Johdanto

Aloitamme tämän kurssin pikaisella lineaarialgebran peruskurssilta tutun lineaaristen yhtälöryhmien teorian kertauksella. Historiallisesta näkökulmasta lineaarialgebran alan voidaan katsoa syntyneen juuri tarpeesta kehittää lineaaristen yhtälöryhmien yleispäteviä ratkaisumenetelmiä. Tämä sovellus puolestaan johti luonnollisella tavalla matriisien ja determinanttien teorian kehitykseen. Nykyään lineaarialgebraksi sanotaan matematiikan osa-aluetta, joka tutkii pääsääntöisesti *moduleita* ja erityisesti *vektoriavaruuksia* algebrallisesta näkökulmasta. Puhtaasti algebrallinen lähestymistapa on osoittautunut erityisen hedelmälliseksi juuri *äärellisulotteisten* vektoriavaruuksien tutkimisessa. *Ääretönulotteisten* vektoriavaruuksien kohdalla algebralliset menetelmät eivät ole usein enää riittäviä, mistä syystä ääretönulotteisia vektoriavaruuksia tutkitaan myös topologisilla ja analyyttisilla menetelmillä. Koska tällä kurssilla aiomme pysyä algebran maailmassa, keskitymme nimenomaan äärellisulotteisten vektoriavaruuksien teoriaan. Ääretönulotteisten (tarkemmin - Banachin) avaruuksien teoriaan pääsee tutustumaan muun muassa Funktionaalianalyysin kurssilla.

Äärellisulotteisten vektoriavaruuksien teoriasta on muodostunut klassinen nykymatematiikan osa, jota sovelletaan jatkuvasti melkein jokaisessa matematiikan osa-alueissa. Ei voida myöskään aliarvioida lineaaristen menetelmien äärimäistä tärkeyttä muissa tieteissä ja matematiikan käytännön sovelluksissa. Esimerkkeinä matematiikan ulkopuolisista aloista, joissa sovelletaan lineaarialgebraa, voidaan mainita taloustiede, tilastotiede, lääketiede, kryptografia, perinnöllisyystiede ja monet muut.

Aihepiirin peruskursseilla lineaarialgebraa yleensä lähestytään niin sanottujen *matriisimenetelmien* kautta. Esimerkkeinä näistä ovat Gauss-Jordanin eliminointimenetelmä tai determinanttien käyttöön perustuvat menetelmät. Myös vektoriavaruuksien ja lineaarikuvausten teoriaa, joka muodostaa lineaarialgebran ytimen, käsitellään peruskursseilla aika pitkälti tällaisten matriisimenetelmien kautta.

Vaikka tällaisia menetelmiä voitaisiin sanoa abstraktin matematiikan näkökulmasta ”alkeellisiksi”, niiden tärkeyttä ja merkitystä sekä käytännön sovelluksissa, että myös teorian kannalta, ei pitäisi vähätellä ja käytämmekin niitä jonkin verran myös tällä kurssilla. Tarjoamme kuitenkin myös erilaisen, hieman abstraktimman ja yleisemmän lähestymistavan lineaarialgebraan. Monille tuloksille, joita voi perustella ”matriisimenetelmillä”, esitämme myös vaihtoehtoisen ”matriisi-vapaan” käsittelyn. Esimerkiksi se, että äärellisulotteisen vektoriavaruuden dimensio on hyvinmääritelty, voidaan osoittaa käyttämällä lineaaristen yhtälöryhmien teoriaa, mutta tämä tapa ei suinkaan ole ainoa mahdollisuus.

Jotta voisimme verrata erilaisia lähestymistapoja toisiinsa ja tarjota tutuille tuloksille uusia tulkintoja, meidän on kuitenkin ensin palautettavaa mieleen aikaisemmin opittuja perustuloksia.

Lineaariset yhtälöryhmät

Lineaarinen yhtälö (reaalilukualueessa $\mathbb{R}$) on yhtälö, joka on muotoa

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m = b, \tag{1}$$

missä $a_1, \ldots, a_m, b \in \mathbb{R}$ ovat annettuja ("tunnettuja") reaalilukuja ja $x_1, \ldots, x_m$ ovat muuttujasymboleita ("tuntemattomia"). Yhtälön (1) *ratkaisu* on mikä tahansa reaalilukujen muodostama *jono* $(t_1, \ldots, t_m)$ joka "toteuttaa yhtälön" kun muuttuja x_i korvataan luvulla t_i jokaisella $i = 1, \ldots, n$, toisin sanoen jos pätee

$$a_1t_1 + a_2t_2 + \ldots + a_mt_m = b.$$

Olkoon

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_jx_j + \ldots + a_mx_m = b, \tag{2}$$

lineaarinen yhtälö. Lukua a_j sanotaan muuttujan x_j *kertoimeksi* yhtälössä (2) ($j = 1, \ldots, n$) ja lukua b sanotaan yhtälön (2) *vakiotermiksi*. Jos vakiotermi b on nolla, yhtälöä sanotaan *homogeeniseksi*. Muuttujille $x_1, \ldots, x_m$ voidaan tietysti halutessaan tai asiayhteydestä riippuen käyttää muita merkintöjä, esimerkiksi kun $m = 2$ muuttujat merkitään usein x ja y, ja kun $m = 3$ niitä merkitään x, y, z.

Lineaarisen yhtälön määritelmässä sallitaan tapaus, jossa yhden tai useamman muuttujan kerroin a_i on arvoltaan nolla, jolloin muuttuja "ei näy" yhtälössä. Kutsumme tällaista muuttujaa "näkymättömäksi" ja sanomme myös, että muuttuja x_i *ei esiinny yhtälössä* tai että se *esiintyy kertoimella nolla* (hieman ristiriitaiselta kuulostava, mutta täysin luonnollinen terminologian valinta). Näkymättömän muuttujan käyttö voi tuntua aluksi hassulta ja turhalta, mutta joissakin teoreettisissa tarkasteluissa se voi tulla esille luonnollisella tavalla, mistä syystä on hyödyllisempää sallia näkymättömät muuttujat kuin kieltää ne.

Lineaarinen yhtälöryhmä (reaalilukualueessa $\mathbb{R}$) on yhtälöryhmä, joka koostuu äärellisen monesta lineaarisesta yhtälöstä. Mielivaltainen lineaarinen yhtälöryhmä, jossa esiintyy n yhtälöä ja m tuntematonta, voidaan merkitä näkyviin seuraavasti:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}. \tag{3}$$

Lineaarista yhtälöä, jonka järjestysnumero (ylhäältä alaspäin laskettuna) yhtälöryhmässä (3) on i, merkitään jatkossa lyhyesti Y_i. Kyseessä on siis yhtälö

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{im}x_m = b_i.$$

Kertoimella a_{ij} on kaksi alaindeksiä, ensimmäinen indeksi i viittaa yhtälön järjestysnumeron, toinen indeksi j kertoo minkä muuttujan kertoimena luku a_{ij} on yhtälössä Y_i.

Yhtälöryhmää (3) sanotaan *homogeeniseksi*, jos kaikki sen yhtälöt ovat homogeenisia eli jos $b_i = 0$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Mielivaltaista lineaarista yhtälöryhmää (3) *vastaava homogeeninen yhtälöryhmä* on yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2m}x_m = 0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nm}x_m = 0, \end{cases}$$

joka saadaan siis muuttamalla yhtälöryhmän kaikki oikeanpuoleiset vakiot nolliksi.

Esimerkiksi

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = -2 \\ -5x_1 + x_2 + x_4 = 3 \end{cases}$$

on kolmen yhtälön ja neljän muuttujan lineaarinen yhtälöryhmä. Sitä vastaava homogeeninen yhtälöryhmä on

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \\ -5x_1 + x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Lineaarisen yhtälöryhmän (3) *ratkaisu* on sellainen reaalilukujono $(t_1, \ldots, t_m)$, joka on jokaisen siihen kuuluvan yhtälön ratkaisu. Kaikki yhtälöryhmän ratkaisut muodostavat sen *ratkaisujoukon*. Yhtälöryhmän *ratkaiseminen* tarkoittaa sen kaikkien ratkaisujen eli sen ratkaisujoukon selvittämistä. Tähän sisältyy myös tapaus, jossa ratkaisuja ei ole - onhan tämän tosiasian näyttäminen todeksi sama asia kuin sen osoittaminen, että yhtälöryhmän ratkaisujen joukko on tyhjä joukko.

Kahta lineaarista yhtälöryhmää sanotaan *ekvivalenteiksi* jos niillä on täsmälleen samat ratkaisujoukot. Tästä määritelmästä seuraa suoraan, että jos LYR1 on lineaarinen yhtälöryhmä, joka halutaan ratkaista, ja LYR2 on lineaarinen yhtälöryhmä, joka tiedetään olevan ekvivalentti yhtälöryhmän LYR1 kanssa, niin riittää ratkaista yhtälöryhmä LYR2.

Gaussin eliminointimenetelmä

Gaussin eliminointimenetelmä on systemaattinen tapa ratkaista lineaarinen yhtälöryhmä muuntamalla se ns. *alkeisrivitoimituksilla porrasmuotoon.* Alkeisrivitoimitus on tietynlainen tapa muuntaa annettu lineaarinen yhtälöryhmä toiseksi lineaariseksi yhtälöryhmäksi. On määritelty kolme eri alkeisrivitoimituksen tyyppiä.

- Tyyppi (I) - vaihdetaan yhtälöryhmässä kaksi yhtälöä Y_i, Y_j keskenään. Tämä toimitus siis ainoastaan muuttaa yhtälöryhmässä esiintyvien yhtälöiden keskinäistä järjestystä ja sille käytetään myös havainnollista merkintää $Y_i \leftrightarrow Y_j$.

- Tyyppi (II) - kerrotaan yhtälöryhmän yhtälö Y_i *nollasta eroavalla* reaaliluvulla a. Merkitään aY_i
- Tyyppi (III) - lisätään yhtälöryhmän yhtälöön Y_i toinen yhtälöryhmän yhtälö Y_j, $j \neq i$, reaaliluvulla r kerrottuna. Merkitään $Y_i + rY_j$.

Alkeisrivitoimitusten käyttö lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisemiseen perustuu seuraavaan tulokseen.

Lemma 4. *Olkoon LYR lineaarinen yhtälöryhmä ja oletetaan, että lineaarinen yhtälöryhmä LYR' on saatu yhtälöryhmästä LYR alkeisrivitoimituksella. Tällöin yhtälöryhmät LYR ja LYR' ovat ekvivalentteja. Alkeisrivitoimitusten suorittaminen siis säilyttää yhtälöryhmän ratkaisujoukon.*

Todistus. Tuttu peruskursseilta, jätetään harjoitustehtäväksi. ☐

Näin ollen yhtälöryhmä voidaan ratkaista muuntamalla sitä alkeisrivitoimituksilla toiseksi yhtälöryhmäksi, jonka ratkaiseminen olisi jotenkin "helpompaa" kuin alkuperäisen yhtälöryhmän ratkaiseminen. Juuri näin Gaussin ja Gauss-Jordanin eliminointimenetelmissä menetelläänkin.

Tarkastellaan mielivaltaista lineaarista yhtälöryhmää

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\
\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ik}x_k + \ldots + a_{im}x_m = b_i \\
\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jk}x_k + \ldots + a_{jm}x_m = b_j \\
\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nk}x_k + \ldots + a_{nm}x_m = b_n.
\end{cases} \tag{5}
$$

Muuttujan eliminointi. Olkoon LYR lineaarinen yhtälöryhmä (5) ja olkoon x_k jokin siinä esiintyvä muuttuja. Oletetaan, että muuttujan x_k kerroin a_{jk} yhtälöryhmän yhtälössä Y_j eroaa nollasta, $a_{jk} \neq 0$. Olkoon $i \neq j$. Kaavassa (5) oletetaan konkreettisuuden vuoksi, että $i < j$, mutta tapaus $i > j$ on tietysti aivan samanlainen. Jos yhtälöryhmään LYR sovelletaan typpiä (III) oleva alkeisrivitoimitus $Y_i + rY_j$ jollakin $r \in \mathbb{R}$, saadaan yhtälöryhmä LYR',

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\
\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
(a_{i1} + ra_{j1})x_1 + (a_{i2} + ra_{j2})x_2 + \ldots + (a_{ik} + ra_{jk})x_k + \ldots + (a_{im} + ra_{jm})x_m = (b_i + rb_j) \\
\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jk}x_k + \ldots + a_{jm}x_m = b_j \\
\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nk}x_k + \ldots + a_{nm}x_m = b_n,
\end{cases}
$$

joka on Lemman 4 nojalla ekvivalentti alkuperäisen yhtälöryhmän LYR kanssa. Olkoon Y_i' tämän yhtälöryhmän i:nnes yhtälö

$$(a_{i1} + ra_{j1})x_1 + (a_{i2} + ra_{j2})x_2 + \ldots + (a_{ik} + ra_{jk})x_k + \ldots + (a_{im} + ra_{jm})x_m = (b_i + rb_j).$$

Tällöin muuttujan x_k kerroin yhtälössä Y_i' on $a_{ik} + ra_{jk}$. Tämä kerroin on nolla jos ja vain jos valitaan

$$r = -\frac{a_{ik}}{a_{jk}}.$$

Huomaa, että tämä on hyvin määritelty reaaliluku, koska oletuksemme mukaan $a_{jk} \neq 0$, joten sillä voidaan jakaa.

Olemme siis näyttäneet, että jos muuttuja x_k esiintyy jossakin yhtälöryhmän yhtälössä nollasta eroavalla kertoimella, on aina mahdollista *eliminoida* tämä muuttuja mistä tahansa toisesta yhtälöryhmän yhtälöstä alkeisrivitoimituksella, eli ratkaisujoukkoa muuttumatta.

Tehdään tähän väliin myös seuraava yksinkertainen havainto, josta on hyötyä myöhemmin. Oletetaan, että yllä tarkastellussa tilanteessa jokin toinen muuttuja x_l esiintyy molemmissa yhtälöissä Y_i, Y_j kertoimella nolla, $a_{il} = 0 = a_{jl}$. Tällöin alkeisrivitoimituksen $Y_i + rY_j$ jälkeen muuttuja x_l ei edelleenkään esiinny uuden yhtälöryhmän LYR' yhtälöissä Y_i' ja Y_j'. Toisin sanoen *jos jokin muuttuja on jo eliminoitu yhtälöistä* Y_i *ja* Y_j, se pysyy eliminoituna alkeisrivitoimituksen $Y_i + rY_j$ jälkeenkin.

Gaussin eliminointimenetelmä on systemaattinen tapa eliminoida muuttujia, joka tähtää niin sanotussa *porrasmuodossa* olevaan yhtälöryhmään. Menetelmä etenee seuraavasti. Olkoon LYR lineaarinen yhtälöryhmä (3). Oletamme konkreettisuuden vuoksi, että ensimmäinen muuttuja x_1 ei ole "täysin näkymätön", eli esiintyy nollasta eroavalla kertoimella ainakin yhdessä yhtälöryhmän yhtälössä. Tavoitteena on "eliminoida" muuttuja x_1 kaikista yhtälöryhmän yhtälöistä, paitsi ensimmäisestä. Tämä voidaan tehdä seuraavasti.

Tarvittaessa vaihtamalla kahden yhtälön paikkaa yhtälöryhmässä (alkeisrivitoimitus tyyppiä I) voidaan olettaa, että muuttujan x_1 kerroin a_{11} yhtälöryhmän **ensimmäisessä** yhtälössä *eroaa nollasta*. Suorittamalla alkeisrivitoimitus $Y_2 + (-a_{21}/a_{11})Y_1$ saadaan yhtälöryhmä, jossa muuttuja x_1 "ei esiinny" (eli esiintyy kertoimella nolla) sen toisessa yhtälössä. Sen jälkeen eliminoidaan samalla tavalla muuttuja x_1 kolmannesta yhtälöstä, neljännestä jne, toisin sanoen jokaisella $i = 2, \ldots, n$ suoritetaan alkeisrivitoimitus $Y_i + (-a_{i1}/a_{11})Y_1$. Kaikki nämä alkeisrivitoimitukset voidaan suorittaa "samanaikaisesti" yhdessä välivaiheessa, kuten yleensä käytännössä tehdäänkin. On kuitenkin tärkeätä muistaa, että tarkasti ottaen alkeisrivitoimituksia on suoritettava yksi kerralla tietyssä järjestyksessä ja lopputulos yleisesti voi riippuu siitä, missä järjestyksessä alkeisrivitoimituksia tehdään. Tässä vaiheessa näin ei käy, koska alkeisrivitoimitukset $Y_i + (-a_{i1}/a_{11})Y_1$, $i = 2, \ldots, n$, "eivät vaikuta toisiinsa", ja sama lopputulos saadaan tehdäänpä niitä missä järjestyksessä tahansa.

Ensimmäisen välivaiheen ("algoritmin ensimmäisen kierroksen") jälkeen alkuperäinen lineaarinen yhtälöryhmä on muunnettu alkeisrivitoimituksilla muotoon, jossa muuttuja x_1 esiintyy ainoastaan sen *ensimmäisessä* yhtälössä. Saadaan siis uusi lineaarinen yhtälöryhmä LYR', joka näyttää seuraavalta:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 & + & a'_{12}x_2 & + & \dots & + & a'_{1j}x_j & + & \dots & + & a'_{1m}x_m & = & b'_1 \\ & & a'_{22}x_2 & + & \dots & + & a'_{2j}x_j & + & \dots & + & a'_{2m}x_m & = & b'_2 \\ & & \vdots & & & & & & & & \vdots & & \\ & & a'_{n2}x_2 & + & \dots & + & a'_{nj}x_j & + & \dots & + & a'_{nm}x_m & = & b'_n. \end{cases}$$

Tässä ensimmäinen yhtälö säilyy samana kuin edellisessäkin yhtälöryhmässä, eli $a'_{1j} = a_{1j}$ kaikilla $j = 1, \dots, n$, sen sijaan muiden yhtälöiden kertoimet ovat yleisesti ottaen uusia (siksi pilkut).

Mitä hyötyä tästä muunnoksesta on ollut? No, jos nyt hetkellisesti unohdetaan ensimmäinen yhtälö, huomataan, että uuden yhtälöryhmän muut yhtälöt $Y'_2, Y'_3, \dots, Y'_n$ muodostavat pienemmän yhtälöryhmän

$$\begin{cases} a'_{22}x_2 & + & \dots & + & a'_{2j}x_j & + & \dots & + & a'_{2m}x_m & = & b'_2 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots & & \\ a'_{n2}x_2 & + & \dots & + & a'_{nj}x_j & + & \dots & + & a'_{nm}x_m & = & b'_n, \end{cases} \tag{6}$$

jossa muuttuja x_1 ei esiinny lainkaan. Yhtälöryhmässä (6) on tietysti vähemmän yhtälöitä, mutta myös *vähemmän muuttujia* kuin alkuperäisessä yhtälöryhmässä. Jono $(t_1, t_2 \dots, t_m)$ on alkuperäisen yhtälöryhmän LYR ratkaisu jos ja vain jos jono $(t_2 \dots, t_m)$ on yhtälöryhmän (6) ratkaisu ja lisäksi pätee

$$a'_{11}t_1 + a'_{12}t_2 + \dots + a'_{1j}t_j + \dots + a'_{1n}t_m = b'_1$$

eli (huomaa, että $a'_{11} = a_{11} \neq 0$),

$$t_1 = (b'_1 - a'_{12}t_2 - \dots - a'_{1j}t_j - \dots - a'_{1n}t_m)/a'_{11}.$$

Tästä seuraa, että periaatteessa meidän riittää osata ratkaista pienempi yhtälöryhmä (6). Tämä yhtälöryhmä voidaan taas ratkaista soveltamalla siihen samaa muuttujan eliminointialgoritmia, joista lähdettiin liikkeelle - otetaan yhtälöryhmän "ensimmäinen" muuttuja x_2 ja "eliminoidaan" se yhtälöistä $Y'_3, \dots, Y'_n$, samalla tavalla kuin alussa eliminoitiin muuttuja x_1 jokaisesta yhtälöstä, paitsi ensimmäisestä. Oikeastaan tässä vaiheessa voikin käydä niin, että x_2 ei esiinny, eli on "näkymätön" jokaisessa yhtälöryhmän (6) yhtälössä. Tästä syystä tarkkaan ottaen seuraavaksi edetään näin - etsitään järjestysluvultaan *ensimmäinen* muuttujista $x_2, \dots, x_n$, joka esiintyy ainakin yhdessä yhtälöryhmän (6) yhtälössä nollasta eroavalla kertoimella. Tämä muuttuja x_k on tällöin yhtälöryhmän (6) "ensimmäinen" muuttuja ja se voidaan eliminoida tämän yhtälöryhmän jokaisesta yhtälöstä, paitsi toisesta, suorittamalla alkeisrivitoimituksia tässä yhtälöryhmässä. Näin jatketaan *rekursiivisesti* pienentämällä yhtälöiden ja muuttujien lukumäärä, kunnes päästään tilanteeseen, jossa jäljellä on vain yksi lineaarinen yhtälö.

Edellisessä kappaleessa on esitetty menetelmän idea ja tavoite yleisellä tasolla. Teknisellä tasolla haluamme kuitenkin pitää laskuissa edelleenkin mukana koko yhtälöryhmän, mistä syystä jatketaan formaalilla tasolla seuraavasti. Olemme siis päässeet yhtälöryhmään LYR', joka on muotoa

$$(7)\qquad \begin{cases} a'_{11}x_1 & + & a'_{12}x_2 & + & \dots & + & a'_{1j}x_j & + & \dots & + & a'_{1m}x_m & = & b'_1 \\ & & a'_{22}x_2 & + & \dots & + & a'_{2j}x_j & + & \dots & + & a'_{2m}x_m & = & b'_2 \\ & & \vdots & & & & & & & & \vdots & & \\ & & a'_{n2}x_2 & + & \dots & + & a'_{nj}x_j & + & \dots & + & a'_{nm}x_m & = & b'_n \end{cases}$$

Seuraavaksi unohdetaan ensimmäinen yhtälö hetkellisesti ja otetaan ensimmäinen muuttuja x_k, joka esiintyy ainakin yhdessä yhtälöryhmän (7) yhtälöistä $Y'_2, Y'_3, \dots, Y'_n$ nollasta eroavalla kertoimella, jos sellaisia muuttujia ylipäätään on olemassa. Tällöin välttämättä $k > 1$, sillä muuttuja x_1:hän ei esiinny yhtälöissä $Y'_2, Y'_3, \dots, Y'_n$. Tarvittaessa vaihtamalla yhtälöiden paikka (tyyppiä I oleva alkeisrivitoimitus) voidaan olettaa, että muuttujan x_k kerroin a'_{2k} yhtälöryhmän LYR' *toisessa* yhtälössä Y'_2 eroaa nollasta. Tämän jälkeen eliminoidaan muuttujan eliminointialgoritmilla muuttuja x_k yhtälöryhmän (7) yhtälöistä $Y'_3, \dots, Y'_n$, eli *kolmannesta* yhtälöstä alkaen. Tässä vaiheessa siis yhtälöryhmän (7) ensimmäinen ja toisen yhtälöt eivät muutu lainkaan. Lisäksi muuttuja x_1 ei voi ilmestyä näiden toimenpiteiden seurauksena takaisin uuden yhtälöryhmän yhtälöihin $Y''_2, \dots, Y''_n$. Näin ollen muuttujan x_k eliminoinnin jälkeen saadaan seuraavannäköinen yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} a''_{11}x_1 & + & & & & & \dots & + & a''_{1m}x_m & = & b''_1 \\ & & a''_{2k}x_k & + & & & \dots & + & a''_{2m}x_m & = & b''_2 \\ & & & & a''_{3l}x_l & + & \dots & + & a''_{3m}x_m & = & b''_3 \\ & & & & \vdots & & & & \vdots & & \\ & & & & a''_{nl}x_l & + & \dots & + & a''_{nm}x_m & = & b''_n \end{cases}$$

Tässä tietysti $a''_{1i} = a'_{1i}$, $b''_1 = b'_1$ ja $a''_{2i} = a'_{2i}$, $b''_2 = b'_2$, sillä yhtälöryhmän (7) ensimmäistä ja toista yhtälöä ei algoritmin toisella kierroksella muutettu lainkaan. Symbolilla x_l on valmiiksi merkitty *seuraava* muuttuja, joka esiintyy nollasta eroavalla kertoimella ainakin yhdessä yhtälöryhmän yhtälössä *kolmannesta alkaen.* Tällöin välttämättä $l > k$ ja seuraavalla kierroksella koko rutiini toistetaan - eliminoidaan x_l yhtälöryhmän yhtälöistä *neljännestä alkaen.*

Toistetaan tätä algoritmia niin kauan kuin eliminoitavia muuttujia löytyy. Algoritmin jokaisessa kierroksessa siirrytään tarkastelussa yhden yhtälön verran alaspäin ja ainakin yhden muuttujan verran oikealle, joten algoritmin on pakko päättyä jossakin vaiheessa äärellisen monen askelen kuluttua. Tämä voi tapahtua kahdesta syystä - joko päästiin yhtälöryhmän viimeiseen yhtälöön, tai sitten jossakin vaiheessa päästään tilanteeseen, jossa jostakin yhtälöstä alkaen kaikki yhtälöryhmän yhtälöt eivät sisällä enää yhtäkään muuttujia eli jokainen muuttuja on niissä näkymätön. Tällaiset yhtälöt ovat välttämättä muotoa $0 = b$ jollakin reaaliluvulla b.

Yleisesti ottaen Gaussin eliminointialgoritmin lopputuloksena saadaan yhtälöryhmä, joka näyttää tällaiselta:

$$
(8) \qquad \left\{ \begin{array}{llllllll}
\bar{a}_{1j_1}x_{j_1}+ & & & & \ldots & +\bar{a}_{1m}x_m & = & \bar{b}_1 \\
 & \bar{a}_{2j_2}x_{j_2}+ & & & \ldots & +\bar{a}_{2m}x_m & = & \bar{b}_2 \\
 & & \bar{a}_{3j_3}x_{j_3}+ & & \ldots & +\bar{a}_{3m}x_m & = & \bar{b}_2 \\
 & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & & & \bar{a}_{kj_k}x_{j_k}+ & \ldots & +\bar{a}_{km}x_m & = & \bar{b}_k \\
 & & & & & 0 & = & \bar{b}_{k+1} \\
 & & & & & & \ldots & \\
 & & & & & 0 & = & \bar{b}_n.
\end{array} \right.
$$

Tässä x_{j_i} on i:nnen yhtälön *ensimmäinen* muuttuja, jonka kerroin a_{ij_i} eroaa nollasta. Sanomme tällaista muuttujaa yhtälönsä *päämuuttujaksi.* Yhtälön Y_i päämuuttujan x_{j_i} kerrointa a_{ij_i} sanomme kyseisen yhtälön **johtavaksi kertoimeksi**. Muuttujaa, joka on jonkun yhtälön päämuuttuja, sanotaan koko yhtälöryhmän (8) **päämuuttujiksi**. Edellä läpikäydyn Gaussin algoritmin rakenteesta seuraa, että yhtälöryhmässä (8) *seuraavan yhtälön päämuuttujan indeksi on aina aidosti suurempi kuin edellisen.* Lisäksi algoritmin ensimmäinen välivaihe on määritelty niin, että x_1 on välttämättä ensimmäisen yhtälön johtava muuttuja eli $j_1 = 1$. Toisin sanoen pätee $1 = j_1 < j_2 < \ldots < j_k$.

Muuttujia, jotka eivät ole päämuuttujia, sanotaan **vapaiksi muuttujiksi**.

Yhtälöryhmässä (8) alimpina ovat yhtälöt muotoa $0 = \bar{b}$, joissa muuttujia ei esiinny lainkaan. Tällaisia yhtälöitä ei tarvitse olla yhtälöryhmässä ollenkaan, tällöin yllä $k = n$.

Muotoa (8) olevan yhtälöryhmän sanotaan olevan **porrasmuodossa**.
Virallinen määritelmä on seuraava - lineaarinen yhtälöryhmä on *porrasmuodossa* jos jokaisen sen seuraavan yhtälön päämuuttujan indeksi on aidosti suurempi kuin edellisen yhtälön päämuuttujan indeksi ja sellaiset yhtälöt, joissa muuttujia ei esiinny lainkaan, ovat alimpina. Yllä olevassa Gaussin menetelmän kuvauksessa olemme päättyneet porrasmuodossa lineaariseen yhtälöryhmään, jossa x_1 on aina päämuuttuja, mutta tämä johtuu siitä, että olemme lähteneet oletuksesta, jonka mukaan x_1 esiintyy nollasta eroavalla kertoimella ainakin yhdessä yhtälöryhmän yhtälössä. Jos x_1 sattuukin olemaan yhtälöryhmässä "näkymätön" muuttuja, aloitetaan eliminointi ensimmäisestä yhtälöryhmän muuttujasta joka ei ole yhtälöryhmässä näkymätön.

Tarkka lukija huomaa, että emme käyttäneet Gaussin eliminointimenetelmän kuvailussa tyyppiä (II) olevia alkeisrivitoimituksia rY_i. On totta, että teoreettiselta näkökulmalta Gaussin eliminointimenetelmässä pärjää ainoastaan tyyppiä (I) ja tyyppiä (III) olevilla alkeisrivitoimituksilla. Käytännön laskuissa typpiä (II) olevista operaatiosta saattaa kuitenkin olla hyötyä. Esimerkiksi jos lähdetään liikkeelle lineaarisesta yhtälöryhmästä, jonka kaikki kertoimet ja kaikki vakiot ovat kokonaislukuja, Gaussin eliminointimenetelmä alkaa yleensä heti tuottaa välivaiheissa yhtälöryhmiä, joissa kertoimina esiintyvät murtoluvut. Jos laskuja suoritetaan "käsiin" kynällä ja paperilla, tyyppiä (II) olevien alkeisrivitoimitusten avulla voidaan muuntaa tarvittaessa jokainen murtolukuja sisältävä yhtälö kokonaislukukertoimiseksi. Tämä helpottaa elämää, sillä kokonaisluvuilla laskeminen on helpompaa, nopeampaa ja vähemmän virhealtista kuin murtoluvuilla laskeminen.

Gauss-Jordanin menetelmässä (josta puhutaan hieman myöhemmin) taas tyyppiä (II) olevat operaatiot ovat yleensä välttämättömiä.

Esimerkki 9. *Esitetään esimerkki Gaussin menetelmän käytöstä. Tarkastellaan yhtälöryhmää*

$$\begin{cases} \begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & - & 3x_6 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & & & + & 7x_4 & - & 8x_5 & - & 3x_6 & = & 4 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & 13x_3 & + & 3x_4 & - & 4x_5 & - & 2x_6 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & - & 7x_5 & - & x_6 & = & 1 \\ & & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & & & = & 1. \end{array} \end{cases}$$

Koska x_1 ei esiinny ensimmäisessä yhtälössä, mutta esiintyy kaikissa muissa, aloitetaan vaihtamalla ensimmäinen ja vaikkapa toinen yhtälöt keskenään, jolloin saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} 3x_1 & + & 5x_2 & & & + & 7x_4 & - & 8x_5 & - & 3x_6 & = & 4 \\ & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & - & 3x_6 & = & 1 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & 13x_3 & + & 3x_4 & - & 4x_5 & - & 2x_6 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & - & 7x_5 & - & x_6 & = & 1 \\ & & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & & & = & 1. \end{array} \end{cases}$$

Seuraavaksi eliminoidaan muuttuja x_1 kaikista, paitsi ensimmäisestä yhtälöstä. Toisessa ja viidennessä yhtälöissä se on valmiiksi eliminoitu. Tekemällä alkeisrivitoimituksia $Y_3 - (4/3)Y_1$ ja $Y_4 - (2/3)Y_1$ saadaan x_1 eliminoitua myös yhtälöistä 3 ja 4, lopputuloksena on yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} 3x_1 & + & 5x_2 & & & + & 7x_4 & - & 8x_5 & - & 3x_6 & = & 4 \\ & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & - & 3x_6 & = & 1 \\ & - & \frac{26}{3}x_2 & + & 13x_3 & - & \frac{19}{3}x_4 & + & \frac{20}{3}x_5 & + & 2x_6 & = & -\frac{25}{3} \\ & & \frac{2}{3}x_2 & - & x_3 & - & \frac{2}{3}x_4 & - & \frac{5}{3}x_5 & + & x_6 & = & -\frac{5}{3} \\ & & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & & & = & 1. \end{array} \end{cases}$$

Seuraavaksi pitäisi tarkastella yhtälöryhmän yhtälöitä 2, 3, 4, 5. Ensimmäinen niissä esiintyvä muuttuja on x_2, joten se jätetään yhtälöön 2 ja eliminoidaan yhtälöistä 3, 4, 5. Tässä vaiheessa voidaan heti suorittaa seuraavan muuttujan eliminointiin tähtääviä alkeisrivitoimituksia, Gaussin eliminointimenetelmän teoreettisen esityksen mukaisesti. Tämä kuitenkin tuottaa ikäviä ja sotkusia murtolukulaskuja. Tästä syystä toinen vaihtoehto on ensin "päästä eroon nimittäjistä" suorittamalla alkeisrivitoimituksia $3Y_3$ ja $3Y_4$ eli yksinkertaisesti kertomalla kolmas ja neljäs yhtälö luvulla 3. Tämän jälkeen yhtälöryhmä on muotoa

$$\begin{cases} \begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} 3x_1 & + & 5x_2 & & & + & 7x_4 & - & 8x_5 & - & 3x_6 & = & 4 \\ & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & - & 3x_6 & = & 1 \\ & - & 26x_2 & + & 39x_3 & - & 19x_4 & + & 20x_5 & + & 6x_6 & = & -25 \\ & & 2x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & - & 5x_5 & + & 3x_6 & = & -5 \\ & & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & & & = & 1. \end{array} \end{cases}$$

Nyt voidaan eliminoida muuttuja x_2 yhtälöistä 3, 4, 5 alkeisrivitoimituksilla

$Y_3 - 13Y_2$, $Y_4 + Y_2$ ja $Y_5 + Y_2$. Seurauksena saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 7x_4 - 8x_5 - 3x_6 = 4 \\ \quad - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 - 3x_6 = 1 \\ \quad - 45x_4 + 7x_5 + 45x_6 = -38 \\ \quad - 4x_5 = -4 \\ \quad 3x_4 - x_5 - 3x_6 = 2. \end{cases}$$

Seuraavaksi siirrytään tarkastelemaan yhtälöitä 3, 4 ja 5. Muuttuja x_3 joutui eliminoiduksi niistä edellisessä välivaiheessa muuttujan x_2 kanssa. Tästä seuraa jo tässä vaiheessa, että siitä tulee yhtälöryhmän vapaa muuttuja. Seuraavaksi on vuorossa muuttuja x_4. Jos Gaussin algoritmia noudattaa orjallisesti, niin tämä muuttuja pitää eliminoida yhtälöistä 4 ja 5 yhtälön 3 avulla. Tämä johtaisi alkeisrivitoimitukseen $Y_5 + (3/45)Y_3$, jonka suorittaminen vaatisi ikäviä murtolukulaskuja. Tässä tapauksessa ne voi välttää, jos ensin suorittaa alkeisrivitoimituksen $Y_3 \leftrightarrow Y_5$ eli vaihtaa kolmannen ja viidennen yhtälön keskenään. Seurauksena on yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 7x_4 - 8x_5 - 3x_6 = 4 \\ \quad - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 - 3x_6 = 1 \\ \quad 3x_4 - x_5 - 3x_6 = 2 \\ \quad - 4x_5 = -4 \\ \quad - 45x_4 + 7x_5 + 45x_6 = -38. \end{cases}$$

Nyt muuttujan x_3 eliminoinniksi riittää suorittaa alkeisrivitoimitus $Y_5{+}15Y_3$, joka sisältää vain kokonaisluvuilla laskemista. Päästään yhtälöryhmään

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 7x_4 - 8x_5 - 3x_6 = 4 \\ \quad - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 - 3x_6 = 1 \\ \quad 3x_4 - x_5 - 3x_6 = 2 \\ \quad - 4x_5 = -4 \\ \quad - 8x_5 = -8. \end{cases}$$

Ollaan melkein porrasmuodossa - pitää vielä eliminoida x_5 viimeisestä yhtälöstä. Tämä onnistuu alkeisrivitoimituksella $Y_5 - 2Y_4$. Lopputuloksena on yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 7x_4 - 8x_5 - 3x_6 = 4 \\ \quad - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 - 3x_6 = 1 \\ \quad 3x_4 - x_5 - 3x_6 = 2 \\ \quad - 4x_5 = -4 \\ \quad 0 = 0, \end{cases}$$

joka on porrasmuodossa.

Yllä annettua teoreettista kuvausta Gaussin menetelmän välivaiheista voidaan pitää todistuksena seuraavalle tulokselle.

Lause 10. *Jokainen lineaarinen yhtälöryhmä on ekvivalentti porrasmuodossa olevan yhtälöryhmän kanssa.*

Edellisestä Lauseesta seuraa, että riittää osata ratkaista porrasmuodossa olevia yhtälöryhmiä. Tämä tehdään seuraavasti.

Jos porrasmuodossa olevassa yhtälöryhmässä (8) esiintyy ainakin yksi muotoa $0 = b$, missä $b \neq 0$, oleva yhtälö, **yhtälöryhmällä ei ole ratkaisuja** eli sen ratkaisujoukko on tyhjä. Tämä johtuu tietysti siitä, että mikään muuttujien arvojen valinta ei voi tehdä epätodesta väitteestä $0 = b$ toden. Yhtälöryhmää, jolla ei ole ratkaisuja sanotaan *inkonsistentiksi* tai *ristiriitaiseksi.*

Oletetaan, että muotoa $0 = b$, $b \neq 0$ olevia yhtälöitä ei yhtälöryhmässä esiinny. Yhtälöt muotoa $0 = 0$ voidaan tällöin jättää huomiotta, sillä ne toteutuvat aina millä tahansa muuttujien arvojen valinnalla. Poistamme siis yhtälöryhmästä (8) alimpia yhtälöitä, jotka eivät sisällä muuttujia lainkaan, jolloin ratkaisemme siis muotoa

$$\begin{cases} a_{1j_1}x_{j_1} + & & & & & \dots & +a_{1m}x_m & = & b_1 \\ & a_{2j_2}x_{j_2} + & & & & \dots & +a_{2m}x_m & = & b_2 \\ & & a_{3j_3}x_{j_3} + & & & \dots & +a_{3m}x_m & = & b_2 \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \dots \\ & & & a_{(k-1)j_{k-1}}x_{j_{k-1}} + & \dots & +a_{(k-1)j_k}x_{j_k} + \quad \dots & +a_{(k-1)m}x_m & = & b_{k-1} \\ & & & & & a_{kj_k}x_{j_k} + \quad \dots & +a_{km}x_m & = & b_k \end{cases}$$

olevaa yhtälöryhmää. Annetaan *vapaille* muuttujille *mielivaltaiset* arvot ja ratkaistaan sen jälkeen *päämuuttujat* yhtälöryhmästä liikkumalla alhaalta ylöspäin. Viimeisessä yhtälössä

$$a_{kj_k}x_{j_k} + \ldots + a_{km}x_m = b_k$$

muuttuja x_{j_k} on ainoa yhtälöryhmän päämuuttuja, muut ovat vapaita. Ratkaisemalla tästä yhtälöstä muuttuja x_{j_k} saadaan

$$x_{j_k} = (b_k - a_{k(j_k+1)}x_{j_k+1} - \ldots - a_{km}x_m)/a_{kj_k}. \tag{11}$$

Huomaa, että $a_{kj_k} \neq 0$, joten sillä voidaan jakaa.

Siirrytään toiseksi alimpaan yhtälöön

$$a_{(k-1)j_{k-1}}x_{j_{k-1}} + \ldots + a_{(k-1)j_k}x_{j_k} + \ldots + a_{(k-1)m}x_m = b_{k-1}.$$

Siinä esiintyy yhtälöryhmän päämuuttujista vain tämän yhtälön päämuuttuja $x_{j_{k-1}}$ ja muuttuja x_{i_k}, muut muuttujat ovat vapaita. Ratkaisemalla $x_{j_{k-1}}$, saadaan

$$x_{j_{k-1}} = (b_{k-1} - \ldots - a_{(k-1)j_k}x_{i_k} - \ldots - a_{km}x_m)/a_{(k-1)j_{k-1}}.$$

Muuttujalle x_{j_k} on jo laskettu arvo vapaiden muuttujien lausekkeena yhtälössä (11). Sijoittamalla tämä lauseke edelliseen yhtälöön, saadaan muuttujalle $x_{j_{k-1}}$ arvo vapaiden muuttujien lausekkeena laskettuna.

Jatketaan samalla tavalla liikkumalla ylöspäin yhtälöstä edelliseen. Jokaisessa vaiheessa uuden tarkasteltavan yhtälön päämuuttuja on tässä vaiheessa yhtälön ainoa muuttuja, jonka arvo ei ole vielä laskettu vapaiden muuttujien lausekkeena. Ratkaisemalla tämä päämuuttuja muiden muuttujien lausekkeena tästä yhtälöstä ja sijoittamalla jo aiemmin lasketut päämuuttujien lausekkeet, saadaan tämän yhtälön päämuuttuja ratkaistuna vapaiden muuttujien lausekkeena.

Esimerkki 12. *Esimerkissä 9 olemme tarkastelleet yhtälöryhmää*

$$(13)\qquad \begin{cases} - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 - 3x_6 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_4 - 8x_5 - 3x_6 = 4 \\ 4x_1 - 2x_2 + 13x_3 + 3x_4 - 4x_5 - 2x_6 = -3 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 4x_4 - 7x_5 - x_6 = 1 \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 1. \end{cases}$$

Olemme muuntaneet tämä yhtälöryhmä alkeisrivitoimituksilla porrasmuotoon

$$(14)\qquad \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 7x_4 - 8x_5 - 3x_6 = 4 \\ - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 - 3x_6 = 1 \\ 3x_4 - x_5 - 3x_6 = 2 \\ - 4x_5 = -4 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Viedään nyt lasku loppuun ja ratkaistaan yhtälöryhmä. Koska porrasmuodossa ei ole ristiriitaisia identtisesti epätosia yhtälöitä muotoa $0 = b$, $b \neq 0$, *yhtälöryhmällä on ratkaisuja. Päämuuttajat ovat* x_1, x_2, x_4 *ja* x_5, *muuttujat* x_3 *ja* x_6 *ovat vapaita muuttujia. Toiseksi viimeisestä yhtälöstä saadaan* $x_5 = 1$. *Tällöin toiseksi viimeisestä yhtälöstä saadaan*

$$x_4 = (2 + x_5 + 3x_6)/3 = (3 + 3x_6)/3 = 1 + x_6.$$

Yhtälöstä 2 saadaan tällöin

$$x_2 = (1 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 + 3x_6)/(-2) = (1 - 3x_3 - 2 - 2x_6 - 1 + 3x_6)/(-2) = 1 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_6$$

ja lopuksi yhtälöstä 1 saadaan

$$x_1 = (4 - 5x_2 - 7x_4 + 8x_5 + 3x_6)/3 = -\frac{5}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_6.$$

Yleensä on tapana merkitä vapaita muuttujia parametrisymboleina, *esim.* $x_3 = s$, $x_6 = t$, $s, t \in \mathbb{R}$. *Tällöin ratkaisu kirjoitetaan virallisesti esimerkiksi näin*

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{5}{2}s - \frac{1}{2}t, \\ x_2 = 1 + \frac{3}{2}s - \frac{1}{2}t, \\ x_3 = s, \\ x_4 = 1 + t, \\ x_5 = 1, \\ x_6 = t, \end{cases}$$

missä $t, s \in \mathbb{R}$. *Kun* s *ja* t *käy läpi (toisesta riippumatta!) erilaisia reaalilukuarvoja, saadaan yhtälöryhmälle erilaisia ratkaisuja. Kääntäen kaikki ratkaisut ovat tätä muotoa. Erityisesti tämän yhtälöryhmän ratkaisujoukko on ääretön.*

Yllä tarkastellun yhtälöryhmän (13) sijaan tarkastellaan seuraavaksi yhtälöryhmää

$$
(15) \qquad \begin{cases}
 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 - 3x_6 = 0 \\
3x_1 + 5x_2 + 7x_4 - 8x_5 - 3x_6 = 4 \\
4x_1 - 2x_2 + 13x_3 + 3x_4 - 4x_5 - 2x_6 = -3 \\
2x_1 + 4x_2 - x_3 + 4x_4 - 7x_5 - x_6 = 1 \\
 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 0,
\end{cases}
$$

joka on muuten sama kuin yhtälöryhmä (13), paitsi, että viimeisen yhtälön oikeanpuoleisen vakiotermin arvo on muutettu ykkösestä nollaan. Suorittamalla täsmälleen samoja alkeisrivitoimituksia kuin yllä, tämä yhtälöryhmä voidaan muuntaa seuraavaksi porrasmuodossa olevaksi yhtälöryhmäksi

$$
\begin{cases}
3x_1 + 5x_2 + 7x_4 - 8x_5 - 3x_6 = 4 \\
 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 - 3x_6 = 1 \\
3x_4 - x_5 - 3x_6 = 1 \\
- 4x_5 = -4 \\
0 = -15.
\end{cases}
$$

Tämä yhtälöryhmä sisältää identtisesti epätoden yhtälön $0 = -15$. Tästä seuraa, että yhtälöryhmällä (15) ei ole ratkaisuja ollenkaan.

Ratkaisujen lukumäärä. Lineaarisella yhtälöryhmällä ei siis välttämättä ole ratkaisuja ollenkaan. Kuten yllä mainittiin jo, lineaarisia yhtälöryhmiä, joilla ei ole ratkaisuja sanotaan inkonsisteiksi tai ristiriitaisiksi. Gaussin eliminointimenetelmästä seuraa, että yhtälöryhmä on ristiriitainen jos ja vain jos porrasmuotoon muutettuna se sisältää ainakin yhden *identtisesti epätoden* yhtälön, joka on muotoa $0 = b$, $b \neq 0$. Jos tällaisia yhtälöitä ei porrasmuodossa ole, yhtälöryhmällä on ainakin yksi ratkaisu ja yhtälöryhmää sanotaan *konsistentiksi.* Kuten edellisestä esimerkistä seuraa, konsistentin yhtälöryhmän ratkaisu ei ole välttämättä *yksikäsitteinen.* Jos porrasmuodossa konsistentilla yhtälöryhmällä on ainakin yksi vapaa muuttuja, tämä vapaa muuttuja voi saada yhtälöryhmän ratkaisussa mielivaltaisia arvoja, mistä seuraa heti, että tällöin yhtälöryhmällä on ääretön määrä ratkaisuja. Tarkemmin sanottuna konsistentilla yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu jos ja vain jos porrasmuotoon muunnettuna sillä ei ole vapaita muuttujia lainkaan.

Tapaus $m > n$ - yhtälöryhmässä on enemmän muuttujia kuin yhtälöitä.

Propositio 16. *Oletetaan, että lineaarisella yhtälöryhmällä on muuttujia aidosti enemmän kuin yhtälöitä. Tällöin yhtälöryhmä on joko ristiriitainen tai sillä on äärettömän monta ratkaisua.*

Toisin sanoen tällaisella yhtälöryhmällä ei voi olla tasan yhtä ratkaisua.

Todistus. Porrasmuodossa olevassa yhtälöryhmässä on niin paljon päämuuttujia kuin yhtälöitä, jotka eivät ole muotoa $0 = b$. Erityisesti siis päämuuttujia on korkeintaan niin paljon kuin yhtälöitä. Näin ollen, jos muuttujia on enemmän kuin yhtälöitä, väistämättä on pakko olla vapaita muuttujia. Konsistentilla lineaarisella yhtälöryhmällä, jolla on ainakin yksi vapaa muuttuja, on äärettömän monta ratkaisua. □

Homogeeninen yhtälöryhmä. Palautetaan mieleen, että lineaarinen yhtälöryhmä (3) on homogeeninen jos ja vain jos kaikilla $i = 1, \ldots, n$ pätee $b_i = 0$ eli kaikki sen oikeanpuoleiset vakiot ovat nollia. On selvää, että jokaisella homogeenisella yhtälöryhmällä on aina vähintään yksi ratkaisu, sillä jono $(0, 0, \ldots, 0)$ toteuttaa homogeenisen yhtälöryhmän (jokaisen muuttujan arvo nolla). Tätä ratkaisua sanotaan *triviaaliksi*. Näin ollen jokainen homogeeninen yhtälöryhmä on konsistentti, joten sillä on joko tasan yksi tai äärettömän monta ratkaisua. Erityisesti, jos homogeenisessa yhtälöryhmässä on enemmän muuttujia kuin yhtälöitä, sillä on edellisen Proposition mukaan äärettömän monta ratkaisua. Ei ole vaikeata huomata, että jokainen alkeisrivitoimitus muuttaa homogeeninen yhtälöryhmä homogeeniseksi, joten kun homogeeninen yhtälöryhmä muutetaan porrasmuotoon, lopputuloksena on myös homogeeninen yhtälöryhmä. Toisaalta sama tulos voidaan päätellä seuraavasti - lineaarinen yhtälöryhmä on homogeeninen jos ja vain jos jono $(0, 0, \ldots, 0)$ on sen ratkaisu. Näin ollen jos kaksi lineaarista yhtälöryhmää ovat ekvivalentteja, niin toinen niistä on homogeeninen jos ja vain jos molemmat ovat homogeenisia.

Olkoon LYR mielivaltainen *konsistentti* lineaarinen yhtälöryhmä (3) ja olkoon LYRH sitä vastaava homogeeninen lineaarinen yhtälöryhmä. Kiinnitetään jokin yhtälöryhmän LYR ratkaisu $\mathbf{t} = (t_0, \ldots, t_m)$ ja olkoon $\mathbf{s} = (s_0, \ldots, s_m)$ jokin vastaavan homogeenisen yhtälöryhmän ratkaisu. Tällöin suoraan sijoittamalla helposti nähdään, että jono

$$\mathbf{t} + \mathbf{s} = (t_0 + s_0, \ldots, t_m + s_m)$$

on myös yhtälöryhmän LYR ratkaisu. Kääntäen olkoon $\mathbf{t}' = (t'_0, \ldots, t'_m)$ yhtälöryhmän LYR ratkaisu. Tällöin helposti nähdään, että jono $\mathbf{s} = \mathbf{t}' - \mathbf{t} = (t'_0 - t_0, \ldots, t_m - t'_m)$ on homogeenisen yhtälöryhmän LYRH ratkaisu ja pätee $\mathbf{t}' = \mathbf{t} + \mathbf{s}$. Näin ollen kaikki yhtälöryhmän LYR ratkaisut ovat muotoa

$$\mathbf{t} + \mathbf{s},$$

missä $\mathbf{t}$ on jokin yksi kiinnitetty yhtälöryhmän ratkaisu ja $\mathbf{s}$ käy läpi kaikki vastaavan homogeenisen yhtälön ratkaisut. Koska homogeenisella yhtälöryhmällä on ainakin yksi triviaali ratkaisu $x_k = 0$, $k = 1, \ldots, m$, tästä saadaan seuraava tulos.

Lemma 17. *Konsistentilla lineaarisella yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu jos ja vain jos sitä vastaavalla homogeenisella yhtälöryhmällä on vain triviaali ratkaisu* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Varoitus: Yhtälöryhmällä ja sitä vastaavalla homogeenisella yhtälöryhmällä on "sama ratkaisujen lukumäärä" jos ja vain jos yhtälöryhmä on konsistentti eli sillä ylipäätän on ratkaisuja. Yleisesti ottaen voi käydä niin, että vastaavalla homogeenisella yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen (triviaali) ratkaisu, mutta yhtälöryhmä itse on ristiriitainen. Kuitenkin erikoistapauksessa $m = n$ pätee seuraava mielenkiintoinen tulos.

Lemma 18. *Oletetaan, että lineaarisessa yhtälöryhmässä on sama määrä muuttujia ja yhtälöitä eli* $m = n$. *Tällöin yhtälöryhmä on konsistentti ja sillä on tasan yksi ratkaisu jos ja vain jos vastaavalla homogeenisella yhtälöryhmällä on ainoastaan triviaali ratkaisu* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Todistus. Jos yhtälöryhmä LYR on konsistentti ja sillä on tasan yksi ratkaisu, niin Lemman 17 nojalla vastaavalla homogeenisella yhtälöryhmällä on vain triviaali ratkaisu.

Kääntäen oletetaan, että $m = n$ ja vastaavalla homogeenisella yhtälöryhmällä LYHR on vain triviaali ratkaisu. Muutetaan tarkasteltava yhtälöryhmä LYR porrasmuotoon

$$
(19) \qquad \begin{cases}
\bar{a}_{1j_1}x_{j_1} + & & & & \dots & +\bar{a}_{1m}x_n & = & \bar{b}_1 \\
& \bar{a}_{2j_2}x_{j_2} + & & & \dots & +\bar{a}_{2m}x_n & = & \bar{b}_2 \\
& & \bar{a}_{3j_3}x_{j_3} + & & \dots & +\bar{a}_{3m}x_n & = & \bar{b}_3 \\
& & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
& & & \bar{a}_{kj_k}x_{j_k} + & \dots & +\bar{a}_{km}x_n & = & \bar{b}_k \\
& & & & & 0 & = & \bar{b}_{k+1} \\
& & & & & & \dots & \\
& & & & & 0 & = & \bar{b}_n.
\end{cases}
$$

Soveltamalla samoja alkeisrivitoimituksia yhtälöryhmää vastaavaan homogeeniseen yhtälöryhmään LYHR saadaan yhtälöryhmä

$$
(20) \qquad \begin{cases}
\bar{a}_{1j_1}x_{j_1} + & & & & \dots & +\bar{a}_{1m}x_n & = & 0 \\
& \bar{a}_{2j_2}x_{j_2} + & & & \dots & +\bar{a}_{2m}x_n & = & 0 \\
& & \bar{a}_{3j_3}x_{j_3} + & & \dots & +\bar{a}_{3m}x_n & = & 0 \\
& & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
& & & \bar{a}_{kj_k}x_{j_k} + & \dots & +\bar{a}_{km}x_n & = & 0 \\
& & & & & 0 & = & 0 \\
& & & & & & \dots & \\
& & & & & 0 & = & 0,
\end{cases}
$$

joka on yhtälöryhmää (19) vastaava homogeeninen yhtälöryhmä. Osoitetaan ensin, että $k = n$ eli sen, että muotoa $0 = 0$ yhtälöitä ei yhtälöryhmässä oikeasti ole. Tehdään vastaoletus: $k < n$. Tämä tarkoittaa sitä, että yhtälöryhmässä on vähemmän päämuuttujia kuin muuttujia ylipäätän, mistä seuraa, että yhtälöryhmällä (20) on ainakin yksi vapaa muuttuja. Tämä on vastoin sitä oletusta, että homogeenisella yhtälöryhmällä LYHR on vain yksi triviaali ratkaisu. Näin ollen $k = n$. Tästä seuraa, että yhtälöryhmässä (19) ei esiinny muotoa $0 = b$ olevia yhtälöitä, joten se on konsistentti. Lemmasta 17 seuraa nyt, että alkuperäisellä yhtälöryhmällä on vain yksi ratkaisu. □

Huomaa, että edellisen Lemman muotoilussa homogeenista yhtälöryhmää koskeva oletus ei riipu lainkaan tarkasteltavan yhtälöryhmän vakiotermeistä. Tämän havainnon avulla voidaan edellinen Lemma muotoilla myös seuraavasti.

Seuraus 21. *Olkoon*

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\
\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = 0
\end{cases}
$$

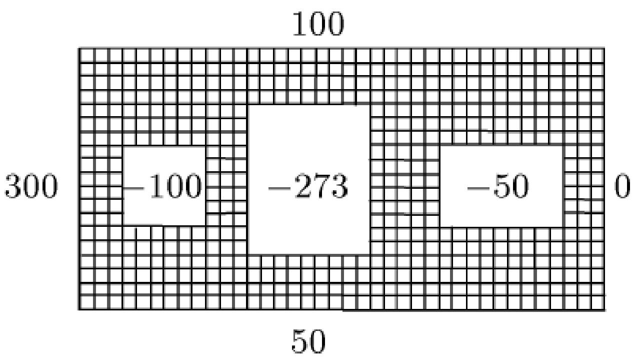
homogeeninen lineaarinen yhtälöryhmä, jolla on sama muuttujien ja yhtälöiden lukumäärä. Oletetaan, että tällä yhtälöryhmällä on vain triviaali ratkaisu $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Tällöin millä tahansa $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ lineaarisella yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu.

Myöhemmin esitämme Lemmoille 16, 18 sekä Seuraukselle 21 "helppoja" vektoriavaruuksien teoriaan perustuvia vaihtoehtoisia todistuksia, joissa ei käytetä Gaussin eliminointia ja muita "matriisimenetelmiä" lainkaan.

Esimerkki 22. *Eräässä avaruusteknologiaan kuuluvassa laitteessa käytetetään suorakulmion muotoista litteää venttiiliä, jonka sisällä on kolme suorakulmion muotoista aukkoa (kts. kuva 1). Venttiilin reuna koostuu ulkoreunasta ja kolmen sen sisällä olevien aukkojen reunoista. Venttiilin päälle asetetaan kuvassa 1 alla piirretty diskretti* hila. *Hilan kahden suoran leikkauspistettä sanotaan hilan* kärkipisteeksi. *Tarkasteltavassa hilassa on* 204 *"reunakärkipistettä" ja* 416 *"sisäkärkipisteitä". Kun venttiili asetetaan laitteeseen, hilan reunapisteiden pitäisi saavuttaa kuvaan merkittyjä lämpötilan arvoja (celsius-asteissa).*



Kuva 1

Fysikaalisesta teoriasta tiedetään, että hilan jokaisen sisäkärkipisteen lämpötila on aina keskiarvo sen neljän "naapuripisteen" lämpötilasta. Onko kuvan mukainen tilanne mahdollinen ja jos on, onko tällöin sisäpisteiden lämpötilajakauma yksikäsitteisesti määrätty?

Indeksoidaan hilan kärkipisteitä indeksillä i ja olkoon t_i kärkipisteen i lämpötilan arvo. Kun i on reunapiste, t_i on yksi vakioluvuista $-273, -100, 50, 0, 50, 100, 300$. Kun i on sisäpiste, pidämme t_i muuttujana. Jokaisessa sisäkärkipisteessä i pitäisi oletuksen mukaan päteä

$$t_i = \frac{t_a + t_b + t_c + t_d}{4}, \tag{23}$$

missä a, b, c, d ovat kärkipisteen i naapurikärkipisteitä. Jos, esimerkiksi, a, b, c ovat sisäpisteitä ja d reunapiste, tämä yhtälö voidaan kirjoittaa lineaarisena yhtälönä

$$4t_i - t_a - t_b - t_c = t_d,$$

missä t_i, t_a, t_b, t_c ovat muuttujia ja t_d on tunnettu vakio. Myös kaikissa muissa tapauksissa yhtälö (23) nähdään helposti lineaariseksi. Kun i käy läpi kaikki hilan sisäkärkipisteet, yhtälöt (23) muodostavat erään lineaarisen yhtälöryhmän LYR. Tässä yhtälöryhmässä on 416 *yhtälöä ja* 416 *muuttujaa.*

Tarkastellaan yhtälöryhmän LYR sijaan sitä vastaavaa homogeenista yhtälöryhmää LYRH. Ei ole vaikeata huomata, että yhtälöryhmä LYHR vastaa tilannetta, jossa hilan reunapisteiden lämpötila on identtisesti nolla. Osoitetaan, että yhtälöryhmällä LYHR on vain triviaali ratkaisu $t_i = 0$ kaikilla i. Tehdään vasta-oletus - olkoon (t_i) yhtälöryhmän LYHR epätriviaali ratkaisu. Valitaan j:ksi sisäkärkipiste, jossa lämpötilan itseisarvo $|t_j| > 0$ saavuttaa hilan kärkipisteiden joukossa maksimaalisen arvon. Oletuksen mukaan

$$t_j = \frac{t_a + t_b + t_c + t_d}{4},$$

missä a, b, c, d ovat kärkipisteen j naapurikärkipisteitä. Tällöin

$$|t_j| \leq \frac{|t_a| + |t_b| + |t_c| + |t_d|}{4},$$

mistä seuraa, että välttämättä $|t_a| = |t_b| = |t_c| = |t_d| = |t_j|$, sillä muuten $|t_j|$ ei olisi maksimaalinen arvo. Tästä seuraa, että kun liikumme kärkipisteestä j mihin tahansa suuntaan kohti hilan reunaa, kärkipisteen lämpötila pysyy maksimaalisena. Toisaalta jossakin vaiheessa saavumme reunakärkipisteelle, jossa lämpötila on oletuksen mukaan nolla. Näin ollen $|t_j| = 0$ ja koska $|t_j|$ oli valittu maksimaalisena, $|t_i| = 0$ kaikilla i. Saatu ristiriita osoittaa sen, että yhtälöryhmää LYR vastaavalla homogeenisella yhtälöryhmällä LYHR on vain triviaali ratkaisu. Koska yhtälöryhmässä on sama muuttujien ja yhtälöiden lukumäärä, Lemman 17 nojalla yhtälöryhmällä LYR on myös yksikäsitteinen ratkaisu. Toisin sanoen Kuvan 1 tilanne on mahdollinen ja sisäkärkipisteiden lämpötilajakauma määräytyy siinä yksikäsitteisesti.

Itse asiassa helposti huomataan, että yllä annettu argumentti toimii jokaisessa tämäntyyppisessä tilanteessa - hilan täsmällisellä muodolla ja kärkipisteiden lukumäärällä ei ole mitään merkitystä ratkaisun kannalta. Missä tahansa tällaisessa hilassa reunapisteiden lämpötilan arvot määräävät sisäpisteiden lämpötilan arvot yksikäsitteisesti.

Matriisin käsite

Analysoimalla Gaussin eliminointimenetelmää huomataan, että se perustuu ainoastaan tietynlaisiin yhtälöryhmän *kertoimien* ja *vakiotermien* välisten *algebrallisten operaatioiden* suorittamiseen. Esimerkiksi alkeisrivitoimituksen $Y_i + rY_j$ suorittaminen tarkoittaa sitä, että yhtälössä Y_i esiintyvät kertoimet ja vakiotermi

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{im} & b_i \end{bmatrix}$$

korvataan kertoimilla ja vakiotermillä

$$\begin{bmatrix} a_{i1}+ra_{j1} & a_{i2}+ra_{j2} & \dots & a_{ik}+ra_{jk} & \dots & a_{im}+ra_{jm} & b_i+rb_j \end{bmatrix}.$$

Kaikki yhtälöryhmän ratkaisemiseen tarvittavat välivaiheet voidaan koodata tällä tavalla operaatioiksi, jotka suoritetaan kertoimien ja vakioiden muodostamalla taulukolla eli *matriisilla*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nm} & b_n \end{bmatrix},$$

Tässä matriisissa i:nnes *rivi* sisältää yhtälöryhmän i:nnessä yhtälössä esiintyvien muuttujien kertoimet sekä saman yhtälön vakiotermin. Matriisin j:nnes sarake taas sisältää muuttujan x_j kertoimet, lukuun ottamatta viimeistä saraketta, joka sisältää yhtälöryhmän oikeanpuoleiset vakiotermit.

Yleisesti ottaen (reaalikertoiminen) $(n \times m)$-matriisi $M = (c_{ij})_{i=1,\dots,n, j=1,\dots,m}$ on reaaliluvuilla täytetty kaksiulotteinen taulukko, jossa on n riviä ja m saraketta,

$$M = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm}. \end{bmatrix}$$

Matriisin (i,j)-*alkio* on se luku, joka sijaitsee matriisin rivillä i ja sarakkeessa j, yllä c_{ij}. Matriisin alkiot siis indeksoidaan kahdella indeksillä, joista ensimmäinen ilmaisee alkiota sisältävän *rivin* numeron ja toinen ilmaisee tämän alkion sisältävän *sarakkeen* numeron. Matriisin M riville, jonka numero on i, käytämme jatkossa merkintää $r_i(M)$.

Matriiseille voidaan määritellä *alkeisrivitoimituksia* samalla tavalla kuin lineaarisille yhtälöryhmille. Itse asiassa nimitys alkeis**rivi**toimitus viittaa nimenomaan matriisin riveihin, vaikka olemmekin käyttäneet samaa termiä yhtälöryhmien kohdalla, mistä yhteydessä rivejä vastasivat yhtälöryhmän yhtälöt.

Matriisien alkeisrivitoimitukset

- Tyyppi (I) - vaihdetaan matriisin kaksi riviä $r_i(M)$, $r_j(M)$ keskenään. Merkitään $r_i(M) \leftrightarrow r_j(M)$.
- Tyyppi (II) - kerrotaan matriisin rivi $r_i(M)$ *nollasta eroavalla* reaaliluvulla a. Merkitään $ar_i(M)$
- Tyyppi (III) - lisätään riviin $r_i(M)$ toinen rivi $r_j(M)$, $j \neq i$, reaaliluvulla a kerrottuna. Merkitään $r_i(M) + ar_j(M)$.

Kahta matriisia M, M' sanotaan *riviekvivalenteiksi* jos matriisi M' saadaan matriisista M suorittamalla peräkkäin alkeisrivitoimituksia.

Matriisin M rivin M_i *johtava alkio* on rivin ensimmäinen nollasta eroava alkio, jos sellainen löytyy. Jos rivin kaikki alkiot ovat nollia, riviä sanotaan nollariviksi.

Matriisin $M = (c_{ij})_{i=1,\ldots,n,j=1,\ldots,m}$ sanotaan olevan **porrasmuodossa** jos se toteuttaa seuraavat ehdot.

- Matriisin kullakin rivillä sijaitseva johtava alkio sijaitsee ylemmän rivin johtavan alkion oikealla puolella. Toisin sanoen, jos c_{ik} on rivin $r_i(M)$ johtava alkio ja c_{jl} on rivin $r_j(M)$ johtava alkio, missä $i < j$, niin $k < l$.
- Mahdolliset nollarivit ovat alimpina.

Seuraava tulos osoitetaan soveltamalla Gaussin eliminointimenetelmää matriiseille aivan samalla tavalla kuin se tehtiin yhtälöryhmille.

Propositio 24. *Jokainen matriisi on riviekvivalentti porrasmuodossa olevan matriisin kanssa.*

Tarkkojen yksityiskohtien pitäisi olla tuttuja lineaarialgebran peruskurssilta ja ne noudattavat samaa kaavaa kuin edellä esitetty Gaussin eliminointimenetelmä lineaarisille yhtälöryhmille. Huomaa pieniä teknisiä eroja - yhtälöryhmien kohdalla olemme aloittaneet alussa konkreettisuuden vuoksi, että muuttuja x_1 ei ole ”näkymätön”, tämä vaatimus vastaisi oletusta siitä, että matriisin ensimmäinen sarake ei koostuu pelkistä nollista. Tämä oletus ei ole mitenkään välttämätön ja tuntuisi matriisien kohdalla jo hyvin keinotekoselta ja turhalta (mitä se tavallaan onkin). Jos muuttujaa x_1 vastaava matriisin ensimmäinen sarake sisältää pelkkiä nollia, se vain tarkoittaa sitä, että porrasmuodossa muuttujasta x_1 tulee vapaa muuttuja.

Yleensä Gaussin eliminointimenetelmä esitetäänkin lineaarialgebran kirjoissa heti matriisien, ei lineaaristen yhtälöryhmien tasolla. Annettu lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nk}x_k + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases},$$

jossa on m tuntematonta ja n muuttujia korvataan heti laskun alussa tätä yhtälöryhmää vastaavaksi *täydennetyksi matriisiksi*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} & \ldots & a_{2m} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nm} & b_n \end{bmatrix},$$

joka on $(n \times (m+1))$-kokoinen matriisi (huom, siis ei $(n \times m)$-kokoinen, koska vakiotermeistä saadaan yksi ”ylimääräinen” sarake). Tämä matriisi muunnetaan alkeisrivitoimituksilla porrasmuotoon. Saatu porrasmatriisi muutetaan takaisin yhtälöryhmäksi, jolloin saadaan porrasmuodossa oleva yhtälöryhmä. Tämä yhtälöryhmä on ekvivalentti alkuperäisen kanssa ja se ratkaistaan tavalliseen tapaan liikkumalla alhaalta ylöspäin. Matriisien käyttö välivaiheissa on kätevämpi, kuin yhtälöryhmien, mikä johtuu yksinkertaisesti siitä, että matriisin formaali pyörittely on selkeämpää ja helpompaa kuin yhtälöryhmän pyörittely, eikä siinä tarvitse kirjoittaa näkyviin jokaisessa välivaiheessa ratkaisun kannalta turhia asioita (esimerkiksi muuttujasymboleja).

Gauss-Jordanin eliminointimenetelmä

Gaussin eliminointimenetelmän ”huono” puoli on siinä, että lopussa on laskettavaa ”käsiin” päämuuttujien arvot vapaiden muuttujien lausekkeina. *Gauss-Jordanin eliminointimenetelmässä* vastaavat laskut hoidetaan jo välivaiheiden tasolla, jolloin ratkaisun ”lukeminen” laskun lopussa on suoraviivaista. Teknisellä tasolla Gauss-Jordanin menetelmä eroaa Gaussin menetelmässä siinä, että Gaussin menetelmässä eliminoidaan aina tämän kierroksen johtavan muuttujan esiintymiset ainoastaan yhtälöissä jotka ovat tarkasteltavan yhtälön *alapuolella*, kun taas Gauss-Jordanin menetelmässä se eliminoidaan myös tarkasteltavan yhtälön *yläpuolella*. Tällöin jokaisesta johtavasta alkiosta tulee sarakkeensa *ainoa* nollasta eroava alkio. Lisäksi jokainen johtava alkio *normalisoidaan* ykköseksi tyyppiä (II) alkeisrivitoimituksen avulla. Erityisesti tästä seuraa, että Gauss-Jordanin eliminointimenetelmässä tyyppiä (II) olevien alkeisrivitoimitusten käyttö on yleisesti ottaen välttämätöntä (päinvastoin kuin Gaussin menetelmässä).

Matriisin M sanotaan olevan *redusoidussa porrasmuodossa* jos

- M on porrasmuodossa,
- jokaisen rivin johtava alkio on 1 ja
- jokaisen rivin johtava alkio on sarakkeensa *ainoa* nollasta eroava alkio.

Gauss-Jordanin eliminointimenetelmän avulla voidaan osoittaa todeksi seuraava tulos.

Propositio 25. *Jokainen matriisi on riviekvivalentti redusoidussa porrasmuodossa olevan matriisin kanssa.*

Emme käy tässä läpi Gauss-Jordanin menetelmää yleisellä tasolla, vaan tyydymme esittämään esimerkin sen käytöstä. Lukija voi tarvittaessa paluttaa asia mieleen tarkemmin minkä tahansa lineaarialgebran peruskurssille tarkoitetun materiaalin avulla.

Esimerkki 26. *Muutetaan matriisi*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 7 & -1 & 8 \end{bmatrix} \tag{27}$$

redusoiduun porrasmuotoon. Ensimmäisen rivin ensimmäinen nollasta eroava alkio on $a_{12} = 2$*, tästä alkiosta ”tehdään” ensimmäinen johtava alkio. Eliminoidaan toisesta sarakkeesta muita alkiota alkeisrivitoimituksilla* $R_3 - (3/2)R_2$ *ja* $R_4 - 2R_2$*. Saadaan matriisi*

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3/2 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0. \end{bmatrix}$$

Koska redusoidussa porrasmuodossa johtavan alkion on oltava arvoltaan 1*, tässä vaiheessa voidaan heti muuttaa alkio* $a_{12} = 2$ *ykköseksi alkeisrivitoimituksella* $(1/2)R_1$*. Tämä kuitenkin johtaa heti laskuihin murtoluvuilla. Koska johtavan alkion ”normaalisaatio” voidaan myös tehdä yhtä hyvin laskun lopussa, jätetään se tekemättä tässä vaiheessa.*

Sen sijaan tehdään alkeisrivitoimitus $(-2)R_2$ *päästäksemme eroon murtoluvuista rivillä 2. Saadaan matriisi*

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0. \end{bmatrix}$$

Tähän mennessä lasku on ollut samanalainen kuin se olisi Gaussin menetelmässä. Seuraavaksi siirrytään riville 2 ja tehdään sen ensimmäisestä nollasta eroavasta alkiosta $a_{23} = 3$ *seuraava johtava alkio. Lisäksi eliminoidaan sen kanssa samassa sarakkeessa olevia alkiota* sekä *rivistä 3,* että *myös rivistä 1 sen yläpuolella (Gaussin menetelmässä eliminointi olisi kohdistunut vain riviin 3). Tehdään siis alkeisrivitoimituksia* $R_1 - (5/3)R_2$ *ja* $R_3 + R_2$*. Saadaan matriisi*

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0. \end{bmatrix}$$

Nyt matriisi on melkein redusoidussa porrasmuodossa - se on porrasmuodossa, jokainen johtava alkio (alkiot $a_{12} = 2$ *ja* $a_{23} = 3$*) on sarakkeensa ainoa nollasta eroava alkio. Lisäksi ainoa nollarivi on yhtälöryhmän alin rivi. Ainoa vaatimus, joka ei ole vielä voimassa, on vaatimus siitä, että jokaisen johtavan alkion on oltava arvoltaan* 1*. Tämä saadaan aikaan alkeisrivitoimituksilla* $(1/2)R_1$ *ja* $(1/3)R_2$*. Nyt matriisi on redusoidussa porrasmuodossa:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0. \end{bmatrix} \tag{28}$$

Kuvitellaan nyt, että alkuperäinen matriisi (27) olikin erään lineaarisen yhtälöryhmän LYR täydennetty matriisi. Tällöin LYR on siis yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 4, \\ 3x_2 + 6x_3 = 6, \\ 4x_2 + 7x_3 - x_4 = 8. \end{cases}$$

Yllä oleva lasku osoittaa sen, että tämä yhtälöryhmä on ekvivalentti lineaarisen yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_2 - 2x_4 = 2, \\ x_3 + x_4 = 0, \\ 0 = 0 \end{cases} \tag{29}$$

kanssa, koska juuri tämä yhtälöryhmä vastaa redusoidussa porrasmuodossa olevaa matriisia (28). Yhtälöryhmä on konsistentti, sillä se ei sisällä ristiriitaisia yhtälöitä. Päämuuttujat ovat x_2, x_3 *ja vapaat muuttujat ovat* x_1 *(joka on "näkymätön" koko yhtälöryhmässä) ja* x_4*. Yhtälöryhmästä (29) ratkaistaan suoraan* $x_2 = 2 + 2x_4$ *ja* $x_3 = -x_4$*. Huomaa, että kun yhtälöryhmä on redusoidussa porrasmuodossa, niin päämuuttujien ratkaiseminen vapaiden muuttujien lausekkeina on erityisen helppoa - siirretään vain vapaat muuttujat yhtälön toiselle puolelle. Tämä on juuri se välivaihe, joka vaatisi Gaussin menetelmässä* *lisää laskuja. Gauss-Jordanin menetelmässä nämä laskut hoidetaan välivaiheiden yhteydessä.*

Yhtälöryhmän LYR ratkaisu on

$$\begin{cases} x_1 = s, \\ x_2 = 2 + 2t, \\ x_3 = -t, \\ x_4 = t, \end{cases}$$

missä $s, t \in \mathbb{R}$.

Olkoon M matriisi. Proposition 24 mukaan on olemassa porrasmuodossa oleva matriisi M', joka on riviekvivalentti matriisin M kanssa. Tällainen matriisi M' ei yleensä ole yksikäsitteinen. Tämän näkee jo siitä, että matriisin M' mikä tahansa rivi voidaan kertoa nollasta ja ykkösestä eroavalla vakiolla a (tämä on tyyppiä (II) oleva alkeisrivitoimitus), jolloin saadaan uusi matriisi M'', joka on edelleenkin porrasmuodossa ja riviekvivalentti matriisin M kanssa. Sen sijaan voidaan osoittaa, että Proposition 25 antama *redusoidussa porrasmuodossa* oleva annetun matriisin M kanssa riviekvivalentti matriisi osoittautuu yksikäsitteiseksi.