Topologia II Harjoitus 8

Kevät 2014 Ma 17.3.2014

Huom: 1. välikoe on nyt korjattu ja tulokset lähetetty kokeeseen osallistuneille sähköpostissa. Oman kokeensa pisteytykseen voi halutessaan käydä tutustumassa vastaanottoaikoina, ti 13–14.

Tehtävä 1

Olkoot X, Y, Z avaruuksia ja $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. Osoita, että jos f on samastuskuvaus ja $g \circ f$ on jatkuva, niin myös g on jatkuva.

Tehtävä 2

Olkoon A suljettu väli $[0, 1]$. Osoita, että $\mathbb{R}/A \approx \mathbb{R}$.

(Muistutus: Kun X on topologinen avaruus ja $A \subset X$ epätyhjä, notaatio "X/A" tarkoittaa topologista avaruutta, joka saadaan luhistamalla osajoukko A yhdeksi pisteeksi; ts. sellaisen osituksen tekijätopologiaa, jossa A on yksi osituksen jäsenistä ja muina jäseninä ovat yksiöt $\{x\}$, $x \notin A$.)

Tehtävä 3

(a) Olkoon X Hausdorffin avaruus. Osoita, että jos $x \in X$, niin $\{x\}$ on suljettu.

(b) Olkoon X Hausdorffin avaruus ja $A \subset X$. Osoita, että kun A varustetaan relatiivitopologialla, myös se on Hausdorffin avaruus.

(c) Olkoon X jokin topologinen avaruus ja $A \subset X$. Osoita, että jos $\{A\}$ on suljettu tekijäavaruudessa X/A, niin A on suljettu X:ssä.

(d) Olkoon $A :=]0, 1[\subset \mathbb{R}$. Osoita, että tekijäavaruus $\mathbb{R}/A$ ei ole Hausdorff ja päättele tästä, että $\mathbb{R}/A \not\approx \mathbb{R}$.

(Tehtävä osoittaa, että Hausdorffisuus on topologinen ominaisuus, joka periytyy osajoukkojen relatiivitopologialle, mutta ei välttämättä niiden "luhistumille".)

(Jatkuu. . .)

Tehtävä 4

Olkoon $n \in \mathbb{N}$ annettu ja palautetaan mieleen merkinnät avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljetulle yksikkökuulalle $\bar{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ ja yksikköpallolle $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$. Osoita, että $\bar{B}^n/S^{n-1} \approx S^n$ konstruoimalla jatkuva $f : \bar{B}^n \to S^n$, jolla $\bar{B}^n/S^{n-1}$ on relaatiota R_f vastaava ositus kuvauksen f kanonisessa hajotelmassa. (Vihje: Tapaus $n = 1$ on oleellisesti sama kuin kirjan esimerkki 9.12.1.)

Tehtävä 5

Avaruuden X *suspensio* on avaruus $\operatorname{Susp}(X) := (X \times J)/R$, jossa $J := [-1, 1]$ on väli varustettuna tavallisella topologialla ja R on ekvivalenssirelaatio, jonka luokkia ovat $X \times \{-1\}$, $X \times \{1\}$ ja yksiöt $\{z\}$, $z \in X \times \,]-1, 1[$. Osoita, että $\operatorname{Susp}(S^{n-1}) \approx S^n$.