Topologia II Harjoitus 10

Kevät 2014 Ma 31.3.2014

Tehtävä 1

Olkoon $X \neq \emptyset$ joukko, (Y, d) metrinen avaruus ja merkitään rajoitettujen kuvausten $X \to Y$ joukkoa $\operatorname{raj}(X, Y)$. Topologia I:n Lauseen I.2.14 perusteella kuvaus $f : X \to Y$ kuuluu siis joukkoon $\operatorname{raj}(X, Y)$, jos ja vain jos löytyy sellaiset $y \in Y$ ja $r > 0$, että $d(f(x), y) < r$ kaikilla $x \in X$.

(a) Osoita, että kaava

$$e(f, g) := \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)),$$

määrittelee metriikan joukossa $\operatorname{raj}(X, Y)$. (Tätä kutsutaan $\operatorname{raj}(X, Y)$:n *sup-metriikaksi*.)

(b) Osoita, että jos Y on täydellinen, niin $\operatorname{raj}(X, Y)$ on täydellinen sup-metriikassa e.

Tehtävä 2

Todista seuraava väite: Jos X on T_0- ja T_3-avaruus, niin X on säännöllinen.

Tehtävä 3

Oletetaan, että $\mathcal{B}$ on T_0-avaruuden X kanta. Osoita, että $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} \mathcal{P}(\mathcal{B})$. (Näin ollen, jos T_0-avaruudella X on numeroituva kanta, niin joukko X ei voi olla mahtavampi kuin $\mathbb{R}$.)

(Ohje: Määrittele kuvaus $f : X \to \mathcal{P}(\mathcal{B})$ ehdolla "$A \in f(x) \Leftrightarrow x \in A$", ja todista, että f on injektio.)

Tehtävä 4

Olkoon X T_1-avaruus ja $A \subset X$. Osoita, että A on kaikkien ympäristöjensä leikkaus.

Tehtävä 5

Todista, että kirjan esimerkissä 2.11.1 määritelty topologinen avaruus $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{pa}})$ on normaali. (Tätä avaruutta käsiteltiin myös harjoituksessa 2.2.)

(Ohje: Olkoot $A, B \subset \mathbb{R}$ erillisiä ja $\mathcal{T}_{\text{pa}}$-suljettuja. Valitse jokaista $x \in A$ kohti $r(x) > 0$ siten, että väli $[x, x + r(x)[$ ei kohtaa joukkoa B. Näiden välien yhdiste U on A:n ympäristö. Muodosta vastaavalla tavalla B:n ympäristö V ja osoita, että U ja V ovat erilliset.)