Topologia II Harjoitus 13

Kevät 2014 Ma 28.4.2014

Huom: Kurssin 2. välikoe on suunniteltu pidettäväksi **ti 13.5. klo 12-14**, varalla aika **to 8.5. klo 12-14**. *Ilmoitatko luennoitsijalle to 24.4. mennessä, jos haluat tulla kokeeseen, mutta ti 13.5. ei sovi sinulle.* (Kerro samalla sopiiko vara-aika, ja jos ei, jokin muu itsellesi sopiva aika.) Lopullinen aika ja paikka ilmoitetaan kurssin kotisivuilla ma 28.4. mennessä.

Huom 2: Nämä ovat kurssin viimeiset laskuharjoitukset, ja niiden tekoon on käytettävissä kaksi viikkoa. Tehtäviä on tällä kertaa kuusi kappaletta.

Huom 3: Viimeinen luento on ti 29.4. Tällöin on tarkoitus kerrata koealueen asioita ja on myös tilaisuus esittää omia kysymyksiä.

Tehtävä 1

Olkoon X joukko, jossa on kaksi topologiaa $\mathcal{T}$ ja $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}$. Osoita, että jos $(X, \mathcal{T})$ on kompakti ja $(X, \mathcal{T}_1)$ on Hausdorff, niin välttämättä $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}$.

Päättele tästä, että kompakti Hausdorffin topologia on *minimaalinen Hausdorffin topologia*: mikään sitä aidosti karkeampi topologia ei voi enää olla Hausdorff.

(Ohje: Sovella Lausetta 15.18 kuvaukseen $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}_1)$.)

Tehtävä 2

Olkoon $X \neq \emptyset$ kompakti Hausdorffin avaruus ja $f : X \to X$ jatkuva. Osoita, että on olemassa sellainen suljettu $A \subset X$, että $A \neq \emptyset$ ja $fA = A$.

(Vihje: Takastele joukkoja $fX, ffX, fffX, \ldots$.)

Tehtävä 3

Olkoon $X := \prod_{j \in J} X_j$ kompakti ja $X_j \neq \emptyset$ kaikilla $j \in J$. Todista, että jokainen X_j on kompakti.

(Jatkuu. . .)

Tehtävä 4

Kuten aiemmin, merkitään $I := [0,1]$ ja varustetaan se tavallisella topologialla. Olkoon $X \subset I^I$ kasvavien funktioiden joukko, ts. X koostuu niistä kuvauksista $f : I \to I$, joille $f(s) \leq f(t)$ aina kun $s \leq t$. Varustetaan I^I tulotopologialla ja X sen relatiivitopologialla.

(a) Osoita, että X on kompakti.

(b) Olkoon $A := \{f_a \mid a \in I\}$, jossa f_a on pisteessä $a \in I$ hyppäävä askelfunktio:

$$f_a(t) := \begin{cases} 0, & \text{kun } t < a\,, \\ \frac{1}{2}, & \text{kun } t = a\,, \\ 1, & \text{kun } t > a\,. \end{cases}$$

Totea: $A \subset X$. Osoita, että A *ei* ole separoituva.

(c) Onko X metristyvä? (Vihje: Lause 12.21.)

Tehtävä 5

Olkoon X normaali yhtenäinen avaruus ja $\#X \geq 2$. Osoita Urysonin lemman avulla, että $\operatorname{card} X \geq \operatorname{card} \mathbb{R}$.

(On olemassa numeroituvasti äärettömiä yhtenäisiä Hausdorffin avaruuksia, jotka yllä olevan perusteella eivät siis voi olla normaaleja.)

Tehtävä 6

Olkoon $Y := \,]a,b[$, jossa $-\infty < a < b < \infty$, ja varustetaan se tavallisella topologialla. Oletetaan, että X on metristyvä avaruus, A sen suljettu osajoukko ja $f : A \to Y$ on jatkuva. Osoita, että f:llä on olemassa jatkuva jatke $g : X \to Y$. (Tämä tulos osoittaa, että avoimet välit ovat *absoluuttisia retrakteja*, ks. kirjan luku 20.)

(Ohje: Tietzen jatkolause antaa jatkeen $g_1 : X \to [a,b]$. Hae vaadittu jatke muodossa $g(x) = g_1(x)h(x)$, $x \in X$, jossa h saadaan Urysonin lemmaa soveltamalla.)