

Muistutus: Viikolla 10 ei ole luentoja eikä laskuharjoituksia. Seuraavan periodin ensimmäinen luento ja laskuharjoitustilaisuus pidetään ma 10.3.

Tehtävä 1

Olkoon X avaruus ja $A \subset X$. Kuten harjoitustehtävässä 6.5, merkitään A :n karakteristista funktiota χ_A :lla. Osoita, että

$$\partial A = \{x \in X \mid \chi_A \text{ on epäjatkuva pisteessä } x\}.$$

Tehtävä 2

Olkoon $f : X \rightarrow Y$ ja $g : Y \rightarrow X$ jatkuvia kuvauksia, joille $g \circ f = \text{id}$. Osoita, että f on upotus ja g on samastuskuvaus.

Tehtävä 3

Kuvausta $f : X \rightarrow Y$ kutsutaan *vakiokuvaukseksi*, jos löytyy sellainen $y_0 \in Y$, että $f(x) = y_0$ kaikilla $x \in X$.

- Jos $Y \neq \emptyset$ on avaruus ja X on joukko, niin mikä on kaikkien vakiokuvausten $X \rightarrow Y$ indusoima X :n topologia?
- Jos X on avaruus ja $Y \neq \emptyset$ on joukko, niin mikä on kaikkien vakiokuvausten $X \rightarrow Y$ koindusoima Y :n topologia?

Tehtävä 4

Olkoon (X, \mathcal{T}) topologinen avaruus ja \mathcal{A} epättyhjä kokoelma X :n osajoukkoja. Varustetaan kukin $A \in \mathcal{A}$ joukon relatiivitopologialla $\mathcal{T}|_A$. Tällöin inklusiokuvaudet $j_A : A \hookrightarrow X$, jossa $A \in \mathcal{A}$, koindusoivat joukkoon X topologian \mathcal{T}' .

- Osoita, että $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.
- Osoita, että $\mathcal{T}'|_A = \mathcal{T}|_A$ kaikilla $A \in \mathcal{A}$.
- Anna esimerkki, jossa $\mathcal{T}' \neq \mathcal{T}$.
- Osoita, että $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$, jos $X = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ja \mathcal{A} on kaikkien X :n kompaktien osajoukkojen kokoelma.

Tehtävä 5

Olkoot X_1, X_2 avaruuksia ja $A_1 \subset X_1$, $A_2 \subset X_2$. Osoita, että tällöin tuloavaruuden $X_1 \times X_2$ osajoukkoina pätee

$$\begin{aligned} \partial(A_1 \times A_2) &= (\partial A_1 \times \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} \times \partial A_2), \\ \text{int}(A_1 \times A_2) &= (\text{int } A_1) \times (\text{int } A_2). \end{aligned}$$