Topologia II Harjoitus 12

Kevät 2014 Ma 14.4.2014

Huom: Kurssin 2. välikoe on suunniteltu pidettäväksi ke 7.5. klo 12–14. *Ilmoitatko luennoitsijalle ma 14.4. mennessä, jos haluat tulla kokeeseen, mutta tämä aika ei sovi sinulle.* (Kerro samalla itsellesi sopivat ajat.)

Tehtävä 1

Kirjan Lauseen 13.17. todistus "kertauksena" Topologia I:stä

Jos X on topologinen avaruus ja $a \in X$, merkitään X:n a-komponenttia $C(a, X)$:llä, ts. tällöin määritellään

$$C(a, X) := \bigcup \{A \mid a \in A \subset X \text{ ja } A \text{ yhtenäinen}\} \; .$$

Todista seuraavat väitteet käyttäen pelkästään Lausetta 13.17 edeltäviä tuloksia:

(a) $a \in C(a, X)$ kaikilla $a \in X$.

(b) X:n komponentit ovat yhtenäisiä.

(c) X:n komponentit muodostavat X:n osituksen, ts. jokainen piste $a \in X$ kuuluu yhteen ja vain yhteen X:n komponenttiin.

(d) Jokainen yhtenäinen osajoukko $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, sisältyy yhteen ja vain yhteen X:n komponenttiin.

(e) Jos $f : X \to Y$ on jatkuva, niin f kuvaa X:n kunkin komponentin johonkin Y:n komponenttiin. Jos $f : X \approx Y$, niin X:n komponenttien kuvat ovat Y:n komponentit.

Tehtävä 2

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ numeroituva. Osoita, että $\mathbb{R}^2 \setminus A$ on polkuyhtenäinen.

(Vihje: Tutki pisteen $a \in \mathbb{R}^2 \setminus A$ kautta kulkevia suoria.)

Tehtävä 3

Olkoon X lokaalisti yhtenäinen ja separoituva. Osoita, että X:llä on vain numeroituva määrä komponentteja.

(Jatkuu. . .)

Tehtävä 4

Osoita, että yhtenäisyys säilyy karteesisissa tuloissa.

(Ohje: Tee vastaoletus: X_j, $j \in J$, ovat yhtenäisiä, $X := \prod_j X_j$ ja $X = A|B$ on sen separaatio. Valitaan $a \in A$, $b \in B$ ja näille kantaympäristöt $U \subset A$, $V \subset B$. Hae sellaiset $a' \in U$ ja $b' \in V$, että $a'_j \neq b'_j$ vain äärellisen monella j:llä. Jos näitä indeksejä on vain yksi, merkitään tätä j_1:llä. Yhdistä a' ja b' joukolla $\{x \in X \mid x_j = a'_j,\ \text{kun } j \neq j_1\}$. Todista sitten yleinen tapaus induktiolla.)

Tehtävä 5

Kirjan Lauseen 15.3. todistus

Todista seuraava lause käyttäen luvusta 15 pelkästään kompaktisuuden määritelmää:
Olkoon X avaruus ja $A \subset X$. Osoita, että A on kompakti relatiivitopologiassa, jos ja vain jos sen jokaisella X-avoimella peitteellä on äärellinen osapeite.

("X-avoin peite" tarkoittaa kokoelmaa X:n avoimia joukkoja, jotka muodostavat peitteen.)