Topologia II Harjoitus 9

Kevät 2014 Ma 24.3.2014

Tehtävä 1

Olkoon R ekvivalenssirelaatio avaruudessa X, ja olkoon S ekvivalenssirelaatio avaruudessa Y. Oletetaan, että $f : X \to Y$ on kuvaus, joka toteuttaa ehdon

$$xRx' \quad \Rightarrow \quad f(x)Sf(x'),$$

kaikilla $x, x' \in X$.

(a) Osoita, että on olemassa täsmälleen yksi kuvaus $\hat{f} : X/R \to Y/S$, jolla $\hat{f} \circ p_R = p_S \circ f$.

(b) Osoita, että jos f on jatkuva, niin myös ym. kuvaus $\hat{f}$ on jatkuva.

Tehtävä 2

Osoita, että esimerkin 9.12.6 *projektiivinen taso* on homeomorfinen kohdassa 9.5 määritellyn avaruuden P^2 kanssa.

(Ohje: Korvaa aluksi $[0,1]^2$ joukolla $\bar{B}^2$, kuten 9.12.6:ssa. Määrittele sitten sellainen upotus $f : \bar{B}^2 \to S^2$ ylemmälle pallonpuoliskolle $S^2_+ := \{x \in S^2 \,|\, x_3 \geq 0\}$, että $f(x,y) = (x,y,0)$ kun $(x,y) \in S^1$. Sovella tämän jälkeen edellistä tehtävää.)

Tehtävä 3

Todista kirjan Lause 10.14 (Weierstrassin testi): Olkoon D joukko, E Banachin avaruus (eli täydellinen normiavaruus) ja $u_n : D \to E$, $n \in \mathbb{N}$, kuvauksia. Jos $\|u_n(x)\| \leq M_n$ kaikilla $x \in D$, $n \in \mathbb{N}$, ja sarja $\sum_n M_n$ suppenee, niin sarja $\sum_n u_n$ suppenee tasaisesti D:ssä.

(Ohje: Merkitään $R_n := \sum_{j=n+1}^{\infty} M_j$ ja $s_n(x) := \sum_{j=1}^{n} u_j(x)$. Osoita ensin, että kaikilla $x \in D$ ja $p, n \in \mathbb{N}$ on $\|s_{n+p}(x) - s_n(x)\| \leq R_n$, ja käytä sitten täydellisyyttä.)

(Jatkuu. . .)

Tehtävä 4

Avaruuden X osajoukko A on *harva*, jos $\operatorname{int} \overline{A} = \emptyset$. Sanotaan myös, että $A \subset X$ on *laiha*, jos se on numeroituva yhdiste harvoista joukoista.

Todista seuraavat väitteet:

(a) Laihojen joukkojen numeroituva yhdiste on laiha.
(b) Jos X on täydellinen metrinen avaruus ja jos $A \subset X$ on laiha, niin $\operatorname{int} A = \emptyset$.
(c) Anna esimerkki laihasta joukosta $A \subset \mathbb{R}$, joka ei ole harva.

(Kirjallisuudessa käytetään usein seuraavia (ei järin kuvaavia, mutta silti vakiintuneita) termejä: osajoukko on "ensimmäisen kategorian joukko", jos se on laiha, ja muuten se on "toisen kategorian joukko".)

Tehtävä 5

Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, jolla on kaikkien kertalukujen derivaatat. Oletetaan, että jokaista pistettä $x \in \mathbb{R}$ kohti on olemassa sellainen $n(x) \in \mathbb{N}$, että f:n vastaavan kertaluvun derivaatta häviää tässä pisteessä, eli $f^{(n(x))}(x) = 0$. Osoita, että tällöin jokainen väli $[a, b]$ sisältää välin, jolla f on polynomifunktio.

(Ohje: Käytä Bairen lausetta ja joukkoja $A_k := \{x \in \mathbb{R} \mid f^{(k)}(x) = 0\}$, $k \in \mathbb{N}$.)