Topologia II Välikoe 1
Kevät 2014 Pe 28.2.2014

Ohjeita: Tehtävää 1 lukuunottamatta vastaukset kysymyksiin vaativat normaaliin tapaan matemaattisen perustelun. Perusteluissa voi käyttää kaikkia luentojen ja laskuharjoitusten tuloksia, samoin kuin Topologia I:n tietoja.

Tehtävä 1

Alla on kuusi väitettä yleisistä topologisista avaruuksista. Merkitse kunkin väitteen kohdalle onko se mielestäsi tosi vai epätosi. Valintaa ei tarvitse perustella, mutta *jokainen väärä vastaus kumoaa yhden oikean* (maksimipisteet ovat siis 6 ja minipisteet 0). Jos et ole vastauksestasi varma, kannattaa siis harkita kohdan jättämistä tyhjäksi.

(a) Suljettujen joukkojen mielivaltainen yhdiste on suljettu.

(b) Olkoon $\mathcal{B}$ kokoelma X:n osajoukkoja, joka on X:n peite. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen karkein X:n topologia, jossa jokainen $\mathcal{B}$:n jäsen on avoin joukko.

(c) Jos $f : X \to Y$ on kuvaus ja $f\overline{A} = \overline{fA}$ kaikilla $A \subset X$, niin f on jatkuva.

(d) Olkoon $\mathcal{B}$ topologisen avaruuden X kanta. Jos $f : X \to Y$ on kuvaus, jolla $f[B]$ on avoin kaikilla $B \in \mathcal{B}$, niin f on jatkuva.

(e) Olkoon Z topologinen avaruus, X, Y joukkoja ja $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ kuvauksia. Kuvaus g indusoi topologian $\mathcal{T}_Y$ joukkoon Y ja tämän jälkeen f indusoi topologian $\mathcal{T}_X$ joukkoon X. Tällöin $\mathcal{T}_X$ on sama kuin kuvauksen $g \circ f$ indusoima topologia.

(f) Olkoon X joukko ja $g : X \to X$ kuvaus. Oletetaan, että jokaisella $j \in J$, $J \neq \emptyset$, on annettu kuvaus $f_j : X \to Y_j$ topologiseen avaruuteen Y_j ja varustetaan X perheen (f_j) indusoimalla topologialla. Jos löytyy indeksi $j \in J$, jolla $f_j \circ g$ on jatkuva, niin myös g on jatkuva.

Tehtävä 2

Olkoon X topologinen avaruus ja $A \subset X$.

(a) A:n relatiivitopologia on sama kuin erään kuvauksen indusoima topologia. Anna tämän kuvauksen määritelmä, mukaan lukien lähtö- ja maalijoukot ja näihin mahdollisesti liittyvät topologiat.

(b) Jos $U \subset A$ on avoin A:ssa, niin onko se aina avoin myös X:ssä? Entä toisinpäin: jos $U \subset A$ on avoin X:ssä, niin onko se aina avoin myös A:ssa?

(c) Tarkastellaan sitten tapausta $X = \mathbb{R}$ ja $A = \{0\} \cup [1, \infty[$. Määritellään $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaavoilla $f(x) := 0$, jos $x \leq 0$ ja $f(x) := 1 + x$, jos $x > 0$. Onko kuvauksen rajoittuma $f|_A$ upotus?

(*Jokaisesta kohdasta maksimi on kaksi pistettä.*)

(Jatkuu…)

Tehtävä 3

Tarkastellaan joukkoa $X := [0,1]^{\mathbb{R}}$ varustettuna tulotopologialla.

(a) Onko seuraavista X:n osajoukoista jokin avoin: $]0,1[^{\mathbb{R}}$ tai $[0,1]^{\mathbb{R}}$?

(b) Määritellään kuvaus $f : X \to]-1,1]$ kaavalla $f(x) := x(\sqrt{2})$, $x \in X$. Onko se jatkuva?

(c) Reaalilukujen *lattiafunktio* on kuvaus $\lfloor\cdot\rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, joka kuvaa reaaliluvun "alaspäin" lähimmälle kokonaisluvulle, $\lfloor t \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq t\}$, kun $t \in \mathbb{R}$. Määritellään kuvaus $h : X \to X \times X$ asettamalla $h(x) := (h_1(x), h_2(x))$, $x \in X$, jossa

$$h_1(x)(t) := x(t + \lfloor t \rfloor)\,, \quad \text{ja}$$
$$h_2(x)(t) := x(t + \lfloor t \rfloor + 1)\,,$$

kun $x \in X$ ja $t \in \mathbb{R}$. Osoita, että h on homeomorfismi X:n ja tuloavaruuden $X \times X$ välillä.

(*Jokaisesta kohdasta maksimi on kaksi pistettä.*)

Tehtävä 4

Tarkastellaan väliä $X := [-1,1]$. Määritellään $\mathcal{T} := \mathcal{T}_0 \cup \mathcal{T}_1$, jossa

$$\mathcal{T}_0 := \{U \subset X \mid 0 \notin U\} \quad \text{ja} \quad \mathcal{T}_1 := \{U \subset X \mid]-1,1[\subset U\}\,.$$

(a) Osoita, että $\mathcal{T}$ on X:n topologia. (*3 pistettä*. Vihje: Seuraavaan kohtaan voi vastata, vaikkei tätä kohtaa saisikaan valmiiksi.)

(b) Määritä seuraavat kolme joukkoa topologisessa avaruudessa $(X, \mathcal{T})$: $\overline{\{1\}}$, $\operatorname{int}[\frac{1}{2}, 1]$ ja $\partial\{\frac{1}{2}\}$. (*Jokaisesta joukosta yksi piste.*)