Topologia II Harjoitus 11

Kevät 2014 Ma 7.4.2014

Tehtävä 1

Osoita, että äärellinen avaruus toteuttaa aina kaikki neljä numeroituvuusaksioomaa. (Eli, jos X on topologinen avaruus ja $\#X < \infty$, niin X on aina N_1, N_2, Lindelöf ja separoituva.)

Tehtävä 2

Todista kirjan Lause 12.11: Ominaisuudet N_1 ja N_2 ovat perinnöllisiä.

(Eli tehtävänä on osoittaa, että jos $j \in \{1, 2\}$, X on N_j-avaruus ja $A \subset X$, niin myös A on N_j-avaruus.)

Tehtävä 3

Oletetaan, että indeksijoukko J on *ylinumeroituva* ja että jokaista $j \in J$ kohti on annettu Hausdorff-avaruus X_j, jossa on vähintään kaksi pistettä. Osoita, että tuloavaruus $X := \prod_{j \in J} X_j$ ei ole N_1, ja päättele tästä, ettei se voi olla metristyvä eikä N_2.

(Ohje: Valitse $a, b \in X$, joilla $a_j \neq b_j$ kaikilla $j \in J$. Olkoon A niiden pisteiden $x \in X$ kokoelma, joilla $x_j = b_j$ äärellisen monella j ja muuten $x_j = a_j$. Osoita, että $b \in \overline{A}$, mutta mikään A:n jono ei suppene kohti pistettä b.)

Tehtävä 4

Varustetaan $I := [0, 1]$ tavallisella topologialla. Olkoon $E := C(I)$ jatkuvien funktioiden $f : I \to \mathbb{R}$ avaruus varustettuna sup-normilla (ks. tehtävä 10.1 ja kirjan kohta 10.16). Osoita, että E on N_2-avaruus.

(Ohje: Osoita ensin, että E on separoituva. Tämän voi tehdä tarkastelemalla I:n tasavälisiä jakoja ja funktioita, jotka saavat jakopisteissä rationaaliarvon ja jotka ovat osaväleillä affiineja, eli muotoa $f(t) = at + b$ joillakin $a, b \in \mathbb{R}$.)

Tehtävä 5

Kirjan Lauseen 13.5 todistus "kertauksena" Topologia I:stä

Todista, että seuraavat ehdot avaruudelle X ovat yhtäpitävät:

(a) X on epäyhtenäinen.
(b) $X = A \cup B$, jossa A ja B ovat erillisiä, suljettuja ja epätyhjiä.
(c) Löytyy $A \subset X$, jolle $\emptyset \neq A \neq X$ ja joka on sekä avoin että suljettu.
(d) On olemassa X:n separaatio $X = A|B$.
(e) On olemassa jatkuva surjektio $f : X \to \{0, 1\}$.