122 pätee myös yhtä hyvin tilanteissa, joissa avaruuksien kannat eivät ole välttämättä äärellisiä, samantyyppisellä todistuksella. Käytämme tätä havaintoa hyväksi myöhemmin polynomien teorian yhteydessä luvussa 3.2.

Esimerkkejä 2.123. *(1) Tarkastellaan $\mathbb{R}$-vektoriavaruuksia $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$. Soveltamalla edellistä propositiota näiden vektoriavaruuksien standardikantoihin, nähdään, että on olemassa yksikäsitteinen 3-lineaarinen kuvaus $F\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, jolle pätee*

$$F((1,0),1,(1,0,0)) = (1,1,0,0),$$
$$F((0,1),1,(1,0,0)) = (-2,0,3,2),$$
$$F((1,0),1,(0,1,0)) = (0,1,-1,0),$$
$$F((0,1),1,(0,1,0)) = (3,1,3,-2),$$
$$F((1,0),1,(0,0,1)) = (0,1,-1,0),$$
$$F((0,1),1,(0,0,1)) = (5,0,7,-1).$$

Johdetaan kuvaukselle F kaava. Olkoon $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $z \in \mathbb{R}$, $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$. Tällöin multilineaarisuuden nojalla

$$F((x,y),z,(u,v,w)) = F(x(1,0)+y(0,1),z,(u,v,w)) =$$

$$xF((1,0),z1,(u,v,w)) + yF((0,1),z1,(u,v,w)) =$$
$$xzF((1,0),1,(u,v,w)) + yzF((0,1),1,(u,v,w)).$$

Koska $(u,v,w) = u(1,0,0)+v(0,1,0)+w(0,0,1)$, pätee

$$F((1,0),1,(u,v,w)) = uF((1,0),1,(1,0,0)) + vF((1,0),1,(0,1,0)) + wF((1,0),1,(0,0,1)) =$$

$$u(1,1,0,0)+v(0,1,-1,0)+w(0,1,-1,0) = (u, u+v+w, -v-w, 0).$$

Vastaavasti

$$F((0,1),1,(u,v,w)) = uF((0,1),1,(1,0,0)) + vF((0,1),1,(0,1,0)) + wF((0,1),1,(0,0,1)) =$$

$$u(-2,0,3,2)+v(3,1,3,-2)+w(5,0,7,-1) = (-2u+3v+5w, v, 3u+3v+7w, 2u-2v-w).$$

Näin ollen

$$F((x,y),z,(u,v,w)) = xz(u,u+v+w,-v-w,0)+yz(-2u+3v+5w,v,3u+3v+7w,2u-2v-w) =$$

$$(xzu-2yzu+3yzu+5yzw, xzu+xzv+xzw+yzv, -xzv-xzw+3yzu+3yzv+7yzw, 2yzu-2yzv-yzw).$$

(2) *Edellisen Proposition nojalla on olemassa yksikäsitteinen $\mathbb{R}$-bilineaarinen kuvaus $F\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jolle pätee $F(1,1)=1$ (koska $\{1\}$ on $\mathbb{R}$-vektoriavaruuden $\mathbb{R}$ kanta). Tällöin kaikilla $x,y\in\mathbb{R}$ pätee*

$$F(x,y)=F(x\cdot 1,y)=xF(1,y\cdot 1)=x(yF(1,1))=xy\cdot 1=xy,$$

eli kuvaus F ei ole mitään muuta kuin reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ kertolasku.

Yleisemmin, kun K on kunta, sen kertolasku $F\colon K\times K\to K$, $F(k,k')=kk'$ on bilineaarinen kuvaus K-vektoriavaruuksien välillä.

(3) *Edellisessä esimerkissä tarkasteltu multilineaarinen kuvaus $F(k,k')=kk'$ voidaan ajatella olevan kahden kunnan K identtisen kuvauksen (pisteittäinen) "tulo". Yleisemmin olkoot $L_1\colon V_1\to K$, $L_2\colon V_2\to K$, $\ldots$, $L_n\colon V_n\to K$ lineaarisia muotoja. Tällöin kuvaus $F\colon V_1\times V_2\times\ldots V_n\to K$,*

$$F(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n)=\prod_{i=1}^{n}L_i(\mathbf{v}_i)$$

(kuvausten L_i pisteittäinen tulo) on n-lineaarinen (tarkista). Tällaista kuvausta sanotaan kuvausten $L_1,\ldots,L_n$ tensorituloksi.

Mielivaltainen bilineaarinen kuvaus $F\colon V_1\times V_2\times\ldots V_n\to K$ ei välttämättä ole lineaaristen kuvausten tenstoritulo. Voidaan kuitenkin osoittaa, että tensoritulot virittävät n-lineaaristen kuvausten $F\colon V_1\times V_2\times\ldots V_n\to K$ avaruuden $L(V_1,V_2,\ldots,V_n;K)$. Tästä seuraa, että mielivaltainen bilineaarinen muoto $F\colon V_1\times V_2\times\ldots V_n\to K$ voidaan esittää lineaaristen kuvausten tensoritulojen summana.

(4) *Olkoon V K-vektoriavaruus. Kanoninen tärkeä esimerkki bilineaarisesta kuvauksesta $F\colon V\times V^*\to K$ on "evaluointikuvaus", joka on määritelty kaavalla $F(\mathbf{v},L)=L(\mathbf{v})$, $L\in V^*$, $\mathbf{v}\in V$. Bilineaarisuus seuraa helposti määritelmistä ja lineaaristen kuvausten ominaisuuksista, esimerkiksi*

$$F(\mathbf{v}+\mathbf{w},L)=L(\mathbf{v}+\mathbf{w})=L(\mathbf{v})+L(\mathbf{w})=F(\mathbf{v},L)+F(\mathbf{w},L).$$

Lukija tarkistakoon muut ehdot.

(5) *Palautetaan mieleen, että K*-algebra *on sellainen K-vektoriavaruus A, jossa on lisäksi määritelty kertolaskuoperaatio $\cdot\colon A\times A\to A$, siten, että $(A,+,\cdot)$ (missä $+$ on vektoriavaruudessa A määritelty vektorien kertolasku) on rengas. Lisäksi vaaditaan, että tämä kertolasku ja vektoriavaruuden A skalaarikertolasku olisivat "yhteensopivia", mikä formaalisti tarkoittaa sitä, että kaikilla $\mathbf{a},\mathbf{b}\in A$ ja $k\in K$ pätee*

$$(k\mathbf{a})\mathbf{b}=\mathbf{a}(k\mathbf{b})=k(\mathbf{ab}). \tag{2.124}$$

Renkaan määritelmän nojalla ehto "$(A,+,\cdot)$ on rengas" tarkoittaa sitä, että $\cdot$ on liitännäinen, sillä on neutraalialkio 1_A ja lisäksi kaikilla $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in A$ pätevät osittelulait

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}, \tag{2.125}$$

(2.126) $$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}.$$

Tässä vaiheessa voidaan helposti huomata, että itse asiassa yhtälöt (2.124)-(2.126) tarkoittavat täsmälleen sitä, että kertolaskukuvaus $\cdot\colon A \times A \to A$ *on* **bilineaarinen** *algebran* A *vektoriavaruus-struktuurin suhteen.*

Tästä tulkinnasta saadaan vaihtoehtoinen tapa määritellä K*-algebran käsitettä. Nimittäin olkoon* A K*-vektoriavaruus ja olkoon* $\cdot\colon A \times A \to A$ *jokin kertolaskulaskutoimitus joukossa* A*. Tällöin tällä kertolaskulla varustettuna* A *on* K*-algebra jos ja vain jos* $\cdot\colon A \times A \to A$ *on liitännäinen, sillä on neutraalialkio* 1_K *ja se on kuvauksena bilineaarinen* A*:n vektoriavaruuden struktuurin suhteen.*

Olkoot K-vektoriavaruudet $V_1, \ldots, V_n; W$ äärellisulotteisia. Olkoon $E_i = (\mathbf{v}^i_j)_{j=1,\ldots,m_i}$ avaruuden V_i kanta, $i = 1, \ldots, n$. Tässä $m_i = \dim V_i$. Olkoon $F = (\mathbf{w}_j)_{j=1,\ldots,m}$ avaruuden W kanta, $m = \dim W$.

Olkoon $J = (j_1, j_2, \ldots, j_n, j) \in [m_1] \times [m_2] \times \ldots \times [m_n] \times [m]$. Edellisestä propositiosta seuraa, että on olemassa yksikäsitteinen n-lineaarinen kuvaus

$$\varepsilon_J \colon V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n \to W$$

jolle pätee

$$\varepsilon_J(\mathbf{v}^i_{j_1}, \mathbf{v}^i_{j_2}, \ldots, \mathbf{v}^i_{j_n}) = \mathbf{w}_j.$$

Aivan samalla tavalla kuin Lauseessa 2.105 (jossa käsitellään tapausta $n = 1$), voidaan osoittaa, että joukko $\{\varepsilon_J\}$, missä $J \in [m_1] \times [m_2] \times \ldots \times [m_n] \times [m]$, on avaruuden $L(V_1, V_2, \ldots, V_n; W)$ **kanta** (yksityiskohdat HT). Laskemalla tämän kannan alkioiden lukumäärän, saadaan seuraava tulos.

Seuraus 2.127. *Olkoot* K*-vektoriavaruudet* $V_1, \ldots, V_n; W$ *äärellisulotteisia. Tällöin vektoriavaruus* $L(V_1, V_2, \ldots, V_n; W)$ *on myös äärellisulotteinen ja*

$$\dim L(V_1, V_2, \ldots, V_n; W) = \dim V_1 \cdot \dim V_2 \cdot \ldots \cdot \dim V_n \cdot \dim W.$$

Multilineaariset muodot

Tärkeä erikoistapaus multilineaarisesta kuvauksesta on tapaus $F\colon V \times V \times \ldots \times V = V^n \to K$ jossa $V_1 = V_2 = \ldots = V_n = V$ ovat sama avaruus ja lisäksi maalipuoli on skalaarikunta, $W = K$. Tällaista multilineaarista kuvausta sanomme *lineaariseksi n-muodoksi* avaruudessa V. Kaikkien avaruuden V lineaaristen n-muotojen muodostamaa joukkoa merkitään symbolilla $L^n(V)$. Tämä joukko on K-vektoriavaruus.

Permutaatiot ja niiden merkit.

Palautetaan mieleen *äärellisen joukon permutaation* ja sen *merkin* käsitteet.

Äärellisen joukon $[n] = \{1, \ldots, n\}$ *permutaatio* on mikä tahansa bijektio $\sigma\colon [n] \to [n]$. Kaikki permutaatiot $[n] \to [n]$ muodostavat *ryhmän* $\mathrm{Perm}([n]) = \mathrm{Perm}(n)$ (kts. esimerkki 1.14) kuvausten yhdistämisen suhteen. Tätä ryhmä sanotaan myös kertalukua n olevaksi *symmetriseksi ryhmäksi* ja merkitään lyheämmin symbolilla S_n. Ryhmän S_n neutraalialkio on identtinen kuvaus $\mathrm{id}_{[n]}\colon [n] \to [n]$. Alkion $\sigma \in S_n$ käänteisalkio on sen käänteiskuvaus σ^{-1}.

Symmetrisen ryhmän S_{n-1} alkio $\sigma\colon [n-1] \to [n-1]$ voidaan tarvittaessa tulkita myös joukon S_n alkiona - tätä varten laajennetaan σ joukkoon $[n]$ asettamalla $\sigma(n) = n$. On selvä, että tällöin σ pysyy bijektiona. Kääntäen mikä tahansa joukon S_n alkio σ, jolle pätee $\sigma(n) = n$ voidaan tulkita joukon S_{n-1} alkiona. Täsmällisesti sanottuna sovitaan siis samastamaan symmetrinen ryhmä S_{n-1} ja ryhmän S_n aliryhmä

$$\{\sigma \in S_n \mid \sigma(n) = n\}.$$

Tällöin S_{n-1} koostuu tasan niistä permutaatioista $\sigma\colon [n] \to [n]$, jotka pitävät alkion n paikallaan.

Joukon S_n alkio siis *permutoi* luvut $1, \ldots, n$ eli laittaa ne uuteen järjestykseen. Tätä mielikuvaa vastaa tapa esittää kuvaus $\sigma \in S_n$ muodossa $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ eli jonona jossa $i_1 = \sigma(1), i_2 = \sigma(2)$ ja niin edelleen.

Esimerkiksi $(2, 3, 1)$ on sellainen joukon $\{1, 2, 3\}$ permutaatio σ jolle pätee $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 1$. Koska jokainen permutaatio on bijektio, jono $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ esittää joukon $[n]$ permutaatiota jos ja vain jos siinä ei ole toistoja, eli jonossa esiintyvät alkiot ovat kaikki joukon $[n]$ eri alkioita.

Permutaatiota $\sigma \in S_n$ sanotaan *vaihdoksi* jos se vaihtaa kaksi alkiota keskenään, jättäen muut paikalleen. Täsmällisemmin sanottuna $\sigma \in S_n$ on vaihdos jos on olemassa $i, j \in [n], i \neq j$ niin, että

$$\sigma(k) = \begin{cases} j, & \text{jos } k = i, \\ i, & \text{jos } k = j, \\ k, & \text{muuten .} \end{cases}$$

Vaihdosta, joka vaihtaa keskenään alkiot i ja j, merkitään symbolilla $(i\ j)$. Tällöin sanomme, että luvut $i, j \in [n]$ *esiinyvät vaihdoksessa* tai että vaihdos *sisältää* luvut i, j (eikä sisällä muita). Esimerkiksi joukon $[3]$ vaihdos $(1\ 2)$ on sellainen kuvaus $\sigma\colon [3] \to [3]$ jolle $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 3$. Se sisältää lukuja $1, 2$.
Vaihdoksen $(i\ j)$ käänteiskuvaus on se itse, $(i\ j)^{-1} = (i\ j)$.

Osoittautuu, että kaikki vaihdokset *virittävät* ryhmän $(S_n, \circ)$. Tämä tarkoittaa sitä, että jokainen $\sigma \in S_n$ voidaan kirjoittaa vaihdosten yhdistelmänä, toisin sanoen kaikilla $\sigma \in S_n$ on olemassa vaihdokset $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_i \in S_n$ siten, että

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_i.$$

Tässä sallitaan tapaus $i = 0$, sillä, kuten yleensäkin ryhmässä, määrittelemme *tyhjän tulon* arvoksi ryhmän neutraalialkion, eli tässä tapauksessa identtisen kuvauksen $\mathrm{id}_{[n]} \in S_n$. Permutaation esitys vaihdosten yhdisteenä ei ole yleensä missään nimessä yksikäsitteinen, mutta kahdessa erilaisessa esityksessä on sama määrä vaihdoksia **modulo** 2. Toisin sanoen, jos

$$\tau_1' \circ \tau_2' \circ \ldots \circ \tau_j' = \sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_i,$$

missä τ_k, τ_l' ovat vaihdoksia, niin joko molemmat i, j ovat parillisia tai molemmat parittomia. Tämä väite voidaan kirjoittaa myös muodossa $(-1)^i = (-1)^j$. Lukua $(-1)^i$ sanotaan permutaation σ **merkiksi** ja sitä merkitään $\mathrm{sgn}(\sigma)$.

Edellisessä kappaleessa esitetyt faktat saattavat olla tuttuja matematiikan peruskursseilta. Esitetään niille kuitenkin tässäkin todistus.

Lemma 2.128. *Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja olkoon $\sigma \in S_n$ joukon $[n]$ permutaatio. Tällöin σ voidaan esittää vaihdosten äärellisenä yhdisteenä, eli on olemassa sellaiset vaihdokset $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i \in S_n$ joille pätee*

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_i.$$

Jos

$$\tau_1' \circ \tau_2' \circ \dots \circ \tau_j' = \sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_i,$$

missä τ_k, τ_l' ovat vaihdoksia, niin $(-1)^i = (-1)^j$. Kuvaus sgn: $S_n \to \{1, -1\}$, $sgn(\sigma) = (-1)^i$ on ryhmähomomorfismi (missä joukossa $\{1, -1\}$ laskutoimitus on tavallinen kertolasku).

Todistus. Esityksen olemassaolo osoitetaan induktiolla luvun n suhteen. Kun $n = 1$ on olemassa vain yksi permutaatio $[1] \to [1]$, nimittäin identtinen kuvaus $\mathrm{id}\colon [1] \to [1]$. Tämä voidaan esittää triviaalilla tavalla vaihdosten tyhjänä tulona. Tapauksessa $n = 2$ joukossa S_2 on kaksi alkiota - vaihdos $(1\ 2)$ ja identtinen kuvaus $\mathrm{id}\colon [2] \to [2]$, joka voidaan tulkita joko tyhjänä vaihdosten tulona tai tulona $(1\ 2)(1\ 2)$. Väite siis pätee arvoilla $n = 1, 2$.

Oletetaan, että väite pätee ryhmässä S_{n-1}, missä $n \geq 3$, ja osoitetaan, että se pätee myös S_n:lle. Olkoon $\sigma\colon [n] \to [n]$ permutaatio. Olkoon $k = \sigma(n)$. Tällöin yhdistetty permutaatio $(k\ n)\sigma = \tau$ kuvaa luvun n itselleen, joten se myös kuvaa joukon $[n-1]$ itselleen. Permutaatio τ voidaan siis tulkita joukon S_{n-1} alkioksi. Induktio-oletuksen nojalla

$$(k\ n)\sigma = \tau = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_i$$

joillakin joukon S_{n-1} vaihdoksilla $\tau_1, \dots, \tau_i$. Tulkitsemalla jokainen näistä vaihdoksesta permutaationa $[n] \to [n]$, joka kuvaa luvun n itselleen, nähdään, että tämä yhtälö pätee myös joukossa S_n. Kertomalla vasemmalta vaihdoksen $(k\ n)$ käänteiskuvauksella $(k\ n)^{-1} = (k\ n)$, saadaan

$$\sigma = (k\ n) \circ \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_i.$$

Olemme osoittaneet, että σ voidaan esittää vaihdosten tulona.

Oletetaan, että

$$\tau_1' \circ \tau_2' \circ \dots \circ \tau_j' = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_i,$$

missä τ_k', τ_l ovat vaihdoksia kaikilla k, l. Väitämme, että tällöin k ja l ovat molemmat parillisia tai molemmat parittomia. Siirtämällä kaikki vasemman puolen kuvaukset τ_k' yhtälön oikealle puolelle (eli kertomalla käänteisalkioilla oikeassa järjestyksessä) saadaan identtiselle kuvaukselle esitys

$$\mathrm{id} = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_i \circ \tau_j' \circ \dots \circ \tau_2' \circ \tau_1'$$

vaihdosten tulona. Tämä esityksen pituus on $i + j$. Jos toinen luvuista i, j olisi parillinen ja toinen olisi pariton, tässä esityksessä olisi oikealla puolella pariton määrä vaihdoksia. Näin ollen riittää osoittaa, että identtisen kuvauksen esityksessä

$$\mathrm{id} = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_p$$

vaihdosten yhdisteenä vaihdosten lukumäärä p on aina parillinen luku. Todistamme tämän näyttämällä, että jos tällainen esitys on olemassa, sen pituutta voidaan aina lyhentää kahdella, eli antaa identtiselle kuvaukselle esityksen, jonka pituus on $(p-2)$. Jos p olisi pariton, tästä saadaan äärellisen monen välivaiheen jälkeen esitys muotoa $\mathrm{id} = \tau$, missä τ on vaihdos. Tämä on selvästi mahdottomuus.

Olkoon

$$\mathrm{id} = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_p \tag{2.129}$$

identtisen kuvauksen esitys vaihdosten yhdisteenä. Olkoon $s \in [n]$ mikä tahansa alkio, joka esiintyy jossakin oikean puolen vaihdoksessa τ_l, $2 \leq l \leq p$. Voidaan olettaa, että $\tau_l = (s\ t)$, missä $\tau_{l+1}, \ldots, \tau_p$ eivät sisällä s:ää. Tarkastellaan vaihdosta τ_{l-1}. On olemassa neljä mahdollisuutta:
(1) $\tau_{l-1} = \tau_l = (s\ t)$. Tällöin $\tau_{l-1} \circ \tau_l = \mathrm{id}$ ja voimme supistaa vaihdokset τ_{l-1}, τ_l esityksestä. Päämäärämme (vähennetään vaihdosten lukumäärä kahdella) on tällöin saavutettu.
(2) $\tau_{l-1} = (s\ r)$ jollakin $r \neq t$. Tällöin (tarkista!)

$$\tau_{l-1} \circ \tau_l = (s\ r)(s\ t) = (s\ t)(r\ t),$$

jolloin olemme *siirtäneet* luvun s esiintymisen yhtälössä 2.129 yhden vaihdoksen verran vasemmalle.
(3) $\tau_{l-1} = (t\ r)$ jollakin $r \neq s$. Tällöin (tarkista!)

$$\tau_{l-1} \circ \tau_l = (t\ r)(s\ t) = (s\ r)(r\ t),$$

jolloin olemme siirtäneet luvun s esiintymisen yhtälössä 2.129 yhden vaihdoksen verran vasemmalle.
(4) $\tau_{l-1} = (q\ r)$ joillakin $q, r \neq s, t$. Tällöin (tarkista!)

$$\tau_{l-1} \circ \tau_l = (q\ r)(s\ t) = (s\ t)(q\ r),$$

jolloin olemme siirtäneet luvun s esiintymisen yhtälössä 2.129 yhden vaihdoksen verran vasemmalle.
Tapauksessa (1) olemme valmiit. Tapauksissa (2)-(4) luvun s esiintyminen siirtyy yhden vaihdoksen verran vasemmalle. Jatketaan samalla tavalla tarkastelemalla samaa lukua s uudestaan. Tällöin joko jossakin vaiheessa vaihtoehto (1) toteutuu ja olemme valmiit, tai luku s siirtyy esityksen 2.129 ensimmäiseen vaihdokseen $\tau_1 = (s\ t)$ eikä esiinny muissa esityksen vaihdoksissa. Tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä tällöin pätisi $s = \mathrm{id}(s) = \tau_1(s) = t$, mikä on ristiriita. Näin ollen vaihtoehdon (1) yllä on pakko toteutua joskus. Väite seuraa tästä.

Viimeisen väitteen todistus jätetään harjoitustehtäväksi. $\square$

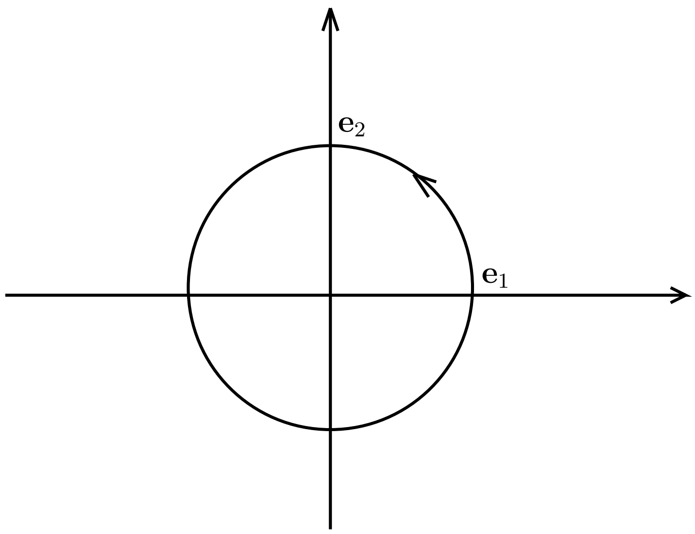
Riippuen siitä päätekö $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ vai $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$, sanomme permutaatiota $\sigma \in S_n$ *parilliseksi* tai *parittomaksi*.

Esimerkki 2.130. *Olkoon V n-ulotteinen $\mathbb{R}$-vektoriavaruus ja olkoon $E = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ jokin sen kanta. Olkoon $\sigma\colon [n] \to [n]$ joukon S^n permutaatio. Tällöin voimme muodostaa kannan $E_\sigma = (\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \mathbf{v}_{\sigma(2),} \ldots, \mathbf{v}_{\sigma(n)})$. Kannassa E_σ siis esiintyvät samat alkiot kuin kannassa E, mutta eri järjestyksessä lueteltuna. Permutaation merkin käsitteen avulla voimme formalisoida avaruuden "orientaation" käsitteen. Formaali määritelmä on seuraava - sanomme, että kanta E_σ määrittelee saman avaruuden V orientaation kuin alkuperäinen kanta, jos permutaation σ merkki on 1. Jos taas $sgn(\sigma) = -1$, sanomme, että kanta E_σ määrittelee avaruudessa V toisen orientaation. Jokaisella $\mathbb{R}$-vektoriavaruudella on siis kaksi orientaatiota, niitä voidaan koodata formaalisti luvuilla 1 ja -1.*

Esitetään tälle määritelmälle intuitiivista motivaatiota. $\mathbb{R}$-avaruuksien $\mathbb{R}^2$ (taso) ja $\mathbb{R}^3$ (kolmiulotteinen avaruus) kohdalla meillä on olemassa geometrinen intuitio siitä, mitä avaruuden "orientaatio" voisi tarkoittaa. Esimerkiksi tasossa $\mathbb{R}^2$ voidaan puhua orientaatiosta "myötäpäivään" tai "vastapäivään". Näitä voidaan havainnollista fysikaalisen pisteen liikkeen "suuntana" tason yksikköympyrää S^1 pitkin. Kun piste liikku standardin kannan vektorista $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ standardin kannan vektorin $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ päin, kyseessä on orientaatio "myötäpäivään" (kts. kuva 3 alla). Matemaatiikassa on tapana sanoa tätä orientaatiota "positiiviseksi". Päinvastainen matka - pisteestä $\mathbf{e}_2$ pisteseen $\mathbf{e}_1$ taas vastaa avaruuden "negatiivista" orientaatiota. Voidaan siis ajatella, että orientaatio liittyy siihen missä järjestyksessä avaruuden kannan vektorit luetellaan - standardikanta $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ vastaa "posiitivista" orientaatiota kun taas kanta $E' = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$ (jossa standardikannan vektorit luetellaan eri järjestyksessä) vastaa "negatiivista" orientaatiota. Huomaa, että vaihdoksen $\tau = (1\ 2)$ avulla voidaan kanta E' kirjoittaa muodossa

$$E' = E_\tau = (\mathbf{e}_{\tau(1)}, \mathbf{e}_{\tau(2)}).$$

Suoritetaan tasossa kuvausta $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x, y) = (y, x)$, joka peilaa avaruuden suoran $y = x$ nähden. Tämä kuvaus vaihtaa orientaation positiivisesta negatiiviseen. Toisaalta se on yksikäsitteinen lineaarinen kuvaus jolle pätee $L(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_{\tau(1)}$, $L(\mathbf{v}_2) = \mathbf{e_1} = \mathbf{e}_{\tau(2)}$.

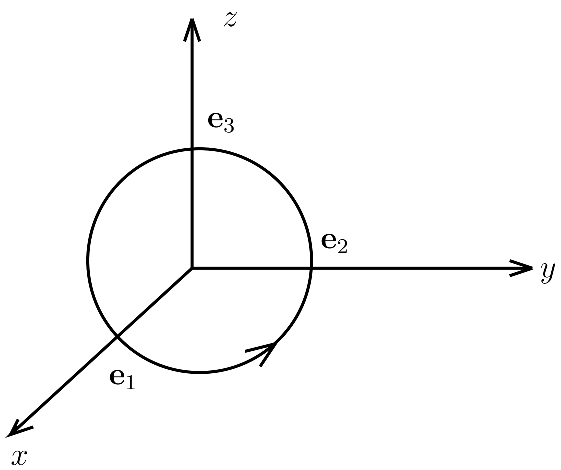


Kuva 3

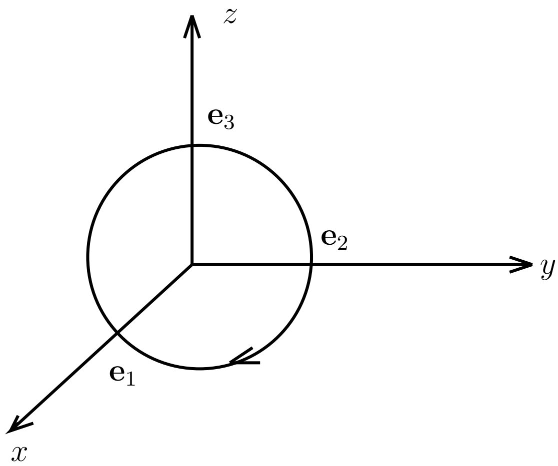
Siirrytään kolmiulotteiseen avaruuteen $\mathbb{R}^3$. Tälläkin on geometrisen intuition näkökulmasta kaksi orientaatiota. Orientaation suunta vastaa tapaa liikkua (esimekiksi ympyrää *pitkin) standardin kannan $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ vektorista toiseen. Sovitaan sanoa positiiviseksi kiertosuuntaa, joka vastaa näiden vektoreiden "luonnollista" järjestystä (kts. kuva 4 alla). Piirtämällä kuvia nähdään, että minkä tahansa kahden vektorin paikan vaihto vaihtaa myös ympyrän orientaation suuntaa - esimerkiksi kuvassa 5 alla liikkumissuunta vastaa järjestystä $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$. Tämä järjestys voidaan taas kirjoittaa vaihdoksen $\tau = (1\ 2)$ avulla muotoon $(\mathbf{e}_{\tau(1)}, \mathbf{e}_{\tau(2)}, \mathbf{e}_{\tau(3)})$. Tämän permutaatioryhmän S_3 vaihdoksen "soveltaminen" standardikannan vektoreiksi siis vaihtaa avaruuden orientaation toiseksi. Näin ollen, jos suoritetaan peräkkäin kaksi vaihdosta tähän tyyliin, orientaatio palaa takaisin alkuperäiseen. Yleisemmin, jos vaihdoksia tehdään parillinen määrä, orientaatio säilyy. Jos niitä tehdään pariton määrä, orientaatio vaihtuu toiseen. Esimerkiksi permutaatio $(2, 3, 1)$ on parillinen, se on kahden vaihdoksen yhdiste,*

$$(2, 3, 1) = (1\ 3)(1\ 2).$$

Kuvasta 4 nähdään, että kantaa $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)$ vastaa samaa orientaatio kuin alkuperäisen standardikannan määrämä.



Kuva 4



Kuva 5

Näin ollen on luonnollista sanoa, että kaksi saman kannan järjestystä määrää saman orientaation, jos ne eroavat parillisella permutaatiolla ja vastaavasti erilaisen, jos toisesta pääsee toiseen parittomalla permutaatiolla. Tämä on juuri määritelmä, jonka esitimme esimerkin alussa.

Mitä jos avaruudelle V otetaan jokin toinen kanta $E' = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n)$, joka ei välttämättä ole muotoa E_σ millään permutaatiolla σ, miten verrataan kantojen E ja E' määrämia avaruuden orientaatioita keskenään? Tähän palataan determinanttien teorian yhteydessä.

Orientaation käsite esiintyy muun muassa differentiaaligeometriassa.

Symmetriset, antisymmetriset ja alternoivat muodot

Olkoon V K-vektoriavaruus. Multilineaarista n-muotoa $F\colon V^n \to K$ sanotaan **symmetriseksi** jos lähtöjoukon muuttujien muodostaman jonon permutaatio ei muuta kuvauksen arvoa. Täsmällisesti sanottuna muoto F on symmetrinen jos ja vain jos jokaiselle

$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) \in V^n$ ja jokaiselle joukon $[n]$ permutaatiolle $\sigma \in S_n$ pätee

$$F(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \mathbf{v}_{\sigma(2)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma(n)}) = F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n).$$

Vastaavasti muotoa F sanotaan **antisymmetriseksi**, jos kaikilla $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) \in V^n$ ja jokaisella $\sigma \in S_n$ pätee

$$F(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \mathbf{v}_{\sigma(2)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n).$$

Koska jokainen permutaatio voidaan kirjoittaa vaihdosten perusteella, nähdään helposti, että pätee seuraava tulos (tarkka todistus jätetään harjoitustehtäväksi).

Lemma 2.131. *Olkoon $F\colon V^n \to K$ lineaarinen n-muoto. Tällöin F on symmetrinen jos ja vain jos kaikilla $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) \in V^n$ ja $i, j \in [n], i < j$ pätee*

$$F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_n) = F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n).$$

Vastaavasti F on antisymmetrinen jos ja vain jos kaikilla $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) \in V^n$ ja $i, j \in [n], i < j$ pätee

$$F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_n) = -F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n).$$

Toisin sanoen multilineaarinen muoto on symmetrinen, jos kahden muuttujan vaihto *ei vaikuta sen arvoon* ja antisymmetrinen, jos kahden muuttujan vaihto *muuttaa kuvauksen arvon merkkiä*. Erityisesti bilineaarinen muoto $F\colon V^2 \to K$ on symmetrinen jos kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ pätee

$$F(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = F(\mathbf{w}, \mathbf{v}).$$

Vastaavasti bilineaarinen muoto $F\colon V^2 \to K$ on antisymmetrinen jos kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ pätee

$$F(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -F(\mathbf{w}, \mathbf{v}).$$

Esimerkki 2.132. *Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja tarkastellaan äärellisulotteista K-vektoriavaruutta K^n. Määritellään niin sanottu "pistetulo" avaruudessa K^n bilineaarisena muotona $\cdot\colon K^n \times K^n \to K$, joka on määritelty kaavalla*

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Helposti nähdään, että tämä kuvaus todellakin on bilineaarinen. Lisäksi se on symmetrinen (koska kertolasku kunnassa K on vaihdannainen).
Erikoistapauksessa $n = 1$ pistetulo $\cdot\colon K^2 \to K$ on yksinkertaisesti kunnan K kertolasku. Silloin tämän muodon symmetrisyys on yksinkertaisesti toinen tapa puhua kertolaskun vaihdannaisuudesta.

Pistetulon avulla voimme kirjoittaa matriisitulon määritelmän kompaktissa muodossa. Nimittäin olkoot $A \in M(m \times n; K), B \in M(n \times k; K)$ matriiseja ja olkoon $C = (c_{ij})$ näiden matriisien tulo AB. Tällöin matriisin kertolaskun määritelmän nojalla pätee

$$c_{ij} = r_i(A) \cdot c_j(B),$$

missä $\cdot$ on yllä määritelty pistetulo. Tässä tulkitsemme matriisien rivit ja sarakkeet, kuten yleensäkin, avaruuden K^n alkioina.

Multilineaarista muotoa $F\colon V^n \to K$ sanotaan **alternoivaksi**, jos se saa aina arvon nolla sellaisilla jonoilla $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) \in V^n$ joissa esiintyy ainakin yksi toisto, toisin sanoen, jos kaksi eri muuttujaa saavat saman arvon. Täsmällisesti ilmaistuna F on alternoiva, jos ehdosta $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j$, $i \neq j$ seuraa

$$F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) = 0_K.$$

Osoittautuu, että antisymmetrisen ja alternoiva muodon käsitteet ovat *melkein* samoja, yhtä poikkeusta lukuunottamatta, nimittäin silloin kun kunnan K *karakteristika* on tasan 2. Palautetaan mieleen, että kunnan K karakteristika on pienin positiivinen kokonaisluku n jolle pätee $n_K = n \cdot 1_K = 0_K$. Tästä seuraa, että kunnan K karakteristika on tasan kaksi jos ja vain jos kunnassa pätee $1_K + 1_K = 0_K$, mikä on sama asia kuin $1_K = -1_K$. Tästä puolestaan seuraa, että tällaisessa kunnassa pätee yleisemmin $2x = 0$ kaikilla $x \in K$ ja jokainen alkio on itseensä vasta-alkio, $-x = x$. Kääntäen, jos kunnan jokainen alkio on itsensä vasta-alkio, kunnan karakteristika on 2.

Kun kunnan K karakteristika on 2, miinus-merkki on tarpeeton, koska $x = -x$ kaikilla $x \in K$. Erityisesti tällöin symmetrisen ja antisymmetrisen muodon käsitteillä ei ole mitään eroa - jokainen antisymmetrinen muoto on tällöin symmetrinen ja päinvastoin. Koska on olemassa symmetrisiä muotoja, jotka eivät ole alternoivia, tästä seuraa, että tässä tapauksessa antisymmetriset ja alternoivat muodot eivät voi tarkoittaa samaa asiaa. Tämä on kuitenkin ainoa poikkeus - jos skalaarikunnan karakteristika ei ole kaksi, antisymmetrisen ja alternoivan muodon käsitteet ovat samoja.

Lemma 2.133. *Olkoon $F\colon V^n \to K$ multilineaarinen n-muoto. Tarkastellaan seuraavia ehtoja.*

(1) F on alternoiva.

(2) F on antisymmetrinen.

Tällöin (1)$\Rightarrow$ (2).
Jos kunnan K karakteristika ei ole kaksi, ehdot (1) ja (2) ovat yhtäpitäviä.

Todistus. Oletetaan, että ehto (1) on voimassa. Olkoot $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$, $i < j$. Ehdon (1) nojalla tällöin

$$F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_n) = 0_K.$$

Toisaalta multilineaarisuuden ja ehdon (1) nojalla

$$\begin{gathered} F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_n) = \\ F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n) + F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_n) + \\ F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n) + F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_n) = \\ F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_n) + F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n). \end{gathered}$$

Näin olleen

$$F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_n) + F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n) = 0_K,$$

mikä on yhtäpitävä ehdon

$$F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_n) = -F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n)$$

kanssa. Toisin sanoen F on antisymmetrinen.

Oletetaan, että F on antisymmetrinen ja kunnan K karakteristika ei ole 2. Olkoot $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_{j+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$, $i < j$, $\mathbf{v} \in V$. Antisymmetrisyydesta seuraa tällöin , että

$$F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v} = \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v} = \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_n) = -F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v} = \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v} = \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n).$$

Merkitään

$$k = F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}, \ldots, \mathbf{v}, \ldots, \mathbf{v}_n) \in K.$$

Olemme osoittaneet, että $k = -k$. Oletetaan, että $k \neq 0_K$. Tällöin kertomalla yhtälö puolittain käänteisalkiolla k^{-1} saadaan $1_K = -1_K$ eli $2_K = 0_K$. Tämä on ristiriita, sillä oletimme, että kunnan karakteristika ei ole 2. Näin ollen $k = 0_K$ ja olemme osoittaneet, että

$$F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}, \ldots, \mathbf{v}, \ldots, \mathbf{v}_n) = 0_K,$$

eli sen, että F on alternoiva. □

Vastaesimerkki: Olkoon $K = V = \mathbb{Z}_2$ ja määritellään K-vektoriavaruudessa V bilineaarinen muoto $F\colon V^2 \to K$ ehdolla

$$F(x, y) = xy.$$

Helposti nähdään, että tämä on symmetrinen 2-muoto. Koska kunnassa $\mathbb{Z}_2$ pätee $xy = -xy$, tämä muoto on myös antisymmetrinen. Kuitenkin tämä muoto ei ole alternoiva, sillä esimerkiksi

$$F(1_K, 1_K) = 1_K \neq 0_K.$$

Alternoivien muotojen vektoriavaruus

Olkoon V K-vektoriavaruus. Kaikkien alternoivien n-muotojen $F\colon V^n \to K$ muodostamaa joukkoa merkitään $\mathrm{Alt}^n(V)$. Helposti verifioidaan, että $\mathrm{Alt}^n(V)$ on K-vektoriavaruuden $L^n(V)$ aliavaruus, erityisesti $\mathrm{Alt}^n(V)$ on K-vektoriavaruus.

Olkoon V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus. Proposition 2.122 nojalla voimme konstruoida multilineaarisen muodon $F\colon V^n \to K$ yksinkertaisesti asettamalla sen arvot mielivaltaisella tavalla avaruuden V kannan alkioista muodostetuista jonoissa. Jos haluamme, että näin saatu kuvaus toteuttaa joitakin lisäominaisuuksia, näitä arvoja ei enää voi valita täysin mielivaltaisesti. Tutkitaan, mitä lisäehtoja pitää asettaa, jos haluamme konstruoida tällä tavalla alternoivia muotoja.

Lemma 2.134. *Olkoon $F\colon V^n \to K$ multilineaarinen n-muoto, missä V on äärellisulotteinen K-vektoriavaruus. Olkoon $E = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m)$ avaruuden V kanta. Tällöin F on alternoiva muoto jos ja vain jos seuraavat ehdot (1) ja (2) alla toteuttuvat.*

Olkoon $(j_1, j_2, \ldots, j_n) \in [m]^n$ mielivaltainen n-pituinen jono indeksejä joukosta $[m]$.

(1) Oletetaan, että $j_k = j_l$ joillakin $k < l$. Tällöin

$$F(\mathbf{v}_{j_1}, \mathbf{v}_{j_2}, \dots, \mathbf{v}_{j_n}) = 0_K.$$

(2) Olkoon $\sigma \in S_m$ permutaatio. Tällöin

$$F(\mathbf{v}_{j_{\sigma(1)}}, \mathbf{v}_{j_{\sigma(2)}}, \dots, \mathbf{v}_{j_{\sigma(n)}}) = \operatorname{sgn} \sigma F(\mathbf{v}_{j_1}, \mathbf{v}_{j_2}, \dots, \mathbf{v}_{j_n}).$$

Toisin sanoen F on alternoiva jos ja vain jos se toteuttaa sekä antisymmetrisen, että alternoivan kuvauksen määritelmän, kun niitä sovelletaan kanta-alkioista muodostetuihin jonoihin.

Todistus. Alternoiva kuvaus on myös antisymmetrinen (Lemma 2.133), joten jos F on alternoiva, ehdot (1) ja (2) ovat voimassa.

Oletetaan kääntäen, että F toteuttaa ehdot (1) ja (2). Olkoot $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{k-1}, \mathbf{w}_{k+1}, \dots, \mathbf{w}_{l-1}, \mathbf{w}_{l+1}, \dots, \mathbf{w}_n$, $k < l$, $\mathbf{w} \in V$. Meidän on todistettavaa, että

$$F(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w} = \mathbf{w}_k, \dots, \mathbf{w} = \mathbf{w}_l, \dots, \mathbf{w}_n) = 0_K.$$

Esitetään jokainen $\mathbf{w}_i$, $i \neq k, l$ kannan alkioiden lineaarisena kombinaationa,

$$\mathbf{w}_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \mathbf{v}_j.$$

Tällöin multilineaarisuudesta seuraa (sijoitetaan edellinen yhtälö tarkasteltavaan lausekkeeseen jokaisella $i \neq k, l$), että

$$F(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}, \dots, \mathbf{w}, \dots, \mathbf{w}_n)$$

voidaan esittää lineaarisena kombinaationa alkioista, jotka ovat muotoa

$$F(\mathbf{v}_{j_1}, \dots, \mathbf{v}_{j_{k-1}}, \mathbf{w}, \mathbf{v}_{j_{k+1}}, \dots, \mathbf{v}_{j_{l-1}}, \mathbf{w}, \mathbf{v}_{j_{l+1}}, \dots, \mathbf{v}_{j_n}),$$

missä $\mathbf{v}_{j_q}$ on kannan E alkio jokaisella q. Näin ollen riittää osoittaa, että

$$F(\mathbf{v}_{j_1}, \dots, \mathbf{v}_{j_{k-1}}, \mathbf{w}, \mathbf{v}_{j_{k+1}}, \dots, \mathbf{v}_{j_{l-1}}, \mathbf{w}, \mathbf{v}_{j_{l+1}}, \dots, \mathbf{v}_{j_n}) = 0_K$$

kun $\mathbf{v}_{j_q}$ on kannan alkio kaikilla q. Esitetään $\mathbf{w}$ lineaarisena kombinaationa

$$\mathbf{w} = \sum_{j=1}^{m} b_j \mathbf{v}_j$$

ja sijoitetaan tämä lauseke edelliseen. Multilineaarisuuden nojalla tällöin nähdään, että

$$F(\mathbf{v}_{j_1}, \dots, \mathbf{v}_{j_{k-1}}, \mathbf{w}, \mathbf{v}_{j_{k+1}}, \dots, \mathbf{v}_{j_{l-1}}, \mathbf{w}, \mathbf{v}_{j_{l+1}}, \dots, \mathbf{v}_{j_n})$$

on summa alkioista, jotka ovat muotoa

$$b_s b_t F(\mathbf{v}_{j_1}, \dots, \mathbf{v}_{j_{k-1}}, \mathbf{v}_s, \mathbf{v}_{j_{k+1}}, \dots, \mathbf{v}_{j_{l-1}}, \mathbf{v}_t, \mathbf{v}_{j_{l+1}}, \dots, \mathbf{v}_{j_n}).$$

Tässä summassa kaikki termit, joissa $s = t$ ovat arvoltaan nolla-alkio, ehdon (1) nojalla. Jokaista termiä

$$a_{s,t} = b_s b_t F(\mathbf{v}_{j_1}, \ldots, \mathbf{v}_{j_{k-1}}, \mathbf{v}_s, \mathbf{v}_{j_{k+1}}, \ldots, \mathbf{v}_{j_{l-1}}, \mathbf{v}_t, \mathbf{v}_{j_{l+1}}, \ldots, \mathbf{v}_{j_n}),$$

jossa $s < t$, taas vastaa summassa termi

$$a_{t,s} = F(\mathbf{v}_{j_1}, \ldots, \mathbf{v}_{j_{k-1}}, \mathbf{v}_t, \mathbf{v}_{j_{k+1}}, \ldots, \mathbf{v}_{j_{l-1}}, \mathbf{v}_s, \mathbf{v}_{j_{l+1}}, \ldots, \mathbf{v}_{j_n}),$$

jonka arvolle ehdon (2) nojalla pätee

$$a_{t,s} = -a_{s,t}.$$

Näin ollen kaikki termit joille $s \neq t$ kumoavat toisiaan pareittain ja laskun lopputulokseksi tulee nolla-alkio. Väite on todistettu. $\square$

Olkoon V n-ulotteinen K-vektoriavaruus ja olkoon $m \in \mathbb{N}$. Tutkitaan vektoriavaruutta $\mathrm{Alt}^m(M)$.

Olkoon $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ avaruuden V kanta. Tarkastellaan ensin tapausta $m > n$. Olkoon $F\colon V^m \to K$ alternoiva m-muoto. Olkoon $(\mathbf{v}_{j_1}, \ldots, \mathbf{v}_{j_m})$ mielivaltainen m-pituinen jono, joka on muodostettu V:n kannan alkioista. Koska $m > n$, siinä on pakko olla toistoja. Tästä seuraa, että

$$F(\mathbf{v}_{i_1}, \ldots, \mathbf{v}_{i_m}) = 0_K.$$

Koska tämä pätee kaikille kannan alkioista muodostetuille jonoille, kuvauksen F on tällöin oltava nolla-kuvaus. Näin ollen $\mathrm{Alt}^m(M) = \{0\}$ on triviaali vektoriavaruus kun $m > n$.

Olkoon seuraavaksi $m \leq n$. Olkoon I joukon $[n] = \{1, \ldots, n\}$ osajoukko, jossa on m alkiota. Kirjoitetaan I:n alkiot nousevassa järjestyksessä, eli muodossa

$$I = \{i_1, \ldots, i_m\},$$

siten, että $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$. Määritellään multilineaarinen kuvaus $\varepsilon^I\colon V^m \to K$ seuraavasti. Olkoon $(\mathbf{v}_{j_1}, \ldots, \mathbf{v}_{j_m})$ mielivaltainen m-pituinen kanta-alkioista muodostettu jono. Jos

$$\{j_1, \ldots, j_m\} \neq \{i_1, \ldots, i_m\},$$

asetetaan

$$\varepsilon^I(\mathbf{v}_{j_1}, \ldots, \mathbf{v}_{j_m}) = 0_K.$$

Huomaa, että erityisesti näin käy kun jonossa $(j_1, \ldots, j_m)$ on toistoja. Jos taas pätee $\{j_1, \ldots, j_m\} = \{i_1, \ldots, i_m\}$, niin on olemassa tasan yksi permutaatio $\sigma \in S_n$ siten, että $j_k = i_{\sigma(k)}$ jokaisella $k = 1, \ldots, m$ (jonoissa samat alkiot, mutta mahdollisesti eri järjetyksessä). Tällöin asetetaan

$$\varepsilon^I(\mathbf{v}_{j_1}, \ldots, \mathbf{v}_{j_m}) = \operatorname{sgn} \sigma.$$

Proposition 2.122 mukaan tämä määrittelee yksikäsitteisen multilineaarisen kuvauksen $\varepsilon_I\colon V^n \to K$. Soveltamalla edellisen lemman ehtoja tähän kuvaukseen, nähdään, että ε_I on itse asiassa alternoiva m-muoto (tarkista yksitysikohdat).

Kun I käy läpi kaikki joukon $[n]$ m-kokoiset osajoukkot, saadaan kokoelma

$$A = \{\varepsilon^I \mid I \subset [n], |I| = m\}.$$

Tässä kokoelmassa on

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

alkiota. Osoittautuu, että kokoelma A on avaruuden $\mathrm{Alt}^m(V)$ kanta.

Lause 2.135. *Olkoon V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus ja olkoon $E = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ sen kanta. Tällöin edellä konstruoitu kokoelma*

$$\{\varepsilon^I \mid I \subset [n], |I| = m\}$$

on avaruuden $\mathrm{Alt}^m(V)$ kanta, $m \in \mathbb{N}$. Erityisesti

$$\dim \mathrm{Alt}^m(V) = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Tässä tulkitaan $\binom{n}{m} = 0$ kun $m > n$.

Erityisesti $\mathrm{Alt}^n(V)$ on 1-ulotteinen vektoriavaruus ja eräs sen virittävä alkio on yksikäsitteinen multilineaarinen alternoiva muoto $\varepsilon^{[n]}$ jolle pätee

$$\varepsilon^{[n]}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = 1.$$

Todistus. Osoitetaan väite erikoistapauksessa $m = n$ (tästä tapauksesst olemme jatkossa erityisen kiinnostuneita). Yleinen tapaus jätetään harjoitustehtäväksi.

Olkoon $F\colon V^n \to K$ alternoiva n-muoto, missä $n = \dim V$. Olkoon

$$k = F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n).$$

Osoitetaan, että tällöin

$$F = k\varepsilon^{[n]}.$$

Olkoon $E' = (\mathbf{v}_{j_1}, \dots, \mathbf{v}_{j_n})$ n-pituinen jono, joka on muodostettu kannan E alkioista. Jos tässä jonossa on toistoja, pätee

$$F(E) = 0_K = k \cdot 0_K = k \cdot \varepsilon^{[n]}(E'),$$

sillä sekä F, että $\varepsilon^{[n]}$ ovat alternoivia.

Jos taas jonossa E' ei ole toistoja, niin $(j_1, \dots, j_n)$ on joukon $\{1, \dots, n\}$ eräs permutaatio σ, täsmällisemmin sanottuna on olemassa permutaatio $\sigma \in S_n$ siten, että $i_j = \sigma(j)$, $j = 1, \dots, n$. Koska F ja ε_I ovat molemmat alternoivia,

$$F(\mathbf{v}_{j_1}, \dots, \mathbf{v}_{j_n}) = \operatorname{sgn} \sigma F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \operatorname{sgn} \sigma k = k\varepsilon^{[n]}(\mathbf{v}_{j_1}, \dots, \mathbf{v}_{j_n})$$

kuvauksen $\varepsilon_{[n]}$ määritelmän nojalla. Olemme osoittaneet, että multilineaarisilla kuvauksilla F ja $k\varepsilon^{[n]}$ on samat arvot sellaisissa jonoissa, jotka koostuvat kannan vektoreista.

Proposition 2.122 nojalla tämä tarkoittaa sitä, että ne ovat sama kuvaus.

Näin ollen muoto $\varepsilon^{[n]}$ virittää avaruuden $\mathrm{Alt}^n(V)$. Jos jollakin $k \in K$ pätee

$$k\varepsilon^{[n]} = \mathbf{0},$$

niin erityisesti

$$k = k\varepsilon^{[n]}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = 0_k.$$

Näin ollen joukko $\{\varepsilon^{[n]}\}$ on vapaa. Tästä seuraa, että sen virittämä avaruus $\mathrm{Alt}^n(V)$ on 1-ulotteinen. □

Esimerkki 2.136. *Olkoon V äärellisulotteinen $\mathbb{R}$-vektoriavaruus ja olkoon $E = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ sen kanta. Edellisen tuloksen mukaan $\mathrm{Alt}^n(\mathbb{R})$ on yksiulotteinen avaruus, jonka virittää alternoiva muoto $\varepsilon^{[n]}$. Tarkastellaan tarkemmin, miten tämä muoto on määritelty. Lemman 2.122 nojalla tämä muoto on yksikäsitteisesti määrätty, kun tunnetaan sen arvoja sellaisilla jonoilla $(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{v}_{\sigma(n)})$, jotka koostuvat kannan E alkioista, $\sigma(i) \in [n]$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$.*

Jos jonossa $(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{v}_{\sigma(n)})$ esiintyy toistoja, muodon $\varepsilon^{[n]}$ arvo tällä jonolla on nolla, koska muoto on alternoiva,

$$\varepsilon^{[n]}(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{v}_{\sigma(n)}) = 0.$$

Jos taas toistoja ei esiinny, $\sigma\colon [n] \to [n]$ on **bijektio** *eli permutaatio, $\sigma \in S^n$. Tällöin, koska $\varepsilon^{[n]}$ on alternoiva,*

$$\varepsilon^{[n]}(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{v}_{\sigma(n)}) = \begin{cases} 1, & \textit{jos } \sigma \textit{ on parillinen permutaatio,} \\ -1, & \textit{jos } \sigma \textit{ on pariton permutaatio.} \end{cases}$$

Toisaalta esimerkissä 2.130 yllä olemme sopineet koodata luvulla 1 avaruuden orientaation, joka vastaa jonoa $E = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ (kun se pidetään kiinteänä) ja vastaavasti (-1):llä päinvastaisen orientaation. Samassa esimerkissä olemme sopineet, että jonot $E = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ ja $E_\sigma = (\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{v}_{\sigma(n)})$ määräsivät saman orientaation täsmälleen silloin kun σ on parillinen permutaatio. Näin ollen alternoiva muoto $\varepsilon^{[n]}$ on tapa koodata orientaation käsite multilineaarisena muotona. Tätä alternoivien muotojen ja avaruuden orientaation yhteyttä voidaan pitää yhtenä motivaationa alternoivien muotojen tutkimiselle. Tämä yhteys on ollut historiallisestakin näkökulmasta yksi syy siihen, miksi alternoivia muotoja alunperin ruvettiin tarkastelemaan (muitakin on ollut, esim. katso esimerkki 2.150 alla).

Determinantti

Seuraavaksi kehitetään matriisien ja lineaaristen kuvausten determinanttien teoria alternovien muotojen teorian sovelluksena.

Olkoon $A \in M(n \times n; K)$ K-kertoiminen *neliömatriisi*. Palautetaan mieleen, että matriisin A sarakkeita merkitään symbolilla $c_i(A)$ ja ajatellaan vektoriavaruuden K^n alkioina ("pystyvektori"). Matriisi A on selvästi täysin määrätty, kun tunnetaan sen sarakkeiden muodostama jono $(c_1(A), c_2(A), \ldots, c_n(A))$. Tästä syystä voimme *samaistaa* neliömatriisin A ja sen sarakkeista muodostetun jonon $(c_1(A), c_2(A), \ldots, c_n(A))$, joka on karteesisen tulon $(K^n)^n$ alkio.

Olkoon $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ K-vektoriavaruuden K^n *standardikanta*, $\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$.

Lauseen 2.135 mukaan n-alternoivien muotojen muodostama K-vektoriavaruus $\mathrm{Alt}^n(K^n)$ on 1-ulotteinen K-vektoriavaruus ja jokainen alternoiva n-muoto $F\colon (K^n)^n \to K$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$F = k\varepsilon^{[n]}$$

yksikäsiteisellä $k \in K$. Tässä $\varepsilon^{[n]}$ on "kanoninen" alternoiva n-muoto, jolle pätee

$$\varepsilon^{[n]}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1_K.$$

Tästä seuraa, että mielivaltaiselle alternoivalle n-muodolle $F\colon (K^n)^n \to K$ yhtälö $F = k\ \varepsilon^{[n]}$ on yhtäpitävä ehdon

$$k = F(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$$

kanssa. Tästä saadaan suoraan seuraava tärkeä tulos.

Propositio 2.137. *Olkoon K kunta. Tällöin on olemassa* **täsmälleen yksi** *alternoiva n-muoto $F \in \mathrm{Alt}^n(K^n)$, jolle pätee*

$$F(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1_K,$$

nimittäin muoto $\varepsilon^{[n]}$.

Edellä olemme huomanneet, että $(n\times n)$-kokoinen neliömatriisi $A \in M(n\times n; K)$ voidaan ajatella sen sarakeiden muodostamana jonona, eli avaruuden $(K^n)^n$ alkiona. Käänteen mikä tahansa avaruuden $(K^n)^n$ alkio $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ voidaan ajatella $(n\times n)$-kokoisena neliömatriisina, jonka sarakkeet ovat alkiot $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in K^n$ tässä järjestyksessä (pystyvektoreina tulkittuina).

Jos edellisen proposition tulos käännetään tämän samastuksen avulla $(n\times n)$-kokoisten matriisien kielelle, saadaan osoitettua niin sanottu *determinantin* olemassaolo ja yksikäsitteisyys.

Lause 2.138. *Olkoon K kunta ja olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tällöin on olemassa tasan yksi kuvaus* $\det\colon M(n \times n; K) \to K$ *jolla on seuraavat ominaisuudet (1)-(3).*

(1) $\det(A)$ *on multilineaarinen kuvaus matriisin A sarakkeiden suhteen.*

(2) Jos matriisilla A on kaksi täysin samanlaista saraketta, niin $\det A = 0$ *(toisin sanoen sarakkeiden suhteen* $\det$ *on alternoiva n-muoto).*

(3) $\det(I_n) = 1$*, missä I_n on $(n \times n)$-kokoinen yksikkömatriisi.*

Tätä kuvausta sanotaan determinanttikuvaukseksi*. Jos A on neliömatriisi, skalaaria* $\det(A) \in K$ *sanotaan* matriisin *A* determinantiksi*.*

Jos $F\colon M(n \times n; K) \to K$ on mikä tahansa kuvaus, joka toteuttaa ehtoja (1) ja (2), eli on multilineaarinen ja alternoiva matriisin sarakkeiden suhteen, niin on olemassa yksikäsitteinen $k \in K$ siten, että $F(A) = k\det(A)$ kaikilla $A \in M(n \times n; K)$.

Kuten lukija on varmasti oppinut aikaisemmalta lineaarialgebran kurssilta, determinanttien käyttö helpottaa lineaarikuvausten tutkimista ja yhtälöryhmien ratkaisemista. Näemme tästä paljon esimerkkejä jatkossa.

Seuraavaksi palautetaan mieleen determinantin perusominaisuuksia.

Lauseen 2.138 yhteydessä esitetty matriisin määritelmä ei kerro varsinaisesti, miten matriisin determinantti voidaan laskea. Johdetaan matriisin A determinantille konkrettinen kaava seuraavasti. Olkoon $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ neliömatriisi. Tulkitaan se karteesisen tulon $(K^n)^n$ alkiona $(c_1(A), c_2(A), \dots, c_n(A))$, missä

$$c_j(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_i$$

(sarakkeen lineaarinen esitys avaruuden K^n standardin kannan $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ suhteen). Koska $\det A$ on määritelmän mukaan sama asia kuin $\varepsilon^{[n]}(c_1(A), c_2(A), \dots, c_n(A))$, tästä saadaan multilineaarisuuden nojalla

$$\det(A) = (\varepsilon^{[n]})(c_1(A), c_2(A), \dots, c_n(A)) = \sum_{i_1,\dots,i_n} a_{i_1 1}a_{i_2 2}\dots a_{i_n n}\varepsilon^{[n]}(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_n}).$$

Tässä summataan siis kaikkien mahdollisten jonojen $(i_1, \dots, i_n) \in [n]^n$ yli. Mutta jos tällaisessa jonossa on toistoja, pätee

$$\varepsilon^{[n]}(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_n}) = 0_K,$$

koska muoto $\varepsilon^{[n]}$ on alternoiva. Näin ollen tällaiset jonot voidaan unohtaa. Jos taas jonossa $(i_1, \dots, i_n)$ ei ole toistoja, on olemassa (yksikäsitteinen) permutaatio $\sigma \in S_n$ jolle pätee $i_j = \sigma(j)$ kaikilla $j = 1, \dots, n$. Tällöin, koska muoto $\varepsilon^{[n]}$ on alternoiva, pätee

$$\varepsilon^{[n]}(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_n}) = (\operatorname{sgn}\sigma)\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = \operatorname{sgn}\sigma \cdot 1_K = \operatorname{sgn}\sigma.$$

Näin ollen

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma)a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\dots a_{\sigma(n)n}. \tag{2.139}$$

Tämä kaava on käyttökelpoinen esimerkiksi kun lasketaan (2×2)-matriisin determinantti, sillä tällöin summassa on vain kaksi termiä (symmetrisessä ryhmässä S_2 on kaksi alkiota), jolloin saadaan

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

(3×3)-matriisin determinantin laskeminen yllä annetun kaavan mukaan myös onnistuu periaattessa kohtalaisen helposti, silloin summassa on 6 termiä, mutta jo seuraavassa dimensiossa, eli (4×4)-matriisin tapauksessa, kaavassa on 24 yhteenlaskettavaa termiä, eikä kaava 2.139 ole enää kovin käyttökelpoinen. (5×5)-matriisin tapauksessa summassa on jo 120 termiä, eikä sillä enää kannata laskea yhtään mitään (paitsi jos olet tietokone, mutta silloinkin parempi säästää aikaa käyttämällä muita menetelmiä). Kaavalla 2.139 onkin lähinnä teoreettista merkitystä. Seuraavaksi annetaan eräs klassinen esimerkki sen sovelluksesta.

Lemma 2.140. *Olkoon A $(n \times n)$-matriisi. Tällöin*

$$\det(A^T) = \det A.$$

Todistus. Kaavan 2.139 nojalla

$$\det(A^T) = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

Olkoon $\sigma \in S_n$. Merkitään $\sigma(i) = k_i$, tällöin $\sigma^{-1}(k_i) = i$. Näillä mekinnöillä voidaan siis jokainen termi $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$ yhtä hyvin kirjoittaa muodossa

$$a_{\sigma^{-1}(k_i)k_i} a_{\sigma^{-1}(k_2)k_2} \dots a_{\sigma^{-1}(k_n)k_n}.$$

Koska σ on bijektio, jono $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ sisältää jokaisen luvun joukosta $\{1, \dots, n\}$ täsmälleen kerran. Koska kunnan K kertolasku on vaihdannainen, voimme permutoida termejä ja kirjoittaa lausekkeen $a_{\sigma^{-1}(k_i)k_i} a_{\sigma^{-1}(k_2)k_2} \dots a_{\sigma^{-1}(k_n)k_n}$ muodossa

$$a_{\sigma^{-1}(1)1} a_{\sigma^{-1}(2)2} \dots a_{\sigma^{-1}(n)n}.$$

Näin ollen

$$\det(A^T) = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma^{-1}(1)1} a_{\sigma^{-1}(2)2} \dots a_{\sigma^{-1}(n)n}.$$

Koska σ^{-1} käy läpi täsmälleen samat arvot kuin σ, kun viimeiksi mainittu käy läpi kaikki permutaatiot joukosta S_n (eli vastaavuus $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ on bijektio, miksi?), ja $\operatorname{sgn} \sigma^{-1} = \operatorname{sgn} \sigma$ (tarkista!), summa oikealla puoleella on sama kuin

$$\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}$$

eli, kaavan 2.139 nojalla, sama kuin $\det A$. □

Kuten olemme jo huomauttaneet, kaavaa (2.139) on yleensä mahdotonta käytää sellaisenaan konkreettisissa laskuissa, joten meidän on keksittävä parempia menetelmiä determinantin laskemiseksi. Eräs suosittu menetelmä on niin sanottu ”kehittäminen rivin/sarakkeen mukaan”, joka on varmasti tuttu lukijalle aikaisemmilta kursseilta (joskus se otetaan jopa determinantin määritelmäksi). Palautetaan mieleen mistä on kyse. Määritellään ensin matriisin alimatriisin käsitteen.

Olkoon $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,m, j=1,\dots,n}$ mielivaltainen matriisi (ei siis välttämättä neliömatriisi). Mitä tahansa matriisia, joka saadaan poistamalla matriisista A mielivaltainen (mahdollisesti tyhjä) määrä riveja ja sarakkeita, sanotaan matriisin A *alimatriisiksi* tai sen *minoriksi.* Jos alimatriisin koko on $(k \times l)$, puhutaan matriisin $(k \times l)$-minorista. Täsmällisemmin alimatriisin käsite voidaan määritellä seuraavasti. Valitaan jonosta $1, \dots, m$ osajono $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ ja jonosta $1, \dots, n$ osajono $j_1 < i_2 < \dots < i_l$. Tällöin matriisi $B = (a_{i_p j_q})_{p=1,\dots,k, q=1,\dots,l}$ on matriisin A (eräs) $(k \times l)$-alimatriisi.

Olkoon A $(n \times n)$-kokoinen *neliömatriisi* ja olkoot $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Tällöin symbolilla A_{ij} merkitsemme sellaista matriisin A $(n-1) \times (n-1)$-kokoista alimatriisia, joka on saatu A:sta poistamalla siitä i'nnes rivi ja j'nnes sarake.

Propositio 2.141. *Olkoon A $(n \times n)$-matriisi, missä $n > 1$.*
*(1) Kiinnitetään $i = 1, \ldots, n$. Tällöin (*kehittäminen rivin i mukaan*)*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}).$$

*(2) Kiinnitetään $j = 1, \ldots, n$. Tällöin (*kehittäminen sarakkeen j mukaan*)*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}).$$

Todistus. (1) Lauseen 2.138 nojalla riittää osoittaa, että kaava

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

määrittelee kuvauksen, joka on multilineaarinen matriisin A sarakkeiden suhteen, alternoiva ja antaa arvokseen 1_K, kun $A = I_n$ on yksikkömatriisi. Yksityiskohtien verifiointi jätetään lukijalle harjoitustehtäväksi.
(2) Sovelletaan kohtaa (1) matriisin A transpoosiin A^T sekä käytetään hyväksi sitä tietoa, että $\det A^T = \det A$ jokaiselle matriisille A (Lemma 2.140). $\square$

Edellinen Propositio antaa siis tavan laskea determinantin *rekurssiivisesti*, palauttamalla se pienempikokoisten matriisien determinanttien laskemiseksi. Käytännössä tämä menetelmä ei auta yksinään ja sitä pitää yhdistellä muiden menetelmien ja determinantin ominaisuuksien kanssa. Esimerkkinä tästä mainitaan seuraavat. Todistukset seuraavat helposti alternoivien muotojen ominaisuuksista.

Lemma 2.142. *Olkoon A neliömatriisi ja olkoon A' neliömatriisi, joka on saatu A:sta lisäämällä sen sarakkeeseen $c_j(A)$ sarake $c_i(A)$ alkiolla $k \in K$ kerrottuna. Toisin sanoen*

$$c_l(A') = \begin{cases} c_l(A), & l \neq j, \\ c_j(A) + kc_i(A), & l = j. \end{cases}$$

Tällöin $\det(A) = \det(A')$.

Lemma 2.143. *Olkoon A neliömatriisi ja olkoon A' neliömatriisi, joka on saatu A:sta vaihtamalla sen kaksi saraketta tai kaksi riviä keskenään. Tällöin* $\det(A) = -\det(A')$.

Determinanttikuvaus on yhteensopiva matriisien kertolaskun ja kunnan kertolaskun suhteen.

Propositio 2.144. *Olkoot A, B $(n \times n)$-matriisit. Tällöin*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Todistus. Kiinnitetään matriisi A ja osoitetaan, että kuvaus $B \mapsto \det(AB)$ on multilineaarinen ja alternoiva matriisin B sarakkeiden suhteen. Aloitetaan multilineaarisuudesta. Olkoot matriisin A rivit $r_1(A), \ldots, r_n(A)$ ja matriisin B sarakkeet $c_1(B), \ldots, c_n(B)$. Olkoon $k = 1, \ldots, n$ kiinnitetty ja olkoon B' matriisi, jolle pätee $c_i(B') = c_i(B)$ kaikilla $i \neq k$. Olkoon B'' matriisi, jolla on samat sarakkeet kuin matriisilla B ja B', paitsi, että

$$c_k(B'') = c_k(B') + c_k(B).$$

Merkitään $C = AB, C' = AB', C'' = AB''$. Meidän on osoitettavaa, että

$$\det(C'') = \det(C) + \det(C').$$

Käyttämällä pistetuloa (kts. esim. 2.132) näemme, että $c_{ij} = r_i(A) \cdot c_j(B)$, joten matriisin C j:nnes sarake $c_j(C)$ on jono

$$(r_1(A) \cdot c_j(B), r_2(A) \cdot c_j(B), \ldots, r_n(A) \cdot c_j(B)),$$

kaikilla $j = 1, \ldots, n$. Tästä seuraa, että matriisin C' kaikki sarakkeet ovat samoja kuin matriisin C sarakkeet, paitsi sarakkeen $c_k(C')$ kohdalla, joka on jono

$$(r_1(A) \cdot c_k(B'), r_2(A) \cdot c_k(B'), \ldots, r_n(A) \cdot c_k(B')).$$

Samoin matriisiin C'' kaikki sarakkeet ovat samoja kuin C:n sarakkeet, saraketta C''_k lukuunottamatta. Tämä sarake on jono

$$(r_1(A) \cdot (c_k(B) + c_k(B')), r_2(A) \cdot (c_k(B) + c_k(B')), \ldots, r_n(A) \cdot (c_k(B) + c_k(B'))).$$

Koska pistetulo on bilineaarinen, jokaisella $i = 1, \ldots, n$ pätee

$$r_i(A) \cdot (c_k(B) + c_k(B')) = r_i(A) \cdot c_k(B) + r_i(A) \cdot c_k(B').$$

Näin ollen

$$c_k(C'') = c_k(C) + c_k(C').$$

Koska kuvaus det on multilineaarinen sarakkeiden suhteen, edellisistä tarkasteluista seuraa, että

$$\det(C'') = \det(C) + \det(C'),$$

mitä pitikin todistaa.
Samalla tavalla osoitetaan, että toinen multilineaarisuuden ehdoista on voimassa.

Osoitetaan, että kuvaus $B \mapsto \det(AB)$ on alternoiva. Oletetaan, että matriisin B sarakkeet $c_i(B)$ ja $c_j(B)$ ovat samoja, $i \neq j$. Tällöin, samalla tavalla kuten yllä, nähdään, että matriisin $C = AB$ vastaavat sarakkeet $c_i(C)$ ja $c_j(C)$ ovat samoja. Koska determinanttikuvaus on alternoiva, tästä seuraa, että $\det(AB) = \det C = 0_K$. Näin ollen kuvaus $B \mapsto \det(AB)$ on alternoiva n-muoto (sarakkeiden suhteen).

Olemme osoittaneet, että kuvaus $B \mapsto \det(AB)$ on alternoiva n-muoto. Koska determinanttikuvaus det virittää avaruuden $\mathrm{Alt}^n(K^n)$, on olemassa vakio $k \in K$ jolle

$$\det(AB) = k \det(B)$$

kaikilla $B \in M(n \times n; K)$. Laskemalla yhtälön molemman puolen arvot kun $B = I_n$ on yksikkömatriisi, saadaan $k = \det(A)$. Näin ollen

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

$\square$

Determinantin avulla voidaan tarkistaa onko matriisi kääntyvä vai *singulaarinen*[3]. Tämä on itse asiassa yksi tärkeimmistä determinantin sovelluksista.

Propositio 2.145. *Olkoon A K-kertoiminen $(n \times n)$-matriisi. Tällöin A on kääntyvä jos ja vain jos $\det A \neq 0_K$. Jos $\det A$ on kääntyvä, käänteismatriisin A^{-1} alkiot saadaan kaavalla*

$$(A^{-1})(i,j) = (\det A)^{-1}(-1)^{i+j} \det(A_{ji}).$$

Lisäksi tässä tapauksessa pätee yhtälö

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}.$$

Todistus. Olkoon A kääntyvä. Tällöin edellisen proposition nojalla

$$\det A \det(A^{-1}) = \det AA^{-1} = \det I_n = 1_K = \det A^{-1}A = \det A^{-1} \det A.$$

Tästä seuraa, että $\det A \neq 0_K$ ja

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}.$$

Oletetaan kääntäen, että $k = \det A \neq 0_K$. Tällöin k^{-1} on olemassa. Muodostetaan matriisi $B = (b_{ij}) \in M(n \times n, K)$ ehdolla

$$b_{ij} = k^{-1}(-1)^{i+j} \det(A_{ji}).$$

Lasketaan tulo AB. Olkoot $i, j \in [n]$. Tällöin matriisin AB (i,j)-alkio on

$$(AB)(i,j) = \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj} = k^{-1}(\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l+j}a_{il} \det(A_{jl})).$$

Oletetaan ensin, että $i \neq j$. Olkoon A' sellainen matriisi, joka on muuten kuin A, paitsi, että rivi $r_i(A')$ on sama kuin rivi $r_j(A)$. Jos tällaisen matriisin determinaantti lasketaan kehittelemällä se j:nnen rivin mukaan, saadaan yllä esintyvä lauseke $\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l+j}a_{il} \det(A_{jl})$. Toisaalta A' on sellainen matriisi, jolla on kaksi samaa riviä, joten A'^T on matriisi, jolla on kaksi sama saraketta, mistä seuraa, että sen determinantti on nolla (determinantti on alternoiva muoto). Näin ollen

$$\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l+j}a_{il} \det(A_{jl}) = \det A' = \det A'^T = 0_K.$$

Olemme näyttäneet, että $(AB)_{ij} = 0_K$ kun $i \neq j$.

[3]Matriisia joka ei ole kääntyvä sanotaan singulaariseksi

Seuraavaksi tarkastellaan tapausta $i = j$. Tällöin

$$(AB)(i,i) = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{li} = k^{-1}(\sum_{l=1}^{n} (-1)^{l+i} a_{il} \det(A_{il})).$$

Oikealla puolella suluissa esiintyvä lauseke $\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l+i} a_{il} \det(A_{lk})$ on tasan $\det A = k$. Tämä nähdään kehittämällä $\det A$ rivin $r_i(A)$ mukaan. Näin ollen $(AB)(i,i) = k^{-1}k = 1_K$.

Olemme näyttäneet, että $AB = I_n$. Seurauksen 2.95 nojalla A on kääntyvä ja sen käänteismatriisi on B. □

Erityisesti kääntyvän (2×2)-matriisin käänteismatriisille saadaan edellisen proposition nojalla yksinkertainen kaava

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Esimerkki 2.146. *Palataan kompleksilukujen konstruktioon (kts. Luvun 1 aliluku 1.5). Näytetään, miten voidaan helposti osoittaa lineaarialgebran avulla, että kompleksilukujen joukko $\mathbb{C}$ on kunta. Samalla johdetaan lineaarialgebrallisiin menetelmiin lauseke kompleksiluvun käänteisalkiolle.*

Olkoon $z = (a,b) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ mielivaltainen kompleksiluku. Tarkastellaan kuvausta $\phi_z \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\phi_z(w) = zw$. Jos ϕ_z ajatellaan kuvauksena $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, sille saadaan kompleksilukujen kertolaskun määritelmän nojalla kaava

$$\phi_z(x,y) = (ax - by, ay + bx).$$

Tästä seuraa, että ϕ_z on lineaarinen kuvaus $\mathbb{R}$:n suhteen, eli kun tarkastellaan avaruutta $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$-vektoriavaruutena. Tämä avaruus on 2-ulotteinen ja sillä on olemassa standardikanta $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, missä $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ ja $\mathbf{e}_2 = (0,1)$. Tämän kannan suhteen kuvauksella ϕ_z on matriisiesitys

$$\Phi_z = [\phi_z]_E = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Tämä määrittelee kuvauksen $\Phi \colon \mathbb{C} \to M(2 \times 2; \mathbb{R})$, $z \mapsto \Phi(z)$.
Helposti nähdään (harjoitustehtävä), että tämä kuvaus on yhteensopiva sekä yhteen-, että kertolaskun suhteen, missä vasemmalla puolella ovat kompleksilukujen laskutoimitukset ja oikealla puolella matriisien yhteen- ja kertolasku. Lisäksi kuvaus Φ on injektio, sillä luvun z komponentit a ja b saadaan takaisin matriisin Φ_z ensimmäisestä sarakkeesta. Näin ollen algebrallisena struktuurina $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ on täysin isomorfinen erään struktuurin $(M(2 \times 2; \mathbb{R}), +, \cdot)$ alistruktuurin

$$\mathbb{C}' = \{\Phi_z \mid z \in \mathbb{C}\}$$

kanssa. Erityisesti tästä seuraa, että sen laskutoimituksilla (eli kompleksilukujen yhteen-ja kertolaskulla) on kaikki samat ominaisuudet, mitä matriisien yhteen- ja kertolaskulla on.

Esimerkiksi tästä nähdään heti, että kompleksilukujen kertolasku on liitännäinen ja osittelева yhteenlaskun suhteen, koska matriisien kertolaskulla on samanlaisia ominaisuuksia. Koska tiedämme sen lisäksi, että kompleksiluvulla (a, b) on olemassa yhteenlaskun suhteen vasta-alkio $(-a, -b)$, olemme näyttäneet, että $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ on rengas. Kertolaskun kommutatiivisuus (ominaisuus, jota matriisien kertolaskulla ei ole) on helppo lasku.

Jäljelle jää sen osoittaminen, että $\mathbb{C}$:ssä jokaisella nollasta eroavalla alkiolla on kertolaskun suhteen käänteisalkio. Koska $\mathbb{C}$ on isomofinen renkaan $\mathbb{C}'$ kanssa, riittää osoittaa tämä renkaalle $\mathbb{C}'$. Mutta renkaan $\mathbb{C}'$ alkiot ovat (2×2)-matriiseja ja meillä on käytössä tapa tarkistaa, onko tällainen matriisi kääntyvä - lasketaan sen determinantti. Koska

$$\det \Phi_z = \det \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = a^2 + b^2,$$

nähdään, että Φ_z on kääntyvä täsmälleen silloin kun $z = (a, b) \neq (0, 0)$ eli täsmälleen silloin, kun Φ_z ei ole nolla-matriisi. Lisäksi Propositiosta 2.145 saadaan suoraan kaavan matriisille Φ_z^{-1},

$$(\Phi_z)^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \Phi_{z'},$$

missä $z' = (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$. Näin ollen $zz' = z'z = 1_K$, toisin sanoen osoitettiin, että $\mathbb{C}$ todellakin on kunta. Samalla johdettiin kaupan päälle kaava kompleksiluvun käänteisluvulle.

Sen lisäksi, että olemme näyttäneet kompleksilukujen renkaan $\mathbb{C}$ olevan kunta, olemme myös samalla keksineet uuden tavan konstruoida ja tulkita kompleksilukuja. Nimittäin edellisestä seuraa, että kompleksiluku voidaan yhtä hyvin ajatella muotoa

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$$

olevana matriisina tai, ekvivalentisti vastavaana lineaarisena kuvauksena. Algebralliset operaatiot ovat tällöin tuttuja matriisien (tai lineaarikuvausten) laskutoimituksia.

Kun $a^2 + b^2 = 1$, eli kun kompleksiluku $z = (a, b)$ sijaitsee tason yksikköympyrällä, vastaava lineaarikuvaus on tason **kierto** *origon ympärillä (vastapäivään) pisteen (a, b) määrämän kulman verran. Tästä puhutaan tarkemmin myöhemmin, kun käsitellään sisätuloavaruuksia.*

Jos taas $z = (a, 0)$ on reaaliluku, sitä vastaava lineaarinen kuvaus Φ_z on yksinkertaisesti sama kuin skalaarikertominen luvulla a $\mathbb{R}$-vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^2$. Geometrisesti tämä kuvaus säilyttää jokaisen vektorin suunnan, mutta "venyttää" pisteiden etäisyyttä origosta luvulla a (jos a on negatiivinen ensin peilataan piste (x, y) origon suhteen vasta-alkioksi $(-x, -y)$). Tällaista "venetystä" kutsutaan myös skaalaukseksi
Yleinen matriisi ϕ_z on näiden kahden tapauksen kombinaatio, toisin sanoen tason kierron ja skaalauksen yhdistelmä.

Olemme ennen näyttäneet, että kompleksiluvut ja niiden algebralliset operaatiot tulevat luonnollisesti esille kun yritetään keksiä luonnollinen laajennus reaaliluvuille, jossa *yhtälöllä*

$$x^2 = -1$$

olisi ratkaisu. Tämä on puhtaasti "algebrallinen" tapa päästää kompleksilukuihin käsiksi. Se saattaa näyttää huijaukselta - vaikka tiedämme, ettei yllämainitulla yhtälöllä "oikeasti" ole ratkaisuja, keksitään sellaiset väkisin "tyhjästä"

Tässä esimerkissä olemme törmänneet luonnolliseen kompleksilukujen "geometriseen" tulkintaan, jonka mukaan niitä voi ajatella tason yksinkertaisina ja hyvin konkrettisina liikkeinä - kiertoina, peilauksina ja skalauksina. Ehto $i^2 = -1$ *tässä tulkinnassa tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että kun suoritetaan* 90 *asteen kierto kahdesti, ollaan tehty kaiken kaikkiaan* 180 *asteen kierron, mikä on triviaalisti selvä tosiasia. Tämä osoittaa sen, että vaikka kompleksilukuja ajateltiinkin aikoinaan "kuvitteellisina olioina " (mistä englanninkielinen "imaginary number" termi tulee), joita " ei ole olemassa", ei kompleksiluvuissa ole mitään kuvitteellistä ja epätodellista - niitä voi ajatella hyvin konkreettisina ja luonnollisina geometrisinä liikkeinä, joita sekä matemaatikot, että esimerkiksi fyysikot ovat tutkineet ennenkin kompleksilukujen keksimistä.*

Lineaarisen kuvauksen determinantti.
Olkoon V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus ja olkoon $L\colon V \to V$ avaruuden V lineaarinen endomorfismi. Haluamme määritellä kuvauksen L determinantin $\det L$. Tämä tehdään seuravalla tavalla

Koska V on äärellisulotteinen, sillä on olemassa kanta $E = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$. Asetammme

$$\det L = \det[L]_E. \tag{2.147}$$

Toisin sanoen esitetään L matriisina kannassa E (sama kanta lähtö- ja maalipuolella!) ja otetaan determinantti tästä matriisista.

Mutta onko kaava 2.147 hyvin määritelty? Voimmehan löytää avaruudelle V toisenkin kannan $F = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$, jolloin saadaan toinen matriisiesitys $[L]_F$. Onko tällä matrisilla sama determinantti kuin matriisilla $[L]_E$ (jos ei ole, määritelmässämme ei ole mitään järkeä)? Tämä täytyy tarkistaa. On olemassa kannanvaihtomatriisit $A = [E \mid F]$ ja $B = [F \mid E]$. Lisäksi A on kääntyvä ja $A^{-1} = B$. Kannanvaihtokaavan 2.88 nojalla pätee

$$[L]_E = A[L]_F A^{-1},$$

jolloin Propositioista 2.144 ja 2.145 saadaan (muista, että determinantit ovat kunnan alkiota ja kunnan kertolasku on kommutatiivinen)

$$\det[L]_E = \det A \det[L]_F \det A^{-1} = \det A \det A^{-1} \det[L]_F = \det[L]_F.$$

Näin ollen endomorfismin determinantti kaavassa 2.147 ei riipu kannan valinnasta, toisin sanoen on hyvin määritelty.

Koska lineaarinen kuvaus on isomorfismi jos ja vain jos sen matriisi on kääntyvä, Propositiosta 2.145 saadaan heti seuraava tulos.

Seuraus 2.148. *Olkoon* V *äärellisulotteinen* K*-vektoriavaruus ja* $L\colon V \to V$ *lineaarinen endomorfismi. Tällöin* L *on isomorfismi jos ja vain jos* $\det L \neq 0_K$.

Esimerkki 2.149. *Olkoon V äärellisulotteinen $\mathbb{R}$-vektoriavaruus ja olkoot $E = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ ja $E' = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$ sen eri kannat. Nyt voidaan vastata kysymykseen, milloin E ja E' määrittelevät avaruudessa V saman orientaation. Tätä varten lasketaan yksinkertaisesti kannanvaihtomatriisin $[E'|E]$ determinantin $\det[E'|E]$. Jos tämä determinantti on positiivinen reaaliluku, E ja E' määrävät saman orientaation. Muuten ne määrävät erilaiset orientaatiot.*

Pannaan merkillöe, että yleisen kunnan K kohdalla emme voi puhua positiivisista tai negatiivisista alkioista. Tämä on se syy, miksi tarkastelemme orientaatioon liittyviä kysymyksiä ainoastaan $\mathbb{R}$-kertoimisille vektoriavaruuksille.

Huomaa, että kysessä siis ei ole mikään tulos, vaan määritelmä, sopimus siitä, milloin kantojen määrämät orientaatiot ovat samoja.

Esimerkki 2.150. *Historiallisesti yksi determinantin käsitteen motivaatioista liittyy geometristen kappaleiden tilavuuden laskemiseen. Olkoon $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ standardikanta. Tämä kanta määrittelee luonnollisella tavalla kuution*

$$I = [0, 1]^3,$$

jonka alkiot ovat vektorit muotoa $t_1\mathbf{e}_1 + t_2\mathbf{e}_2 + t_3\mathbf{e}_3$, missä $0 \leq t_i \leq 1$ kaikilla $i = 1, 2, 3$. Koska tämän kuution sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset, ja jokaisen sivun pituus on yksi, on helppoa päätellä, mikä on tämän kuution tilavuus - se on 1.

Olkoon $E' = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\mathbf{v}_3)$ jokin toinen avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta. Tällöin sen määrämä suunnikassärmiö *on joukko*

$$J = \{t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + t_3\mathbf{v}_3 \mid 0 \leq t_i \leq 1, i = 1, 2, 3\}.$$

Koska tämän suunnikassärmiön sivut ovat yleisesti ottaen "vinossa" eikä sen kulmat ovat vättämättä suoria, ei ole enää yhtään selvää, miten lasketaan sen tilavuus. Osoittautuu, että

$$\mathrm{vol}(J) = |\det([E|E'])|,$$

missä $[E'|E]$ on kannanvaihtomatriisi (emme todista tätä). Tämä kaava yleistyy avaruuteen $\mathbb{R}^n$ mielivaltaisella n, kunhan ensin sovitaan mitä "tilavuus" abstraktissa n-ulotteisessa avaruudessa tarkoittaa (tätä kysymystä pohdiskellaan kurssilla "Mitta ja integraali"). Yleisemmin voidaan osoittaa, että jos $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on lineaarinen kuvaus ja $A \subset \mathbb{R}^n$ on tarpeeksi säännöllinen kappale, jolla on olemassa hyvinmääritelty "tilavuus" eli niin sanottu mitta $m(A)$, *niin sen kuvajoukon mitalle pätee*

$$m(LA) = |\det L| m(A).$$

Tässä $\det L$ *on kuvaksen L jonkun matriisin determinantti. Näin ollen kuvauksen determinanttia ainakin tapauksessa $K = \mathbb{R}$ voidaan ajatella lukuna, joka mittaa sen kuinka paljon tämä kuvaus "venyttää" avaruuden "tilavuuden" mielessä. Determinantin merkki taas kertoo sen, muuttaako determinantti avaruuden orientaatiota vai säilyttääkö se sen.*

Vaikka determinaantit sellaisenaan ovat määriteltyjä vain neliömatriiseille ja endomorfismeille, niitä voi soveltaa myös yleisempien matriisien ja lineaaristen kuvausten tutkimiseen.

Olkoon $L\colon V \to W$ K-lineaarinen kuvaus äärellisulotteisten K-vektoriavaruuksien välillä. Olkoon $A = [L]_{F,E}$ kuvauksen L matriisi joidenkin avaruuksien V ja W kantojen E, F suhteen.

Tällöin (Lemma 2.97) pätee

$$\dim \operatorname{Im} L = \dim \operatorname{Col}(A).$$

Propositio 2.151. *Olkoon $L\colon V \to W$ K-lineaarinen kuvaus äärellisulotteisten K-vektoriavaruuksien välillä. Olkoon $A = [L]_{F,E}$ kuvauksen L matriisi joidenkin avaruuksien V ja W kantojen E, F suhteen. Tällöin* $\dim \operatorname{Im} L = l$ *on suurin sellainen luonnollinen luku l, jolle matriisilla A löytyy* kääntyvä $(l \times l)$*-alimatriisi (eli sellainen $(l \times l)$-alimatriisi, jonka determinantti eroaa nollasta).*

Todistus. Olkoon l suurin sellainen luonnollinen luku jolle matriisilla A on olemassa kääntyvä $(l \times l)$-alimatriisi B. Tulkitsemme (0×0)-matriisin eli tyhjän matriisin tässä tapauksessa kääntyväksi matriisiksi, joten $l \geq 0$ on olemassa joka tapauksessa.

Osoitetaan, että $l \leq \dim \operatorname{Im} L$. Koska alimatriisi B on kääntyvä, sen sarakkeet $c_1(B), \ldots, c_l(B)$ muodostavat avaruuden K^l kannan, erityisesti vapaan jonon (jos tämä ei ole muuten selvä, ajattele B lineaarisena kuvauksena, jolloin sen sarakeet ovat standardin kannan kuvia tässä kuvauksessa). Koska B on matriisin A alimatriisi jokainen B:n sarake vastaa jotakin matriisin A saraketta. Tarkastellaan vastavien matriisin A sarakkeiden $c_{i_1}(A), \ldots, c_{i_l}(A)$ muodostamaa jonoa ja osoitetaan, että se on vapaa. Olkoon

$$k_1 c_{i_1}(A) + \ldots + k_l c_{i_l}(A) = \mathbf{0}$$

nollavektorin esitys sarakkeiden $c_{i_1}(A), \ldots, c_{i_l}(A)$ lineaarisena kombinaationa. Rajoittamalla tässä yhtälössä tarkastelu matriisin B riveihin, saadaan vastaavista B:n sarakkeista muodostettu lineaarinen kombinaatio

$$k_1 c_1(B) + \ldots + k_l c_l(B) = \mathbf{0}.$$

Koska jono $(c_1(B), \ldots, c_l(B))$ on vapaa, tästä seuraa, etä $k_1 = \ldots = k_n$. Näin ollen myös jono $c_{i_1}(A), \ldots, c_{i_l}(A)$ on vapaa. Tämä on sarakeavaruuden $\operatorname{Col}(A)$ vapaa osajono, joten $\dim \operatorname{Col}(A) \geq l$. Mutta $\dim \operatorname{Col}(A) = \dim \operatorname{Im}(L)$, joten erityisesti $\dim \operatorname{Im} L \geq l$.

Seuraavaksi osoitetaan, että $\operatorname{Im} L \leq l$. Olkoon $m = \operatorname{Im} L$. Riittää löytää matriisille A jokin $(m \times m)$-kokoinen alimatriisi B, joka on kääntyvä. Koska $\dim \operatorname{Col} A = \dim \operatorname{Im} L = m$ ja kaikki matriisin A sarakkeet virittävät avaruuden $\operatorname{Col} A$, voidaan löytää m kappaletta A:n sarakkeita $c_{i_1}(A), \ldots, c_{i_m}(A)$, jotka muodostavat avaruuden $\operatorname{Col}(A)$ kannan (Lemma 2.41). Muodostetaan matriisin A $(n \times m)$-kokoinen alimatriisi C, johon otetaan mukaan täsmälleen sarakkeet $c(A)_{j_1}, \ldots, c(A)_{j_m}$ ja kaikki matriisin A rivit (tässä $n = \dim W$). Tällöin matriisille C pätee $\dim \operatorname{Col}(C) = m$, sillä sen sarakkeet $c_{j_1}(A), \ldots, c_{j_m}(A)$ muodostavat vapaan jonon, jonka pituus on tasan m. Toisaalta Proposition 2.118 nojalla pätee $\dim \operatorname{Row}(C) = \dim \operatorname{Col}(C) = m$, joten voimme valita matriisin C *riveistä* täsmälleen m riviä $r_{k_1}(C), \ldots, r_{k_m}(C)$, jotka muodostavat avaruuden $\operatorname{Row}(C)$ kannan. Muodostetaan näistä riveistä matriisin C $(m \times m)$-alimatriisi B. Tällöin B on myös A:n alimatriisi ja $\dim \operatorname{Row} B = \dim \operatorname{Col} B = m$. Tästä seuraa, että B on kääntyvä. Todistus on valmis. $\square$

Seuraus 2.152. *Olkoot $L\colon V \to W$ K-lineaarinen kuvaus äärellisulotteisten K-vektoriavaruuksien välillä. Olkoon $A = [L]_{F,E}$ kuvauksen L matriisi joidenkin V:n ja W:n kantojen F, E suhteen. Oletetaan, että matriisin A koko on $(n \times m)$. Tällöin*

(1) L on surjektio jos ja vain jos $m \geq n$ ja matriisilla A on $(n \times n)$-alimatriisi B jolle $\det B \neq 0_K$.

(2) L on injektio jos ja vain jos $m \leq n$ ja matriisilla A on $(m \times m)$-alimatriisi C jolle $\det C \neq 0_K$.

Todistus. (1) Jos L on surjektio, niin pakko olla $m \geq n$ (Seuraus 2.94 ja lisäksi pätee $\dim \mathrm{Col}(A) = \dim \mathrm{Im}\, L = n$. Väite seuraa tästä ja edellisestä tuloksesta. Väite (2) osoitetaan samalla tavalla. □

Esimerkki 2.153. *Esitetään edellisen tuloksen sovellus, jossa mennään hieman topologian puolelle. Olkoon $A = (a_{ij}) \in M(n \times m; \mathbb{R})$ reaaliarvoinen matriisi, jota vastaava lineaarinen kuvaus L_A on surjektio. Tällöin erityisesti $m \geq n$. Osoitetaan, että jokainen matriisi $B = (b_{ij})$, joka on "tarpeeksi lähellä " matriisia A on myös surjektio lineaarisena kuvauksena (eli L_B on surjektio). "Tarpeeksi lähellä" tarkoittaa tässä yhteydessä täsmälleen sitä, että on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että aina kun $|b_{ij} - a_{ij}| < \varepsilon$, matriisi B on surjektio (lineaarisena kuvauksena).*

Väite seuraa edellisestä korolaarista. Nimittäin matriisilla A on olemassa $(n \times n)$-alimatriisi A' jonka determinantti eroaa nollasta. Koska determinantti on matriisin alkioden "jatkuva kuvaus", on olemassa pieni $\varepsilon > 0$, siten, että kun matriisin A' alkioita muutetaan korkeintaan ε:n verran, uuden matriisin determinantti on edelleenkin nollasta eroava. Näin ollen, kun B:n alkiot ovat tarpeeksi lähellä A:n alkioita, matriisilla B on olemassa $(n \times n)$-alimatriisi, jonka determinantti ei ole nolla. Edellisen korollaarin nojalla B on surjektio.

Lukija, joka on tutustunut topologian alkeisiin voi huomata, että tässä esimerkissä osoitettu väite voidaan muotoilla muotoon
"Avaruuden $M(n \times m; K)$ osajoukko

$$\{A \mid L_A \text{ on surjektio}\}$$

on **avoin** *avaruudessa $M(n \times m; K)$".*

Samalla tavalla voidaan näyttää, että injektiivisten matriisien joukko on avoin vastaavassa matriisiavaruudessa.

2.6. Suorat summat

Olkoon K kunta ja olkoon $n \in \mathbb{N}$. Määritelmän mukaan K-vektoriavaruus K^n on *karteesinen tulo*, joka muodostetaan kunnan K kopioista, joita on n kappaletta,

$$K^n = \underbrace{K \times K \times \ldots \times K}_{n \text{ kpl}}.$$

Toisaalta, tällä avaruudella on olemassa luonnollinen kanta $E = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ ja jokainen sen alkio $\mathbf{v} \in K^n$ voidaan esittää muodossa

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2 + \ldots + k_n\mathbf{e}_n.$$

Jos merkitään $W_i = \mathrm{Span}(\mathbf{e}_i)$, voimme siis tulkita avaruuden K^n aliavaruuksien W_i *summana*

$$K^n = W_1 + W_2 + \ldots + W_n.$$

Jos avaruudessa K^n tarkastellaan jotakin toista kantaa $E' = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$, sitä ei enää voi ajatella karteesisina tulona tähän kantaan liittyen, mutta voidaan edelleenkin esittää se summana

$$K^n = W_1' + W_2' + \ldots + W_n',$$

missä $W_i' = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_i)$. Tutkitaan tätä näkökulmaa yleisesti.

Olkoon V K-vektoriavaruus ja olkoot W ja W' sen *aliavaruudet*. Tällöin voidaan muodostaa niiden *summa*

$$W + W' = \{\mathbf{w} + \mathbf{w}' \mid \mathbf{w} \in W, \mathbf{w}' \in W'\}.$$

Helposti nähdään, että $W + W'$ on tällöin myös avaruuden V aliavaruus, itse asiassa se on pienin avaruuden V aliavaruus, joka sisältää sekä aliavaruuden W, että aliavaruuden W' (HT). Toisin sanoen

$$W + W' = \mathrm{Span}(W \cup W').$$

Vastaavalla tavalla voidaan määritellä mielivaltaisen monen aliavaruuden $W_1, \ldots, W_n \leq V$ summa,

$$W_1 + W_2 \ldots + W_n = \{\mathbf{w}_1 + \ldots + \mathbf{w}_n \mid \mathbf{w}_i \in W_i \text{ kaikilla } i = 1, \ldots, n\}.$$

Tällöin $W_1 + W_2 \ldots + W_n = \mathrm{Span}(W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_n)$, erityisesti $W_1 + W_2 \ldots + W_n$ on aliavaruus.

Summan $W + W'$ jokainen alkio $\mathbf{v}$ voidaan määritelmän mukaan kirjoittaa muodossa $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}'$ missä $\mathbf{w} \in W$ ja $\mathbf{w}' \in W'$. Yleensä tällaisen esityksen ei tietenkään tarvitse olla *yksikäsitteinen.* Jos tällainen esitys on kuitenkin aina yksikäsitteinen, merkitään $W + W'$ symbolilla $W \oplus W'$ ja sanotaan sitä aliavaruuksien W, W' (sisäiseksi) *suoraksi summaksi.* Täsmällisemmin, avaruuden V aliavaruudet W, W' muodostavat suoran summan, jos yhtälöstä

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2' = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2',$$

$\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$, $\mathbf{w}_1', \mathbf{w}_2' \in W'$ seuraa, että $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1' = \mathbf{w}_2'$.

Suoran summan käsitettä voidaan yleistää äärellisen moneen aliavaruuden tai jopa mielivaltaiseen aliavaruuksien muodostaman perheen tapaukseen. Tarkastelemme tällä kurssilla ainoastaan äärellista tapausta.

Määritelmä 2.154. *Olkoon V K-vektoriavaruus ja olkoot $W_1, W_2, \ldots, W_n$ sen aliavaruuksia. Jos summan*

$$W_1 + W_2 + \ldots + W_n = \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \ldots + \mathbf{w}_n \mid \mathbf{w}_i \in W_i \text{ kaikilla } i = 1, \ldots, n\}$$

jokainen alkio voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{w}_1 + \ldots + \mathbf{w}_n,$$

$\mathbf{w}_i \in W_i$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$, **täsmälleen yhdellä tavalla**, *sanomme, että aliavaruudet $W_1, W_2, \ldots, W_n$ muodostavat* suoran summan. *Tällöin niiden summa merkitään*

$$W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n.$$

Aliavaruutta $W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n$ sanotaan aliavaruuksien $W_1, W_2, \ldots, W_n$ (sisäiseksi) suoraksi summaksi.

Seuraavassa lemmassa annetaan suoran summan vaihtoehtoisia määritelmiä. Sen formulointia varten esitellään seuraava merkintätapa. Jos jossakin summassa, esimerkiksi $a + b + \ldots + \hat{c} + \ldots + d$, jokin termi c esiintyy varustettuna "hatulla", eli muodossa $\hat{c}$, se tarkoittaa sitä, että se ei oikeasti esiinny tässä summassa, vaan se poistetaan siitä. Tyypillisesti tätä merkintätapaa käytetään seuraavalla tavalla. Olkoon $(x_1, \ldots, x_n)$ jono alkiota. Tällöin merkintä $x_1 + \ldots + \hat{x_i} + \ldots + x_n$ tarkoittaa, että summataan kaikki alkiot paitsi x_i, toisin sanoen

$$x_1 + \ldots + \hat{x_i} + \ldots + x_n = x_1 + \ldots + x_{i-1} + x_{i+1} + \ldots + x_n.$$

Lemma 2.155. *Olkoon V K-vektoriavaruus ja olkoot $W_1, W_2, \ldots, W_n$ sen aliavaruuksia. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.*

(i) Summa $W_1 + W_2 \ldots + W_n$ on suora.

(ii) Oletetaan, että

$$\mathbf{w}_1 + \ldots + \mathbf{w}_n = \mathbf{0}_V$$

joillakin $\mathbf{w}_i \in W_i$, $i = 1, \ldots, n$. Tällöin $\mathbf{w}_i = \mathbf{0}_V$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Toisin sanoen nollavektorin ainoa esitys aliavaruuden $W_1 + W_2 \ldots + W_n$ alkiona on triviaali esitys.

(iii) Jokaisella $i = 1, \ldots, n$ pätee

$$(W_1 + \ldots + \hat{W_i} + \ldots + W_n) \cap W_i = \{\mathbf{0}_V\}.$$

Todistus. (i)$\Longrightarrow$(ii).
Oletetaan, että summa $W_1 + W_2 \ldots + W_n$ on suora. Tällöin erityisesti sen alkiolla $\mathbf{0}_V$ on yksikäsitteinen esitys muodossa $\mathbf{w}_1 + \ldots + \mathbf{w}_n$ joillakin $\mathbf{w}_i \in W_i$, $i = 1, \ldots, n$. Mutta $\mathbf{0}_V + \mathbf{0}_V + \ldots + \mathbf{0}_V$ on varmasti yksi sellainen esitys, joten on pakko olla $\mathbf{w}_i = \mathbf{0}_V$.

(ii)$\Longrightarrow$(iii).
Oletetaan, että nolla-vektorilla on vain triviaali esitys muodossa $\mathbf{w}_1 + \ldots + \mathbf{w}_n$ joillakin

$\mathbf{w}_i \in W_i$, $i = 1, \dots, n$. Olkoon $i \in [n]$ ja olkoot $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{i-1}, \mathbf{w}_{i+1}, \dots, \mathbf{w}_n$ sellaisia, että pätee yhtälö

$$\mathbf{w}_1 + \ldots + \mathbf{w}_{i-1} + \mathbf{w}_{i+1} + \ldots + \mathbf{w}_n = \mathbf{w}_i \in W_i.$$

Tällöin

$$\mathbf{0}_V = \mathbf{w}_1 + \ldots + \mathbf{w}_{i-1} + (-\mathbf{w}_i) + \mathbf{w}_{i+1} + \ldots + \mathbf{w}_n.$$

Oletuksen (ii) nojalla tästä seuraa, että $\mathbf{w}_i = \mathbf{0}_V$ kaikilla $i = 1, \dots, n$. Erityisesti ainoa avaruuksien $W_1 + \ldots + \hat{W}_i + \ldots + W_n$ ja W_i yhteinen vektori on nollavektori.

(iii)$\Longrightarrow$(i).
Oletetaan, että jokaisella $i \in [n]$ pätee

$$(W_1 + \ldots + \hat{W}_i + \ldots + W_n) \cap W_i = \{\mathbf{0}_V\}.$$

Olkoot $\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i' \in W_i$, $i \in [n]$ siten, että pätee

$$\mathbf{w}_1 + \ldots + \mathbf{w}_n = \mathbf{w}_1' + \ldots + \mathbf{w}_n'.$$

Pitää osoittaa, että $\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_i'$ jokaisella $i \in [n]$. Olkoon $i \in [n]$. Siirtämällä termejä sopivasti puolesta toiseen, voidaan yllä oleva yhtälö kirjoittaa muotoon

$$(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_1') + \ldots + (\mathbf{w}_{i-1} - \mathbf{w}_{i-1}') + (\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{w}_{i+1}') + \ldots + (\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n') = (\mathbf{w}_i' - \mathbf{w}_i),$$

missä vasemmalla puoleella on summan $W_1 + \ldots + \hat{W}_i + \ldots + W_n$ alkio ja oikealla puoleella aliavaruuden W_i alkio. Oletuksesta (iii) seuraa, että erityisesti $\mathbf{w}_i' - \mathbf{w}_i = \mathbf{0}_V$ eli $\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_i'$. Tämä pätee kaikilla i. Olemme valmiit. □

Erityisesti tapauksessa $n = 2$ saadaan seuraava karakterisaatio.

Seuraus 2.156. *Olkoon V K-vektoriavaruus ja W_1, W_2 sen aliavaruudet. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.*

(i) Summa $W_1 + W_2$ on suora.

(ii) Oletetaan, että

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{0}_V$$

joillakin $\mathbf{w}_i \in W_i$, $i = 1, 2$. Tällöin $\mathbf{w}_1 = \mathbf{0}_V = \mathbf{w}_2$.

(iii) $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}_V\}$.

Toisin sanoen summa $W_1 + W_2$ on suora jos ja vain ainoa vektoriavaruuksien W_1, W_2 yhteinen alkio on nolla-vektori.

Esimerkki 2.157. *Olkoon $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ kaikkien kuvausten $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muodostama $\mathbb{R}$-vektoriavaruus. Määritellään sen aliavaruudet U_1, U_2 seuraavasti.*

$$U_1 = \{f \in V \mid f(x) = f(-x) \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}\},$$

$$U_2 = \{f \in V \mid f(x) = -f(-x) \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}\}.$$

U_1 on siis kaikkien parillisten *kuvausten muodostama joukko ja U_2 on kaikkien* parittomien *kuvausten muodostama joukko. Helposti nähdään, että nämä joukot todellakin ovat avaruuden V aliavaruuksia.*
Osoitetaan edellisen tuloksen avulla, että summa $U_1 + U_2$ on suora. Riittää osoittaa, että $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Olkoon $f\colon U_1 \cap U_2$ ja olkoon $x \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$f(x) = f(-x) = -f(-(-x)) = -f(x).$$

Koska nolla on ainoa reaaliluku y, jolle pätee $y = -y$, tästä seuraa, että $f(x) = 0$. Tämä pätee kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joten f on nolla-kuvaus. Näin ollen summa $U_1 + U_2$ on suora.

Osoitetaan vielä, että itse asiassa pätee $U_1 \oplus U_2 = V$ eli jokainen funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ voidaan kirjoittaa parillisen ja parittoman funktion summana. Lisäksi, koska tiedämme jo, että tämä summa on suora, tällainen esitys on tällöin varmasti yksikäsitteinen. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Määrittelemme kuvaukset $f_1, f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ehdoilla

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)),$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

Tällöin $f_i \in U_i, i = 1, 2$ ja $f = f_1 + f_2$.
Samat tulokset pätevät, jos kunta $\mathbb{R}$ korvataan mielivaltaisella kunnalla K, jonka karakteristika ei ole kaksi.

Esimerkki 2.158. *Olkoon V K-vektoriavaruus ja olkoon $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}n)$ vapaa jono avaruudessa V. Jokaisella $i = 1, \dots, n$ olkoon*

$$W_i = \{k\mathbf{v}_i \mid k \in K\} = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_i).$$

Tällöin summa $W_1 + W_2 + \ldots + W_n$ on suora (tarkista). Näin olleen suoran summan käsite on jossakin mielessä jonon vapauden käsitteen yleistys.

Jos $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ on avaruuden V kanta, pätee

$$W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n = V.$$

Olkoon V vektoriavaruus ja olkoon W_1 sen aliavaruus. Aliavaruutta $W_2 \leq V$ sanotaan aliavaruuden W_1 *komplementiksi* vektoriavaruudessa V, jos summa $W_1 + W_2$ on suora ja lisäksi pätee

$$W_1 \oplus W_2 = V.$$

Aliavaruuden komplementti ei yleensä ole missään nimessä yksikäsitteinen. Esimerkiksi tasossa $\mathbb{R}^2$, joka on 2-ulotteinen $\mathbb{R}$-vektoriavaruus, aliavaruudella $\mathbb{R}_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ on äärettömän monta erilaista komplementtia - tällaiseksi käy mikä tahansa origon kautta kulkeva suora, joka ei ole $\mathbb{R}_1$ itse.

Vektoriavaruuden jokaisella aliavaruudella on olemassa ainakin yksi komplementti. Todistetaan tämä äärellisulotteiselle vektoriavaruuksille.

Lemma 2.159. *Olkoon V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus. Olkoon U sen aliavaruus. Tällöin U:llä on olemassa komplementti V:ssä.*

Todistus. Valitaan (Lemma 2.48) avaruudelle V kanta $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ siten, että $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ on aliavaruuden U kanta. Tällöin

$$W = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$$

on U:n komplementti (tarkista yksityiskohdat). □

Suoran summan dimensio on sen tekijöiden dimensioiden summa. Yleisemmin pätee seuraava väite.

Propositio 2.160. *Olkoot $W_1, \ldots, W_n$ vektoriavaruuden V aliavaruusksia siten, että*

$$V = \sum_{i=1}^{n} W_i.$$

Oletetaan, että W_i on äärellisulotteinen kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Tällöin myös V on äärellisulotteinen ja

$$\dim V \leq \sum_{i=1}^{n} \dim W_i.$$

Lisäksi tämä epäyhtälö pätee yhtälönä, eli

$$\dim V = \sum_{i=1}^{n} \dim W_i$$

jos ja vain jos summa $\sum_{i=1}^{n} W_i$ on **suora**.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Esimerkki 2.161. *Olkoot U ja V molemmat 4-ulotteisia $\mathbb{R}$-vektoriavaruuden $\mathbb{R}^7$ aliavaruuksia. Osoitetaan, että summa $W = U + V$ ei voi olla suora. Jos summa olisi suora, edellisen proposition nojalla pätisi*

$$\dim W = \dim U + \dim V = 8.$$

Toisaalta W on 7-ulotteisen vektoriavaruuden $\mathbb{R}^7$ aliavaruus, joten $\dim W \leq 7$. Näin ollen summa $U + V$ ei ole suora. Seurauksen 2.156 avulla voidaa päätellä, että on olemassa nolla-vektori eroavasta vektori $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$ joka kuuluu molempiin aliavaruuksiin U ja V, $\mathbf{v} \in U \cap V$.

Esimerkki 2.162. *Olkoon V 6-ulotteinen K-vektoriavaruus ja olkoot W_1, W_2, W_3 sen aliavaruuksia, joista tiedetään, että $\dim W_1 = \dim W_2 = \dim W_3 = 2$. Tällöin $W_1 + W_2 + W_3 = V$ jos ja vain jos summa $W_1 + W_2 + W_3$ on suora. Nimittäin Proposition 2.160 nojalla aliavaruuden $V' = W_1 + W_2 + W_3$ dimensio on korkeintaan ≤ 6 ja se on yhtä suuri kuin 6 jos ja vain jos tämä summa on suora. Toisaalta $\dim V' = 6$ jos ja vain jos $V' = V$ (Lemma 2.48).*

Ulkoinen suora summa

Oletetaan, että aliavaruuden V aliavaruudet $W_1, \dots, W_n$ muodostavat suoran summan ja lisäksi, että
$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_n.$$
Tällöin avaruuden V vektoriavaruuden struktuuri on täysin ja yksikäsitteisesti määrätty, kun tunnetaan aliavaruuksien W_i vektoriavaruus-struktuurit. Nimittäin, olkoot $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$ kaksi vektoria. Tällöin on olemassa yksikäsitteiset esitykset

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \dots + \mathbf{w}_n,$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{w}'_1 + \dots + \mathbf{w}'_n,$$

joissa $\mathbf{w}_i, \mathbf{w}'_i \in W_i$, $i = 1, \dots, n$. Koska esitys on yksikäsitteinen, voimme ajatella vektoreita $\mathbf{w}_i \in W_i$ vektorin $\mathbf{w}$ ”komponentteina” suorassa summassa $W_1 \oplus \dots \oplus W_n$, samoin vektorin $\mathbf{v}'$ kohdalla. Näistä esityksistä seuraa, että summan $\mathbf{v} + \mathbf{v}'$ yksikäsitteinen esitys suoran summan $W_1 \oplus \dots \oplus W_n$ alkiona on

$$\mathbf{v} + \mathbf{v}' = (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}'_1) + \dots + (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}'_n).$$

Näin ollen summavektorin $\mathbf{v} + \mathbf{v}'$ yksikäsitteiset ”komponentit” suoran summan $W_1 \oplus \dots \oplus W_n$ alkiona ovat sen tekijöiden $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$ vastaavien ”komponenttien” summat aliavaruuksissa W_i.

Samanlaiset huomiot koskevat skalaarikertolaskua. Voidaan siis ”rekonstruoida” suoran summan algebrallinen struktuuri, kun tunnetaan sen tekijöiden algebralliset struktuurit.

Tämä havainto motivoi toisen, ”ulkoisen” näkökulman suoran summan käsitteeseen, jossa ei tarvitse etukäteen olettaa, että summattavat aliavaruudet ovat saman ”isomman” avaruuden aliavaruuksia.

Vaikka olemme kurssilla puhuneeet *karteesisesta tulosta* aikaisemminkin, sekä käyttäneet sitä esimerkeissä, palautetaan mieleen sen ominaisuuksia erityisesti *kategoriateorettisesta näkökulmasta*. Unohdetaan algebra hetkellisesti ja tarkastellaan ensin joukkoopillista tilannetta. Olkoot $X_1, \dots, X_n$ joukkoja, $n \in \mathbb{N}$. *Karteesinen tulo* $\prod_{i=1}^n X_i = X_1 \times \dots \times X_n$ on kaikkien jonojen $(x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in X_i$, $i = 1, \dots, n$, muodostama joukko. Alkiota x_i sanotaan jonon i:nneksi *komponentiksi*. Kuvausta $\mathrm{pr}_i \colon \prod_{i=1}^n X_i \to X_i$, joka on määritelty kaavalla $\mathrm{pr}_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ sanotaan *projektiokuvaukseksi* tai yksinkertaisesti *projektioksi* (joukolle X_i). Projektio pr_i siis poimii jonon i:nnen komponentin.

Karteesisen tulon tärkeys piilee sen niin sanotussa **”universaaliominaisuudessa”**. Tämä sanoo seuraavan. Kuvitellaan, että meillä on jokin joukko Y ja haluamme konstruoida kuvauksen $f \colon Y \to \prod_{i=1}^n X_i$. Tällöin jokaisella $y \in Y$ kuva-alkio $f(y)$ on karteesisen joukon $\prod_{i=1}^n X_i$ alkio, eli jono $x = (x_1, \dots, x_n)$. Koska $f(y) = x$, tämän jonon i:nnes komponentti x_i voidaan laskea kaavalla

$$x_i = \mathrm{pr}_i(f(y)) = (\mathrm{pr}_i \circ f)(y).$$

Koska komponentit x_i määrävät jonon $x = (x_1, \dots, x_n)$ yksikäsitteisesti, jotta osaisimme päätellä mikä on $f(y)$, meidän riittää tuntea jonon $f(y)$ komponentit, eli, edellisen nojalla, meidän riittää tuntea yhdistetyt kuvaukset $\mathrm{pr}_i \circ f = f_i \colon Y \to X_i$, jokaisella $i = 1, \dots, n$. Näitä kuvauksia sanotaan kuvauksen f *komponenteiksi.* Kuvaus f määräytyy täysin, kun tunnemme jonon $(f_1, \dots, f_n)$, tästä syystä tällaisessa tilanteessa merkitään usein $f = (f_1, \dots, f_n)$.

Kääntäen, olkoon $(f_1, \dots, f_n)$ kuvausten muodostama jono, jossa $f_i \colon Y \to X_i$ jokaisella $i = 1, \dots, n$. Tällöin voidaan "laittaa nämä kuvaukset yhteen" eli määritellä niiden avulla kuvaus $f \colon Y \to \prod_{i=1}^n X_i$ kaavalla

$$f(y) = (f_1(x), \dots, f_n(x).$$

Tällöin kuvauksen $f \colon Y \to \prod_{i=1}^n X_i$ komponentit ovat kuvauksia $f_1, \dots, f_n$. Näin ollen kuvaus $f \colon Y \to \prod_{i=1}^n X_i$ on sama asia kuin mikä tahansa jono $(f_1, \dots, f_n)$ kuvauksia, jossa $f_i \colon Y \to X_i$ jokaisella $i = 1, \dots, n$.

Toisin sanoen, jos meillä on jono $(f_1, \dots, f_n)$ kuvauksia, joilla on *yhteinen lähtöjoukko*, mutta mahdollisesti erilaiset maalipuolet, karteesisen tulon käsite antaa teknisen mahdollisuuden "koodata" tämä kuvausten muodostama jono *yhdeksi kuvaukseksi.* Juuri tätä karteesisen tulon ominaisuutta sanotaan tulon "universaaliominaisuudeksi" (kategoriateorian mielessä).

Edellisessä keskustelussa tarkasteltiin pelkkää joukko-opillista tilannetta, jossa joukoissa ei ollut mitään algebrallista struktuuria eikä kuvauksiltakaan vaadittu mitään. Katsotaan nyt miltä samanlainen tilanne näyttää lineaarialgebrassa.

Olkoot $W_1, \dots, W_n$ K-vektoriavaruuksia. Emme siis oleta, että näillä avaruuksilla olisi mitään yhteistä, esimerkiksi, että ne olisivat saman avaruuden aliavaruuksia.

Vektoriavaruuksien $W_1, \dots, W_n$ **karteesinen tulo**

$$V = \prod_{i=1}^{n} W_i$$

voidaan varustaa luonnollisella tavalla K-vektoriavaruuden struktuurilla "komponenteittain". Tämä tarkoittaa sitä, että yhteenlasku V:ssä määritellään kaavalla

$$(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n) + (\mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}'_n) = (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}_n + \mathbf{w}'_n)$$

ja skalaarikertolasku määritellään kaavalla

$$k(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n) = (k\mathbf{w}_1, \dots, k\mathbf{w}_n).$$

Näin määriteltyä vektoriavaruutta $(V, +, \cdot)$ sanotaan vektoriavaruuksien $W_1, \dots, W_n$ *tuloavaruudeksi* tai yksinkertaisemmin *tuloksi.* Jätetään lukijalle harjoitustehtäväksi tarkistaa, että $(V, +, \cdot)$ on tosiaankin K-vektoriavaruus.

Huomautus: Olemme käyttäneet vektoriavaruuksien karteesista tuloa aikaisemminkin, nimittäin multilineaaristen kuvausten yhteydessä. Täytyy kuitenkin korostaa, että *multilineaarinen kuvaus* $F \colon W_1 \times \ldots \times W_n \to V$ on eri asia kuin *lineaarinen* kuvaus

$L\colon W_1 \times \ldots \times W_n \to V$, missä lähtöavaruus on juuri määritelty tuloavaruus. Olennaisin ero on seuraava - multilineaarinen kuvaus on lineaarinen vain jokaisen muuttujan suhteen erikseen, muiden muuttujien arvojen olleessa kiinteitä. Lineaarinen kuvaus $L\colon W_1 \times \ldots W_n \to V$ on taas lineaarinen kaikkien muuttujien suhteen samanaikaisesti.

Esimerkiksi kuvaus $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = xy$ on $\mathbb{R}$-multilineaarinen, mutta ei ole $\mathbb{R}$-lineaarinen (mieti miksi). Kuvaus $L\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $L(x, y) = x+y$ on taas $\mathbb{R}$-lineaarinen, mutta ei ole $\mathbb{R}$-bilineaarinen (mieti miksi).

Olkoon $V = \prod_{i=1}^{n} W_i$ vektoriavaruuksien $W_1, \ldots, W_n$ tulo. Jokaisella $i = 1, \ldots, n$ määritellään *kanoniset kuvaukset* $\iota_i\colon W_i \to V$ ja $p_i\colon V \to W_i$ seuraavasti. Kuvaus p_i on yksinkertaisesti karteesiseen tuloon liityvä projektiokuvaus, joka poimii jonosta $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$ sen i:nnen komponentin $\mathbf{w}_i$. Kuvausta p_i sanomme kanoniseksi projektioksi.

Kuvaus $\iota_i\colon W_i \to V$ määritellään seuraavalla tavalla. Olkoon $\mathbf{w} \in W_i$ mielivaltainen. Asetetaan $\iota_i(\mathbf{w}) = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$, missä $\mathbf{w}_j = \mathbf{0}_{W_j}$ kun $j \neq i$ ja $\mathbf{w}_i = \mathbf{w}$. Toisin sanoen jonon $\iota_i(\mathbf{w})$ i:nnes komponentti on vektori $\mathbf{w}$ ja muut komponentit ovat vastaavien vektoriavaruuksien nolla-vektoreita. Kuvausta ι_i sanotaan *kanoniseksi injektioksi.* Kuten tästä terminologian valinnasta voi arvata, tämä kuvaus on aina injektio. Tämä todistetaan seuraavassa lemmassa alla. Isomorfialauseesta seuraa tällöin, että tuloavaruuden V aliavaruus $\iota_i(W_i)$ on isomorfinen vektoriavaruuden W_i kanssa. Yleensä aliavaruudet W_i ja $\iota_i(W_i)$ identifioidaan, eli samastetaan vektoriavaruuden W_i jokainen alkio $\mathbf{w}$ vastaavan tulomodulin alkion $\iota_i(\mathbf{w})$ kanssa. Tämän samastuksen avulla voimme ajatella, että W_i on tuloavaruuden $\prod_{i=1}^{n} W_i$ aliavaruus jokaisella $i = 1, \ldots, n$.

Lemma 2.163. *Olkoot $W_1, \ldots, W_n$ K-vektoriavaruuksia. Olkoon $V = \prod_{i=1}^{n} W_i$ niiden tuloavaruus. Tällöin kanoniset kuvaukset $\iota_i\colon W_i \to V$ ja $p_i\colon V \to W_i$ ovat lineaarisia kuvauksia. Lisäksi pätevät seuraavat ominaisuudet.*

(1) Jokaisella $i = 1, \ldots, n$
$$p_i\iota_i = \mathrm{id}_{W_i}.$$

(2) Kaikilla $i, j \in [n]$, $i \neq j$ pätee
$$p_j\iota_i = 0.$$

Tässä $0\colon W_i \to W_i$ on nollakuvaus, joka kuvaa kaikki vektorit nolla-vektoriksi.

(3) Jokaisella $i = 1, \ldots, n$ kuvaus ι_i on injektio ja kuvaus p_i on surjektio.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Olkoot $W_1, \ldots, W_n$ vektoriavaruuksia ja olkoon $V = \prod_{i=1}^{n} W_i$ niiden tuloavaruus. Injektiivisen kuvauksen $\iota_i\colon W_i \to V$ ansiosta voidaan sopia, että avaruus W_i identifioidaan avaruuden V aliavaruuden $\iota_i(W_i)$ kanssa. Tällöin avaruuksista $W_1, \ldots, W_n$, joilla alunperin ei ollut mitään yhteistä, tulee saman "isomman avaruuden" aliavaruuksia. Lisäksi osoittautuu, että nämä aliavaruudet muodostavat *suoran summan*, jonka arvo on tuloavaruus V.

Tästä syystä tuloavaruutta $\prod_{i=1}^{n} W_i$ sanotaan usein myös vektoriavaruuksien $W_1, \ldots, W_n$ **ulkoiseksi suoraksi summaksi** ja merkitään $W_1 \oplus \ldots \oplus W_n$.

Lemma 2.164. *Olkoot* $W_1, \ldots, W_n$ *vektoriavaruuksia ja olkoon* $V = \prod_{i=1}^n W_i$ *niiden tuloavaruus. Tällöin summa* $W_1 + \ldots + W_n$ *on suora. Lisäksi*

$$V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_n.$$

Todistus. Olkoon $\mathbf{v} \in V$. Tällöin on olemassa yksikäsitteiset $\mathbf{w}_i \in W_i$, jolle pätee

$$\mathbf{v} = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n).$$

Helposti nähdään, että tällöin

$$\mathbf{v} = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n) = \sum_{i=1}^n \iota_i(\mathbf{w}_i).$$

Koska olemme sopineet samastuksesta $\iota_i(\mathbf{w}_i) = \mathbf{w}_i$, tämä voidaan kirjoittaa yhtälönä

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i.$$

Kääntäen, jos

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^n \iota_i(\mathbf{w}_i),$$

missä $\mathbf{w}_i \in W_i$, niin taas määritelmistä helposti nähdään, että

$$\mathbf{v} = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n).$$

Koska tällainen esitys on karteesisen tulon määritelmän nojalla yksikäsitteinen, tästä seuraa, että summa $W_1 + \ldots + W_n$ on suora ja $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_n$. □

Edellisen Lemman todistuksessa esiintyvä yhtälö

$$\mathbf{v} = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n) = \sum_{i=1}^n \iota_i(\mathbf{w}_i),$$

voidaan kirjoittaa muotoon

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \iota_i(p_i(\mathbf{v})) = \sum_{i=1}^n \iota_i p_i(\mathbf{v}),$$

koska $\mathbf{w}_i = p_i(\mathbf{v})$ projektion p_i määritelmän mukaan. Tästä seuraa, että kanonisia projektiota ja injektioita sitoo myös tärkeä algebrallinen yhtälö

$$\sum_{i=1}^n \iota_i p_i = \mathrm{id}_V .$$

Olemme osoittaneet, että vektoriavaruuksien ”ulkoinen”, abstrakti suora summa voidaan tulkita myös tämän aliluvun alussa tarkasteltuna ”sisäisenä” suorana summana. Myös käänteinen tulkinta pätee - jokainen sisäinen suora summa voidaan tulkita myös ulkoisena suorana summana. Tarkemmin sanottuna, olkoot $W_1, \ldots, W_n$ avaruuden V aliavaruuksia ja oletetaan, että niiden summa on suora. Lisäksi oletetaan, että

$$W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n = V.$$

Toisaalta voimme muodostaa myös abstraktin tuloavaruuden $V' = \prod_{i=1}^n W_i$, joka on vektoriavaruuksien ulkoinen suora summa. Koska jokainen vektoriavaruuden V vektori $\mathbf{v}$ voidaan kirjoittaa *yksikäsitteisellä tavalla* muodossa

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i,$$

missä $\mathbf{w}_i \in W_i$ kaikilla $i \in [n]$, kuvauksen $V' \to V$,

$$(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n) \to \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i$$

helposti nähdään olevan *lineaarinen bijektio*. Toisin sanoen sisäinen suora summa V ja ulkoinen suora summa V' ovat *isomorfisia*, vieläkin kanonisella tavalla.

Näin ollen sisäisen ja ulkoisen suoran summan käsitteet voidaan ajatella olevan erilaisia näkökulmia samaan asiaan.

Universaaliominaisuudet

Olkoot $W_1, \ldots, W_n$ K-vektoriavaruuksia. Tällöin avaruus

$$\prod_{i=1}^n W_i = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n$$

voidaan tulkita toisaalta *karteesisena tulona* ja toisaalta *suorana summana*. Kumpaankin tulkintaan liittyy oma *universaaliominaisuus*. Mainittakoon, että matematiikan monilla aloilla, erityisesti algebrassa, voidaan usein puhua sekä olioiden *tulo-objektista*, että myös niiden *suorasta summasta*. Kumpaankin tällöin liittyy kanoninen universaaliominaisuus. Yleensä tulo ja suora summa eivät kuitenkaan ole samoja. Se, että äärellisulotteisten vektoriavaruuksien teoriassa tulo ja suora summa ovatkin sama olio on tavallaan *onnekas sattuma*, yleisen teorian näkökulmasta.

Tulon universaaliominaisuudesta puhuttiin jo karteesisen tulon yhteydessä, joukko-opillisesta näkökulmasta. Muotoillaan lineaarialgebrallinen versio siitä seuraavassa propositiossa, ilman todistusta, sillä emme tarvitse tätä universaaliominaisuutta jatkossa, ja koska se seuraa hyvin helposti (joukko-oppilisen) karteesisen tulon vastaavasta universaaliominaisuudesta.

Palautetaan mieleen, että kanoninen projektio $p_j \colon \prod_{i=1}^n W_i \to W_j$, $j = 1, \ldots, n$ on määritelty kaavalla $p_j(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n) = \mathbf{w}_j$.

Propositio 2.165. *Olkoot* $W_1, \ldots, W_n, V$ K*-vektoriavaruuksia. Oletetaan, että jokaisella* $i = 1, \ldots, n$ *on annettu lineaarinen kuvaus* $L_i \colon V \to W_i$*. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi lineaarinen kuvaus* $L \colon V \to \prod_{i=1}^n W_i$ *siten, että kaikilla* $i = 1, \ldots, n$ *pätee yhtälö*

$$p_i \circ L = L_i.$$

Tätä kuvausta sanotaan kuvausten $(L_i)_{i=1}^n$ tuloksi *ja merkitään myös* $L = \prod_{i=1}^n L_i = L_1 \times \ldots \times L_n$.

Tämä ominaisuus karakterisoi vektoriavaruuksien W_i *tuloavaruuden ja kuvaukset* (p_i), $i = 1, \ldots, n$*, yksikäsitteisesti isomorfiaa vaille seuraavassa mielessä. Olkoon* U K*-vektoriavaruus ja olkoot kuvaukset* $p'_i \colon U \to W_i$ *lineaarisia kuvauksia,* $i = 1, \ldots, n$*. Oletetaan, että* U *ja kuvaukset* (p'_i) *toteutavat tulon universaalin ominaisuuden, toisin sanoen jos* V *on mikä tahansa* K*-vektoriavaruus ja jokaisella* $i = 1, \ldots, n$ *on annettu lineaarinen kuvaus* $L_i \colon V \to W_i$*, niin on olemassa täsmälleen yksi lineaarinen kuvaus* $L \colon V \to U$ *siten, että*

$$p'_i \circ L = L_i$$

kaikilla $i = 1, \ldots, n$*. Tällöin vektoriavaruus* U *on* isomorfinen *tuloavaruuden* $\prod_{i=1}^n W_i$ *kanssa. Tarkemmin on olemassa isomorfismi* $\Phi \colon U \to \prod_{i=1}^n W_i$ *siten, että kaikilla* $i = 1, \ldots, n$ *pätee*

$$p_i \circ \Phi = p'_1.$$

Lisäksi tällainen isomorfismi on yksikäsitteinen.

Edellisen Proposition muotoilu saattaa näyttää pelottavammalta ja monimutkaisemmalta kuin mitä se todellisuudessa on. Valaistaan sen varsinainen sisältö diagrammien avulla. Tulon $\prod_{i=1}^n W_i$ universaaliominaisuus siis sanoo sen, että jokaisella $i = 1, \ldots, n$ kolmion muotoinen digrammi

(2.166)
$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, "L"] \arrow[dr, "L_i"'] & & \prod_{i=1}^n W_i \arrow[dl, "p_i"] \\ & W_i & \end{tikzcd}$$

voidaan aina *täydentää* samalla kuvausella L ja lisäksi tämä L on *ainoa* kuvaus, joka täydentää kaikki nämä kolmionmuotoiset diagrammit. Asiaa voi ajatella myös toisesta näkökulmasta. Nimittäin kumpikin perhe $(L_i)_{i=1,\ldots,n}$ ja $(p_i)_{i=1,\ldots,n}$ on esimerkki äärellisestä perheestä lineaarisia kuvauksia, joilla on *sama* lähtöavaruus. Se on avaruus V perheen $(L_i)_{i=1,\ldots,n}$ kohdalla ja karteesinen tulo $\prod_{i=1}^n W_i$ perheen $(p_i)_{i=1,\ldots,n}$ kohdalla. Maaliavaruus taas vaihtelee indeksin i mukaan, kuvauksilla L_i ja p_i se on avaruus W_i. Tulon universaaliominaisuus sanoo sen, että kuvausten perhe $(p_i)_{i=1,\ldots,n}$ on *universaalinen* kaikkien muiden tällaisten perheiden suhteen, siinä mielessä, että mielivaltaisen tämäntyyppisen perheen $(L_i)_{i=1,\ldots,n}$ jäsenet voidaan **hajottaa** kuvausten (p_i) suhteen samalla kuvauksella L. Lisäksi tämä ominaisuus määrittää perheen (p_i) yksikäsitteisesti - mikä tahansa muu perhe, jolla on sama universaaliominaisuus, on oleellisesti sama perhe isomorfiaa vaille.

Yksi (kategoriateoreettisesta näkökulmasta "parempi") tapa määritellä tuloavaruus onkin sen universaaliominaisuuden kautta. Tämä tarkoittaa sitä, että tuloavaruutta ei määritelläkään konkreettisena karteesisena tulona, vaan minä tahansa vektoriavaruutena, joka toteuttaa tulon universaaliominaisuuden, kuten se on muotoiltu Propositiossa 2.165. Tällöin tuloavaruus ei ole määritelty yksikäsitteisesti, vaan ainoastaan isomorfiaa vaille ja mikä tahansa tuloavaruuden kanssa isomorfinen vektoriavaruus toteuttaa saman määritelmän eli on myös tuloavaruus. Tällä tosiasialla ei kuitenkaan ole mitään merkitystä, sillä käytännössä tulon universaaliominaisuus on ainoa, mistä olemme kiinnostuneet. Kaikki tuloavaruuden muut algebralliset ominaisuudet voidaan johtaa sen universaaliominaisuudesta. Ainoa mihin konkreettinen konstruktio (kuten se, mikä me annettiin tuloavaruudelle alunperin eli karteesisen tulo) tarvitaan, on se, että voimme vakuuttua siitä, että ainakin yksi kyseisen määritelmän toteuttava olio **on olemassa**. Sen jälkeen, kun olemme varmoja siitä, että se on olemassa, voimme operoida sillä käyttämällä ainoastaan sen universaaliominaisuutta. Meidän ei tarvitse tiedä enää miten tämä olio oli alunperin konkreettisesti konstruoitu ja mitä sen " sisällä " on.

Tietojenkäsittelyyn perehtyneelle tämä lähestymistapa voi olla tuttu olio-ohjelmoinnista, jonka idea perustuu samaan periaatteseen - ei ole mitään väliä sillä, miten olio on konkrettisesti toteutettu, ainoastaan sen ominaisuuksilla on merkistystä. Jos ainoa, mistä olemme kiinnostuneet, ovat nämä ominaisuudet, mikä tahansa olio, joka toteuttaa ne, kelpaa.

Käytännössä tulokuvauksen määrittäminen on hyvin helppoa - kuvausten $L_i \colon V \to W_i$, $i = 1, \ldots, n$, tulokuvaus $L = L_1 \times \ldots \times L_n \colon V \to \prod_{i=1}^n W_i$ on määritelty yksinkertaisella kaavalla

$$L(\mathbf{v}) = (L_1(\mathbf{v}), L_2(\mathbf{v}), \ldots, L_n(\mathbf{v}))$$

kaikilla $\mathbf{v} \in V$. Kuvaukset L_i ovat tulokuvauksen $L_1 \times \ldots \times L_n$ *komponentteja.*

Esimerkki 2.167. *Olkoot $L_1, L_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineaarisia kuvauksia, joille pätee $L_1(x, y) = (x + y)$, $L_2(x, y) = x - y$. Proposition 2.165 mukaan on olemassa yksikäsitteinen lineaarinen kuvaus $L = L_1 \times L_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, jolle pätee $p_1 \circ L = L_1$, $p_2 \circ L = L_2$. Tämä kuvaus on yksinkertaisesti kaavalla $L(x, y) = (x + y, x - y)$ määritelty kuvaus.*

Suoran summan universaaliominaisuus

Tulon $\prod_{i=1}^n W_i$ universaaliominaisuus littyy kuvauksiin $L_i \colon V \to W_i$ eli sellaisiin, joiden *lähtöavaruus* on kiinnitetty avaruus V ja *maaliavaruus* saa arvoja jonosta $W_1, \ldots, W_n$. Suoran summan universaaliominaisuus on tämän ominaisuuden *duaali* eli se koskee päinvastaista tilannetta - kuvauksia jotka ovat muotoa $L_i \colon W_i \to V$.

Seuravassa propositiossa käytämme tuloavaruudelle suoran summan merkintää $\oplus_{i=1}^n W_i$ korostaakseen sitä, että kyseessä on suoran summan ominaisuus. On kuitenkin muistettava, että tässä tapauksessa kyseessä on sama avaruus kuin tuloavaruus $\prod_{i=1}^n W_i$.

Palautetaan mieleen, että kanoninen injektio $\iota_j \colon W_j \to \oplus_{i=1}^n W_i$, $j = 1, \ldots, n$ määritellään kaavalla $\iota_j(\mathbf{w}_j) = (\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{w}_j, \ldots, \mathbf{0}$, missä $\mathbf{w}_j$ oikealla sijaitsee komponentissa j.

Propositio 2.168. Suoran summan universaaliominaisuus

Olkoot $W_1, \ldots, W_n, V$ K-vektoriavaruuksia. Oletetaan, että jokaisella $i = 1, \ldots, n$ on *annettu lineaarinen kuvaus $L_i \colon W_i \to V$. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi lineaarinen kuvaus $L \colon \oplus_{i=1}^n W_i \to V$ siten, että kaikilla $i = 1, \ldots, n$ pätee yhtälö*

$$L \circ \iota_i = L_i.$$

Kuvausta L sanotaan kuvausten $(L_i)_{i=1}^n$ suoraksi summaksi *ja merkitään $\oplus_{i=1}^n L_i$.*

Tämä ominaisuus karakterisoi vektoriavaruuksien W_i suoran summan ja kuvaukset $(\iota_i), i = 1, \ldots, n$ yksikäsitteisesti isomorfiaa vaille seuraavassa mielessä. Olkoon U K-vektoriavaruus ja olkoot kuvaukset $\iota_i' \colon W_i \to V$ lineaarisia kuvauksia, $i = 1, \ldots, n$. Oletetaan, että U ja kuvaukset (ι_i') toteuttavat suoran summan universaalin ominaisuuden, toisin sanoen jos V on mikä tahansa K-vektoriavaruus ja jokaisella $i = 1, \ldots, n$ on annettu lineaarinen kuvaus $L_i \colon W_i \to V$, niin on olemassa täsmälleen yksi lineaarinen kuvaus $L \colon U \to V$ siten, että

$$L \circ \iota_i' = L_i$$

kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Tällöin vektoriavaruus U on isomorfinen *suoran summan $\oplus_{i=1}^n W_i$ kanssa. Tarkemmin sanottuna on olemassa isomorfismi $\Phi \colon \oplus_{i=1}^n W_i \to U$ siten, että kaikilla $i = 1, \ldots, n$ pätee*

$$\Phi \circ \iota_i = \iota_i'.$$

Lisäksi tällainen isomorfismi on yksikäsitteinen.

Todistus. Osoitetaan ensin, että suora summa

$$\oplus_{i=1}^n W_i = \prod_{i=1}^n W_i$$

toteuttaa Proposition muotoilussa määritellyn universaaliominaisuuden.

Oletetaan, että $L_i \colon W_i \to V$ on lineaarinen kuvaus jokaisella $i = 1, \ldots, n$. Haluamme konstruoida lineaarisen kuvauksen $L \colon \oplus_{i=1}^n W_i \to V$, jolle pätee

$$L \circ \iota_i = L_i$$

kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Lemman 2.164 nojalla jokainen suoran summan vektori

$$\mathbf{v} = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n) \in \oplus_{i=1}^n W_i = \prod_{i=1}^n W_i$$

voidaan esittää summana

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \iota_i(\mathbf{w}_i)$$

yksikäsitteisellä tavalla. Tästä seuraa, että jos kuvaus L on olemassa, sille pätee

$$L(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n L(\iota_i(\mathbf{w}_i)) = \sum_{i=1}^n L_i(\mathbf{w}_i). \tag{2.169}$$

Erityisesti kuvaus L on yksikäsitteinen ja se on määritelty kaavalla 2.169, missä $\mathbf{w}_i$ ovat alkion $\mathbf{v} = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$ komponentteja. Kääntäen helposti nähdään, että tällä tavalla määritelty kuvaus L on lineaarinen ja toteuttaa ehdon $L \circ \iota_i = L_i$ jokaisella $i = 1, \ldots, n$. Näin ollen suora summa toteuttaa universaaliominaisuudensa.

Osoitetaan seuraavaksi, että mikä tahansa suoran summan universaaliominaisuuden toteuttava vektoriavaruus U on isomorfinen avaruuden $W = \oplus_{i=1}^n W_i$ kanssa. Tarkemmin sanottuna olkoon U vektoriavaruus ja lineaariset kuvaukset $\iota_i' \colon W_i \to U$ toteuttavat suoran summan universaalin ominaisuuden. Tämä tarkoittaa sitä, että jos $L_1, \ldots, L_n$ on jono lineaarisia kuvauksia $L_i \colon W_i \to V$ (missä V vektoriavaruus), niin on olemassa yksikäsitteinen $L \colon U \to V$ jolle pätee $L \circ \iota_i' = L_i$ jokaisella $i = 1, \ldots, n$.

Koska suora summa toteuttaa universaaliominaisuuden (mikä juuri osoitettiin yllä), on olemassa yksikäsitteinen lineaarinen kuvaus $L \colon \oplus_{i=1}^n W_i \to U$ jolle pätee yhtälö

$$L \circ \iota_i = \iota_i'$$

jokaisella $i = 1, \ldots, n$. Tässä universaaliominaisuus siis sovelletaan jonoon (ι_i').

Toisaalta, koska U ja kuvaukset ι_i' myös toteuttavat universaaliominaisuuden, on olemassa lineaarinen kuvaus $L' \colon U \to \oplus_{i=1}^n W_i$ jolle pätee

$$L' \circ \iota_i' = \iota_i$$

jokaisella $i = 1, \ldots, n$. Väitämme, että molemmat L ja L' ovat bijektioita ja itse asiassa toistensa käänteiskuvauksia. Tämän todistamiseksi tarkastellaan kuvausta $\Phi = L \circ L' \colon U \to U$. Tällöin Φ on sellainen lineaarinen kuvaus, jolle pätee

$$\Phi \circ \iota_i' = L \circ (L' \circ \iota_i') = L \circ \iota_i = \iota_i' = \mathrm{id}_U \circ \iota_i'.$$

Tästä nähdään, että id_U ja Φ ovat lineaarisia kuvauksia $U \to U$, joille pätee

$$\Phi \circ \iota_i' = \mathrm{id}_U \circ \iota_i'$$

jokaisella $i = 1, \ldots, n$. Kuitenkin suoran suman universaaliominaisuuden mukaan tällainen kuvaus on **yksikäsitteinen**. Näin ollen $\Phi = \mathrm{id}_U$. Toisin sanoen olemme näyttäneet, että $L \circ L' = \mathrm{id}_U$.

Vaihtamalla avaruuksien U ja suoran summan $W = \oplus_{i=1}^n W_i$ rooleja yllä, saadaan samalla tavalla näytettyä, että $L' \circ L = \mathrm{id}_W$ on identtinen kuvaus.
Näin ollen L ja L' ovat toistensa käänteiskuvauksia, erityisesi L on bijektio, eli isomorfismi.

□

Huomaa, että suoran summan universaaliominaisuus saadaan tulon universaaliominaisuudesta vaihtamalla kaikkien siinä esiintyvien kuvausten suunnat. Koska diagrammeissa kuvaukset on tapana esittää nuolina tämä periaate tunnetaan myös nimellä ”nuolten suuntien vaihto”. Tilannetta, joka saadaan toisesta tilannesta vaihtamalla ”nuolten suunnat” sanotaan matematiikassa alkuperäisen tilanteen *duaaliksi*. Suora summa ja tulo ovat siis toistensa *duaaleja*.

Palautetaan mieleen, että olemme jo törmäneet aikaisemmin ”duaali”-termiin, olemme kutsuneet lineaaristen muotojen muodostamaa vektoriavaruutta $L(V, K)$ avaruuden

V duaaliksi V^*. Olemme myös näyttäneet, että jokaista lineaarikuvausta $L\colon V \to W$ vastaa duaalikuvaus $L^*\colon W^* \to V^*$ joka ikäänkuin *vaihtaa suunnan*. Tästä duaaliavaruuden nimitys tuleekin.

Käytännössä kuvausten $(L_i)_{i=1}^n$, missä $L_i\colon W_i \to V$, suora summa $L = \oplus_{i=1}^n L_i\colon \oplus_{i=1}^n W_i \to V$ lasketaan yksinkertaisella kaavalla

$$L(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n) = \sum_{i=1}^n L_i(\mathbf{w}_i).$$

Esimerkki 2.170. *Olkoon W_1 kaikkien derivoituvien kuvausten $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muodostama $\mathbb{R}$-vektoriavaruus ja olkoon W_2 kaikkien kuvausten $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muodostama $\mathbb{R}$-vektoriavaruus. Tällöin $L_1\colon W_1 \to \mathbb{R}$, $L_1(f) = f'(1)$ ja $L_2\colon W_2 \to \mathbb{R}$, $L_2 = \int_0^1 g(x)dx$ ovat molemmat lineaarisia kuvauksia, joiden maaliavaruus on $\mathbb{R}$. Suora summa $L_1 \oplus L_2$ lasketaan kaavalla*

$$(L_1 \oplus L_2)(f, g) = f'(1) + \int_0^1 g(x)dx.$$

Huomautus: Sekä tulon, että suoran summan käsitteet voidaan yleistää myös mielivaltaiselle, ei välttämättä äärellisille, vektoriavaruuksien perheelle $(W_i)_{i\in I}$. Tällöin kuitenkin osoittautuu, että tuloavaruus ja suora summa eivät olekaan enää samoja vektoriavaruuksia. Näin ollen yleisesti tarvitsemme molempia käsitteitä, ne osoittautuvat synonyymeiksi ainoastaan äärellisen perheen tapauksessa.