Äärellisulotteinen lineaarialgebra, kevät 2015.
Harjoitus 1.
Ratkaisuehdostuksia.

1. Esitä yhtälöryhmä (1) matriisimuodossa ja ratkaise se *Gauss-Jordanin* menetelmällä.

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3. \end{cases} \tag{1}$$

**Ratkaisu:** Yhtälöryhmän esittäminen *matriismuodossa* voidaan tulkita (ainakin) kahdella eri tavalla. Yksi tapa on ajatella, että kyseessä on yksinkertaisesti yhtälöryhmän *täydennetty matriisi*, joka on tässä tapauksessa matriisi

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 & -7 \\ 9 & 6 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Toinen tulkinta olisi ajatella, että kyseessä on yhtälöryhmän esittäminen *matriisiyhtälönä* $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v}$, missä $A$ on yhtälöryhmän niin sanottu *perusmatriisi*,

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 9 & 6 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}$ on pystyvektori

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix}^T$$

ja

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T.$$

Symbolilla $\cdot$ taas tarkoitetaan yksinkertaisesti matriisien kertolaskua.
Tästäkin tulkinnasta käytetään termiä ”yhtälöryhmän esitys matriisimuodossa”.

Koska Gaussin ja Gauss-Jordanin menetelmissä operoidaan nimenomaan yhtälöryhmän täydennetyllä matriisilla, tässä tehtävässä luonteva, asianyhteyteen liittyvä tulkinta olisi ensimmäinen.

**Ratkaiseminen Gauss-Jordanilla:**
Alussa matriisi on alkuperäisen yhtälöryhmän täydennetty matriisi

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 & -7 \\ 9 & 6 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ensimmäisenä toimenpiteenä eliminoidaan muuttuja $x_1$ kaikista, paitsi ensimmäisestä yhtälöstä. Tämän voi tehdä käyttämällä yhtälöryhmää (matriisia) sellaisenaan, jolloin täytyy aloittaa rivitoimituksilla $R_2 - (1/2)R_1$, $R_3 - (3/2)R_1$ ja $R_4 - (1/2)R_1$. Kuten nähdään, tällöin joudutaan heti laskemaan murtoluvuilla. Yleensä mitään parempaa tapaa ei ole, mutta tämän yhtälöryhmän tapauksessa voidaan huomata, että kaikki muuttujan $x_1$ kertoimet ovat jaollisia kolmella, joten helpomalla päästään, jos ensin vaihdetaan keskenään rivit $R_1$ ja $R_2$ eli suoritetaan rivitoimitus $R_1 \longleftrightarrow R_2$. Tällöin saadaan yhtäpitävä yhtälöryhmä, jonka (täydennetty) matriisi on

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 & 0 & -7 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 9 & 6 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tämän jälkeen ensimmäisen muuttujan eliminoidu alkeisrivitoimituksilla $R_2 - 2R_1$, $R_3 - 3R_1$ ja $R_4 - R_1$, näiden seurauksena matriisi muuntuu matriisiksi

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 2 & 23 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Huomataan, että nyt myös muuttuja $x_2$ on eliminoitu vastaavan yhtälöryhmän kaikista yhtälöistä, paitsi ensimmäisestä. Muuttujasta $x_2$ siis tulee *vapaa muuttuja.* Siirytään tästä syystä seuraavaksi eliminoimaan muuttuja $x_3$ kaikista yhtälöryhmän yhtälöistä, paitsi toisesta (myös ensimmäisestä, koska käytämme Gauss-Jordanin menetelmää, eikä esim. Gaussin menetelmää, jossa olisi seuraavaksi riittänyt eliminoida $x_3$ ainoastaan kolmannesta ja neljännestä yhtälöstä) . Koska toisen rivin jokainen alkio on jaollinen kolmella, laskut yksinkertaistuvat hieman, jos ensin jaetaan tämä rivi kolmella, eli suoritetaan laskutoimitus $(1/3)R_2$ (tämä toimenpide ei ole mitenkään välttämätön). Seurauksena on matriisi

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 2 & 23 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Seuraavaksi suoritetaan rivitoimitukset $R_1 + (2/3)R_2$, $R_3 - (7/3)R_2$, $R_4 - 2R_2$ (huomaa, että nyt murtolukuja ei voi enää välttää). Lopputuloksena on matriisi

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 2/3 & -11/3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 34/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Huomataan, että muuttujasta $x_4$ tulee vapaa muuttuja ja seuraavaksi pitää vielä eliminoida muuttujan $x_5$ esiintymiset yhtälöryhmän ensimmäisestä ja toisesta yhtälöstä. Ensin kerrotaan kuitenkin kolmas rivi luvulla $(-3)$, jolloin saadaan matriisi

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 2/3 & -11/3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tämän jälkeen suoritetaan alkeisrivitoimituksia $R_1 - (2/3)R_3$ ja $R_2 - R_3$. Saadaan matriisi

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 39 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tämä matrisi on jo melkein redusoidussa porrasmuodossa, pitää vain jarjestää vielä kaikki johtavat alkiot ykkösiksi, eli suorittaa alkeisrivitoimituksia $(1/3)R_1$ ja $(1/3)R_2$. Tämän jälkeen saadaan redusoidussa porrasmuodossa oleva matriisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 19/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Muutetaan matriisi takaisin yhtälöryhmäksi, joka on

$$\begin{cases} x_1 + (2/3)x_2 + (1/3)x_4 = 19/3, \\ x_3 = 13, \\ x_5 = -34 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Viimeinen yhtälö on identtisesti tosi, joten siitä ei tarvitse välittää ollenkaan. Vapaat muuttujat ovat muuttujat $x_2 = s$ ja $x_4 = t$. Yhtälöryhmän ratkaisu on

$$\begin{cases} x_1 = 19/3 - (2/3)s - (1/3)t, \\ x_2 = s, \\ x_3 = 13, \\ x_4 = t, \\ x_5 = -34. \end{cases} ,$$

missä $s, t \in \mathbb{R}$ ovat vapaita parametria.

Koska Gauss ja Gauss-Jordanin menetelmät ovat (ihmisaivojen, kynän ja paperin avulla suoritettuina) hyvin virhealteita, vastaus kannattaa vielä *tarkistaa.* Tämä tehdään yksinkertaisesti sijoittamalla saatu ratkaisu alkuperäiseen yhtälöryhmään ja tarkistamalla tuleeko jokaisesta yhtälöstä tosi. Jos ratkaisu sisältää vapaita parametreja, niiden täytyy eliminoitua sijoituksessa. Esimerkiksi sijoittamalla yllä saatu ratkaisu alkuperäisen yhtälöryhmän ensimmäisen yhtälöön ja sieventämällä yhtälön vasen puoli, saadaan

$$6x_1+4x_2+5x_3+2x_4+3x_5 = 6(19/3-(2/3)s-(1/3)t)+4s+5\cdot 13+2t+3\cdot(-34) =$$
$$38-4s-2t+4s+65+2t-102 = 1$$

mikä täsmää yhtälön oikean puolen kanssa. Samalla tavalla voidaan nähdä, että löydetty ratkaisu toteuttaa myös muita yhtälöryhmän yhtälöitä.
Tällainen ratkaisun tarkistus ei tietenkään formaalisti ottaen ole sataprosenttinen todistus sille, että ratkaisu on oikea (miksi?), mutta käytännössä se yleensä riittää vakuuttumaan ratkaisun oikeellisuudesta.

2. Tutki millä *parametrin* $t \in \mathbb{R}$ arvoilla yhtälöryhmällä (2) on
a) nolla ratkaisua,
b) tasan yksi ratkaisu,
c) äärettömän monta ratkaisua.

$$(2) \qquad \begin{cases} -6x_1+8x_2-5x_3-x_4 = 9, \\ -2x_1+4x_2+7x_3+3x_4 = 1, \\ -3x_1+5x_2+4x_3+2x_4 = 3, \\ -3x_1+7x_2+17x_3+7x_4 = t. \end{cases}$$

**Ratkaisu:** Ratkaisujen lukumäärä selviää, kun yhtälöryhmä muutetaan porrasmuotoon. Tähän tarkoitukseen riittää Gaussin menetelmä (huomaa, että meiltä ei kysytty mitään ratkaisuista, ainoastaan niiden lukumääristä.
Sovelletaan Gaussin menetelmää yhtälöryhmän täydennettyyn matriisiin

$$\begin{bmatrix} -6 & 8 & -5 & -1 & 9, \\ -2 & 4 & 7 & 3 & 1, \\ -3 & 5 & 4 & 2 & 3, \\ -3 & 7 & 17 & 7 & t \end{bmatrix}.$$

Vältääkseen murtolukulaskuja, kannattaa aloittaa huomaamalla, että muuttujan $x_1$ kaikki kertoimet ovat luvun 6 tekijöitä, joten niistä saadaan samoja kun kerrotaan toinen rivi luvulla 3 sekä kolmas ja neljäs rivit luvulla 2 (alkeisrivitoimitukset $3R_2$, $2R_3$, $2R_4$). Lopputuloksena on matriisi

$$\begin{bmatrix} -6 & 8 & -5 & -1 & 9, \\ -6 & 12 & 21 & 9 & 3, \\ -6 & 10 & 8 & 4 & 6, \\ -6 & 14 & 34 & 14 & 2t \end{bmatrix}.$$

Nyt voidaan aloittaa varsinainen eliminointivaihe, alkeisrivitoimituksilla $Y_i - Y_1$, $i = 2, 3, 4$. Näiden jälkeen saadaan matriisi

$$\begin{bmatrix} -6 & 8 & -5 & -1 & 9, \\ 0 & 4 & 26 & 10 & -6, \\ 0 & 2 & 13 & 5 & -3, \\ 0 & 6 & 39 & 15 & 2t-9 \end{bmatrix}.$$

Seuraavaksi huomataan, että kaikki toisen rivin alkiot ovat jaollisia kahdella, joten alkeisrivitoimituksen $(1/2)Y_2$ jälkeen saadaan matriisi

$$\begin{bmatrix} -6 & 8 & -5 & -1 & 9, \\ 0 & 2 & 13 & 5 & -3, \\ 0 & 2 & 13 & 5 & -3, \\ 0 & 6 & 39 & 15 & 2t-9 \end{bmatrix}.$$

Nyt muuttujan $x_2$ eliminointi kolmannesta ja neljännestä yhtälöstä onnistuu alkeisrivitoimituksilla $Y_3 - Y_2$ ja $Y_4 - 3Y_2$. Seurauksena on matriisi

$$\begin{bmatrix} -6 & 8 & -5 & -1 & 9, \\ 0 & 2 & 13 & 5 & -3, \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0, \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2t \end{bmatrix}.$$

Vastaava ekvivalentti yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} -6x_1 + 8x_2 - 5x_3 - x_4 = 9, \\ 2x_2 + 13x_3 + 5x_4 = -3, \\ 0 = 2t. \end{cases}$$

Huomaa, että kolmas rivi vastaa identtisesti tosia yhtälöä $0 = 0$, joten siitä ei tarvitse välittää. Yhtälö $0 = 2t$ on selvästi identtisesti epätosi kun $t \neq 0$ ja identtisesti tosi kun $t = 0$. Näin ollen, kun $t \neq 0$, yhtälöryhmällä ei ole ratkaisuja (nolla ratkaisua). Kun $t = 0$ saadaan yhtäpitävä konsistentti yhtälöryhmä

$$\begin{cases} -6x_1 + 8x_2 - 5x_3 - x_4 = 9, \\ 2x_2 + 13x_3 + 5x_4 = -3, \end{cases} \tag{3}$$

jolla on selvästi vapaita muuttujia (esimerkiksi täsä porrasmuodossa $x_3$ ja $x_4$ ovat kumpikin vapaita), joten ratkaisuja on tällöin ääretön määrä. Saman johtopäätöksen voi päättyä myös siitä, että konsistentissa yhtälöryhmässä 3 on enemmän muuttujia kuin yhtälöitä, joten sillä on pakko olla äärettömän monta ratkaisuja (Propositio 16 ”Johdanto”-materiaalissa).

**Vastaus:** Kun $t \neq 0$, ratkaisuja ei ole. Kun $t = 0$, ratkaisuja on ääretön määrä.

3. Olkoon $A$ $(n \times n)$-kokoinen *neliömatriisi*, jolle pätee $A^m = 0$ jollakin luonnollisella luvulla $m \in \mathbb{N}$. Tässä 0 on $(n \times n)$-kokoinen nolla-matriisi. Osoita, että matriisi $I_n - A$ on *kääntyvä* ja että sen *käänteismatriisi* on matriisi

$$I_n + A + A^2 + \ldots + A^{m-1}.$$

Tässä $I_n$ on $(n \times n)$-kokoinen *yksikkömatriisi*.

**Ratkaisu:** Määritelmän mukaan $(n \times n)$-kokoinen neliömatriisi $X$ on $(n \times n)$-kokoisen neliömatriisin $Y$ käänteismatriisi jos ja vain jos $XY = I_n$ ja $YX = I_n$, missä $I_n$ on $(n \times n)$-kokoinen yksikkömatriisi. Itse asiassa voidaan osoittaa, että jompikumpi yhtälöistä $XY = I_n$ ja $YX = I_n$ riittää, mutta tämä on epätriviaali syvällinen tulos[1]

Riittää siis tarkistaa, että matriiseille $X = I_n - A$ ja $Y = I_n + A + A^2 + \ldots + A^{m-1}$ pätevät yhtälöt $XY = I_n$ ja $YX = I_n$. Tämä taas osoitetaan suoralla laskulla. Nimittäin käyttämällä matriisien kertolaskun ominaisuuksia, saadaan ensin *osittelulain* avulla

$$XY = (I_n - A)Y = I_nY - AY.$$

Tässä $I_nY = Y$ yksikkömatriisin määritelmän mukaan ($(n \times n)$-kokoinen yksikkömatriisi on *neutraalialkio* $(n \times n)$-kokoisten matriisien kertolaskun suhteen). Osittelulain avulla saadaan

$$AY = A(I_n+A+A^2+\ldots+A^{m-2}+A^{m-1}) = AI_n+AA+AA^2+\ldots+AA^{m-2}+AA^{m-1} =$$

$$A + A^2 + \ldots + A^{m-1} + A^m = A + A^2 + \ldots + A^{m-1}.$$

Tässä me olemme käyttäneet myös oletusta $A^m = 0$. Yhdistämällä tuloksia saadaan

$$XY = I_nY - AY = Y - AY = (I_n + A + A^2 + \ldots + A^{m-1}) - (A + A^2 + \ldots + A^{m-1}) =$$

$$I_n + A + A^2 + \ldots + A^{m-1} - A - A^2 - \ldots - A^{m-1} = I_n.$$

Yhtälö $YX = I_n$ todistetaan samalla tavalla (tai vedotaan siihen, että neliömatriisien kohdalla yhtälö $XY = I_n$ riittää, kts. yllä). Näin ollen $X = I_n - A$ on kääntyvä ja sen käänteismatriisi on

$$Y = I_n + A + A^2 + \ldots + A^{m-1}.$$

**Huomautus:** Tarinan opetus on seuraava. Yleisesti ottaen on vaikeata osoittaa, että jokin algebrallinen olio on kääntyvä tai ainakin siihen tarvitaan joitakin menetelmiä ja tuloksia. Kuitenkin, jos käänteisalkio-kandidaatti on annettu, ei tarvitse tehdä mitään muuta kuin vain tarkistaa, että se toteuttaa käänteisalkion määritelmän.

4. Olkoot $A, B$ mielivaltaisia samankokoisia neliömatriiseja. Onko yhtälö

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

voimassa yleisesti? Todista todeksi tai anna vasta-esimerkki.
Onko tällä tehtävällä jotakin yhteyttä edellisen tehtävän väitteeseen erikoistapauksessa $m = 2$?

**Ratkaisu:** Koska matriisien kertolasku toteuttaa esimerkiksi osittelulain, avaamalla sulut nähdään, että

$$(A+B)(A-B) = A(A-B)+B(A-B) = A^2-AB+BA-B^2 = (A^2-B^2)+(BA-AB).$$

[1]Materialissa ”Johdatus lineaarialgebraan” tämä todistetaan Osassa I, Lauseessa 10.8. Tällä kurssilla tämä tulos osoitetaan Seurauksessa 2.95.

Tästä seuraa, että yhtälö $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$ on tosi jos ja vain jos $BA - AB = 0$, eli jos ja vain jos $BA = AB$. Kuitenkin toisaalta tiedetään, että matriisien kertolasku ei ole *vaihdannainen*, eli yleisesesti ottaen yhtälö $BA = AB$ ei ole välttämättä voimassa, kun $A$ ja $B$ ovat molemmat $(n \times n)$-kokoiset neliömatriisit. Esimerkiksi tapauksessa $n = 2$ kun valitaan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

pätee

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

mutta

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Näin ollen kaava

$$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$$

ei ole (samankokoisille) neliömatriiseille yleisesti voimassa ja itse asiassa ylläolevasta seuraa, että tämä kaava on tosi jos ja vai jos matriisit $A$ ja $B$ *kommutoivat* eli jos ja vain jos $AB = BA$.

**Yhteys edelliseen tehtävään**

Tarkastellaan edellisen tehtävän väitettä tapauksessa $m = 2$. Se sanoo, että jos $A$ on sellainen neliömatriisi, jolle pätee $A^2 = 0$, niin matriisi $I + A$ on matriisin $I - A$ käänteismatriisi, eli pätee $(I + A)(I - A) = I$. Toisaalta $I^2 = I$ ja $A^2 = 0$, joten tällöin

$$(I - A)(I + A) = I^2 - A^2$$

eli tämän tehtävän väite pätee matriiseille $I$ ja $A$. Edellä olevan nojalla tämä on odotettavissa, koska matriisit $I$ ja $A$ kommutoivat keskenään - yksikkömatriisin karakteritisen ominaisuuden nojalla pätee $IA = A = AI$.

5. Olkoot $\mathbf{v}_1 = (2, 1, -3)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 1, -5)$ ja $\mathbf{v}_3 = (4, 2, -1)$ vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreita. Olkoon $\mathbf{w} = (4, 9, 5)$.

   Tutkitaan kysymystä ”kuuluko vektori $\mathbf{w}$ vektorien $\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ virittämään aliavaruuteen Span$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$?”
   a) Esitä tämä kysymys ekvivalenttina ongelmana, joka koskee erään lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemista.
   b) Ratkaise ongelma ratkaisemalla tämä yhtälöryhmä.
   c) Onko olemassa sellaista vektoria $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, joka ei kuulu aliavaruuteen Span$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$? Anna esimerkki tällaisesta vektorista tai osoita, että sitä ei ole olemassa.

**Ratkaisu:** Vektorien $\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ virittämä aliavaruus Span$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ koostuu kaikista näiden vektorien*lineaarisista komibinaatioista* eli vektoreista, jotka ovat muotoa

$$t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + t_3\mathbf{v}_3,$$

missä $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$. "Johdatus lineaarialgebraan, Osa 1"-materialissa, tämä seuraa suoraan virittämän aliavaruuden määritelmästä 4.1. (sivu 18). Tällä kurssilla vektorien muodostaman joukon virittämä aliavaruus määritellään eri tavalla, jolloin edellä mainittu tosiasia todistetaan myöhemmin uudestaan Lemmassa 2.29.

Näin ollen vektori $\mathbf{w} = (4, 9, 5)$ kuuluu vektorien $\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ virittämään aliavaruuteen $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ jos ja vain jos on olemassa luvut $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ joille

$$t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + t_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{w}$$

eli

$$t_1(2, 1, -3) + t_2(3, 1, -5) + t_3(4, 2, -1) = (4, 9, 5).$$

Vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorien laskutoimitusten määritelmän mukaan tämä yhtälö on yhtäpitävä yhtälön

$$(2t_1 + 3t_2 + 4t_3, t_1 + t_2 + 2t_3, -3t_1 - 5t_2 - t_3) = (4, 9, 5)$$

kanssa. Vektorit ovat samoja jos ja vain jos niiden *komponentit* ovat samoja. Näin ollen viimeinen yhtälö on yhtäpitävä *lineaarisen yhtälöryhmän*

$$\begin{cases} 2t_1 + 3t_2 + 4t_3 = 4, \\ t_1 + t_2 + 2t_3 = 9, \\ -3t_1 - 5t_2 - t_3 = 5 \end{cases} \tag{4}$$

kanssa. Näin ollen vektori $\mathbf{w}$ on avaruuden $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ alkio jos ja vain jos yhtälöryhmällä 4 on ratkaisuja.

Ratkaistaan yhtälöryhmä Gauss-Jordanin menetelmällä[2]. Koska ensimmäisen muuttujan kerroin toisessa yhtälössä on yksi, vaihdetaan heti alkuun ensimmäinen ja toinen yhtälö. Esitetään näin saatu yhtälöryhmä sen täydennettynä matriisina

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ -3 & -5 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Alussa tehdään rivitoimituksia $R_2 - 2R_1$ ja $R_3 + 3R_1$, saadaan matriisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & -2 & 5 & 32 \end{bmatrix}.$$

Seuraavaksi tehdään rivitoimituksia $R_1 - R_2$ ja $R_3 + 2R_2$, jolloin saadaan matriisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 23 \\ 0 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

[2]Koska meitä kiinnostaa vain ratkaisujen olemassaolo, ei itse ratkaisu, b)-kohdassa olisi riittänyt Gaussin menetelmä - riittää viedä yhtälöryhmä porrasmuoto ja katsoa löytyykö identtisesti epätosia yhtälöitä

Tästä periaatteessa nähdään jo (matriisi on jo porrasmuodossa), että yhtälöryhmän jokainen muuttuja on päämuuttuja, eikä mitään identtisesti epätosia yhtälöitä synny, joten yhtälöryhmällä on ratkaisuja (itse asiassa tasan yksi ratkaisu, koska kaikki muuttujat päämuuttujia) ja vastaus alkuperäiseen kysymykseen (kuuluuko vektori aliavaruuteen) on "kyllä".
Viedään vielä lasku kuitenkin loppuun, vaikka se ei ole täysin välttämätöntä. Seuraavaksi tehdään rivitoimitus $(1/5)R_3$, jolloin saadaan matriisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 23 \\ 0 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 4/5 \end{bmatrix}$$

ja sen jälkeen vielä rivitoimitus $R_1 - 2R_3$, jolloin tuloksena on matriisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 107/5 \\ 0 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 4/5 \end{bmatrix}.$$

Yhtälöryhmällä 4 on siis tasan yksi ratkaisu $t_1 = 107/5 = 21\frac{2}{5}$, $t_2 = -14$, $t_3 = 4/5$.

Tutkitaan seuraavaksi voiko olla olemassa sellaista vektoria $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, joka ei kuulu aliavaruuteen $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Yhtäpitävisti tutkitaan jokaisella $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}_3$ kuuluko se aliavaruuteen $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Samalla tavalla kuin yllä vektorin $\mathbf{w}$ kohdalla, tämä palautuu kysymykseen siitä, onko lineaarisella yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} 2t_1 + 3t_2 + 4t_3 = u_1, \\ t_1 + t_2 + 2t_3 = u_2, \\ -3t_1 - 5t_2 - t_3 = u_3 \end{cases} \tag{5}$$

ainakin yksi ratkaisu $(t_1, t_2, t_3)$. Tässä $u_1, u_2$ ja $u_3$ ovat ennalta annettuja parametreja, ei tuntemattomia.
Yksi tapa jatkaa on ratkaista tämä yhtälöryhmä esim. Gauss-Jordanin menetelmällä. Tällöin voidaan suorittaa samanimiset alkeisrivitoimitukset kuten yllä b)-kohdan ratkaisussa ja päättyä redusoidussa porrasmuodossa olevaan matriisiin

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -9/5u_1 + 17/5u_2 - 2/5u_3 \\ 0 & 1 & 0 & u_1 - 2u_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5(u_3 + 2u_1 - u_2) \end{bmatrix}.$$

Tästä nähdään, että yhtälöryhmällä (5) on (itse asiassa yksikäsitteinen) ratkaisu jokaisella $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}_3$. Tässäkin Gauss olisi riittänyt (meitä kiinnostaa ainoastaan ratkaisun olemassaolo).

Toinen tapa tutkia c)-kohdan kysymystä on käyttää b)-kohdan tulosta sekä teoreettisia tuloksia. Nimittäin b)-kohdassa olemme näyttäneet, että yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} 2t_1 + 3t_2 + 4t_3 = 4, \\ t_1 + t_2 + 2t_3 = 9, \\ -3t_1 - 5t_2 - t_3 = 5 \end{cases} \tag{6}$$

on **yksikäsitteinen** ratkaisu. "Johdanto"-osuuden Lemman 17 nojalla vastaavalla homogeenisella yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} 2t_1 + 3t_2 + 4t_3 = 0, \\ t_1 + t_2 + 2t_3 = 0, \\ -3t_1 - 5t_2 - t_3 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

on vain triviaali ratkaisu $t_1 = t_2 = t_3 = 0$. Kuitenkin, koska tällä yhtälöryhmällä *on sama määrä muuttujia ja tuntemattomia* Lemmasta 18 seuraa, että tällöin *jokainen* muotoa

$$\begin{cases} 2t_1 + 3t_2 + 4t_3 = u_1, \\ t_1 + t_2 + 2t_3 = u_2, \\ -3t_1 - 5t_2 - t_3 = u_3 \end{cases} \tag{8}$$

olevalla yhtälöllä on *täsmälleen yksi ratkaisu.* Erityisesti ratkaisu aina löytyy. Vastaus c)-kohdan kysymykseen on "ei ole olemassa avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoria, joka ei kuuluisi vektorien $\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ virittämään aliavaruuteen $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$".

**Huomautus:** Edellisestä seuraa, että vektorit $\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^3$ *kannan.* Kannan käsitteestä (joka on $\mathbb{R}$-vektoriavaruuksien kohdalla tuttu lineaarialgebran peruskursseilta) puhutaan tällä kursilla uudestaan Luvussa 2.

6. Olkoot $t \in \mathbb{R}$ reaaliluku. Olkoon

$$A_t = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

a) Laske $\det A_t$.
b) Päätele a)-kohdan avulla, että $A_t$ on kääntyvä.

**Ratkaisu:** a) $(2 \times 2)$-matriisin

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

determinantti $\det A$ on

$$\det A = ad - bc.$$

Lineaarialgebran peruskurssin materiaalissa "Johdatus Lineaarialgebraan. Osa I" tämä annetaan $(2 \times 2)$-matriisin määritelmässä 11.1. Tällä kurssilla determinantista ja sen ominaisuuksista puhutaan kurssin materiaalin Luvussa 2.5.

Edellisen nojalla saadaan

$$\det A_t = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

b) Yhteys matriisin determinantin ja matriisin kääntyvyyden välillä on seuraava - (reaalikertoiminen) matriisi on kääntyvä jos ja vain jos sen determinantti eroaa nollasta. Näin ollen väite seuraa tästä ja a)-kohdan laskusta.

7.* Olkoon $A_t$ kuten edellisessä tehtävässä ja olkoon $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(\mathbf{x}) = A_t \cdot \mathbf{x}$ tämän matriisin määrämä tason lineaarinen kuvaus, missä

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

on tason piste $(x_1, x_2)$ ”pystyvektorina” tulkittuna. Mikä on kuvauksen $L$ geometrinen merkitys? Perustele (kuvat ja koulugeometriaan vetoaminen riittävät).

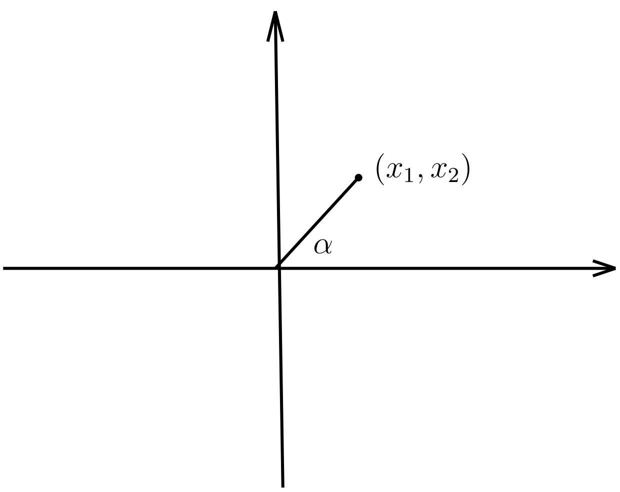
**Ratkaisu:** Tason $\mathbb{R}^2$ jokainen piste $(x_1, x_2)$ voidaan esittää *polaarikoordinaatistossa* muodossa

$$(x_1, x_2) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha), \tag{9}$$

missä $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ on pisteen $(x_1, x_2)$ euklidineen *normi* eli sen etäisyys origoon ja $\alpha$ on pisteen $(x_1, x_2)$ niin sanottu *vaihekulma*. Vaihekulma on kulma, joka muodostuu tasossa $x_1$-akselin ja vektorin $x_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$ välissä. Vektori $x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}$ tässä vastaa (suunnattua) janaa, jonka alkupiste on origo ja loppupiste on $(x_1, x_2)$.

Yleisemmin pisteen $(x_1, x_2)$ vaihekulmaksi voidaan ajatella mikä tahansa kulma $\alpha$, joka toteuttaa yhtälön 9. Se ei ole tällöin yksikäsitteisesti määrätty vaan ainoastaan luvun $2\pi$ monikerran vaille (kulmia mitataan tässä radiaaneissa, kuten teoreettisessa matematiikassa on tapana).

Origon $(x_1, x_2) = (0, 0)$ tapauksessa $r = 0$ ja vaihekulmaksi kelpaa mikä tahansa $\alpha \in \mathbb{R}$.




Esitetään piste $(x_1, x_2)$ polaarimuodossa (9) ja lasketaan $L(x_1, x_2)$ tämän esityksen avulla. Tällöin saadaan (sinin ja kosinin yhteenlaskukaavat!)

$$L(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos t\cos\alpha - r\sin t\sin\alpha \\ r\sin t\cos\alpha + r\sin t\sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\alpha + t) \\ r\sin(\alpha + t) \end{bmatrix}.$$

Nähdään siis, että $L(x_1, x_2)$ on sellainen tason $\mathbb{R}^2$ piste, jolla on sama normi kuin pisteellä $(x_1, x_2)$, mutta vaihekulma on pisteen $(x_1, x_2)$ vaihekulma + kulma $t$. Toisin sanoen $L$ on tason *kierto* kulman $t$ verran ”positiiviseen suuntaan” (eli vastapäivään). Jos $t < 0$ on negatiivinen, kyseessä on kierto negatiiviseen suuntaan eli myötäpäivään.

Erityisesti tästä seuraa, että tason kierto on *lineaarinen kuvaus*. Tämä johtuu siitä, että se on muotoa $(x_1, x_2) \mapsto A_t \cdot \mathbf{x}$ kiinteällä matriisilla $A_t$.