**Topologia II** Harjoitus 6

Kevät 2014 Ma 24.2.2014

**Muistutus:** 1. välikoe pidetään pe 28.2. klo 9:00–11:00 **salissa D122**. Kokeeseen tulevat aiheet ja muita lisätietoja laitetaan kurssin kotisivuille lähipäivinä. Hyväksyttyyn suoritukseen vaaditaan molemmista välikokeista erikseen vähintään $\frac{1}{3}$ maksimipisteistä.

## Tehtävä 1

Tarkastellaan rajoitettujen reaalilukujonojen kokoelmaa,

$$\ell_\infty := \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\} .$$

Topologia I:ssä (kohta 1.7) on osoitettu, että $\|x\| := \sup_n |x_n|$ määrittelee normin joukkoon $\ell_\infty$. Merkitään tämän normin määräämää $\ell_\infty$:n topologiaa $\mathcal{T}_{\text{sup}}$.

Koska $\ell_\infty \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, voidaan siinä määritellä myös relatiivitopologia $\mathcal{T}$, jonka se perii $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:n tulotopologiasta. Osoita, että tämä relatiivitopologia on aidosti karkeampi kuin $\ell_\infty$:n normitopologia, $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}_{\text{sup}}$.

## Tehtävä 2

Kuvauksen $f : X \to Y$ *kuvaaja* eli *graafi* on $X \times Y$:n osajoukko

$$\mathcal{G}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} .$$

Osoita, että jos $f : X \to Y$ on jatkuva, niin $\mathcal{G}(f)$ on tuloavaruuden $X \times Y$ osajoukko, joka on homeomorfinen $X$:n kanssa.

## Tehtävä 3

*Todista Lauseen 7.14 kohta (2)*: Olkoon $X := \prod_{j \in J} X_j$ tuloavaruus ja jokaisella $j \in J$ annettu $A_j \subset X_j$. Merkitään $A := \prod_{j \in J} A_j \subset X$. Osoita, että $\overline{A} = \prod_{j \in J} \overline{A}_j$.

(Tehtävässä on siis tarkoitus osoittaa, että $\mathrm{cl}_X A$ ja $\prod_{j \in J} (\mathrm{cl}_{X_j} A_j)$ ovat sama $X$:n osajoukko, *käyttäen pelkästään Lausetta 7.14 edeltäviä tuloksia*, eli tulotopologian perusominaisuuksia.)

(Jatkuu. . . )

## Tehtävä 4

Olkoot $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mielivaltaisia funktioita. Tarkastellaan tuloavaruutta $X := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ja yhtälön $F(x)_t := g(t)x_{h(t)}$, $t \in \mathbb{R}$, määrittelemää kuvausta $F : X \to X$. Osoita, että $F$ on jatkuva tulotopologiassa. (Vihje: Lause 7.10.)

## Tehtävä 5

Kun $X$ on joukko ja $A \subset X$, kutsutaan kuvausta $\chi_A : X \to \mathbb{R}$, jolle $\chi_A(x) = 1$, kun $x \in A$, ja $\chi_A(x) = 0$, kun $x \notin A$, *joukon $A$ karakteristiseksi funktioksi.*

Olkoon $Y$ tuloavaruus $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ja $F := \{\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid A \subset \mathbb{R}, A \text{ on äärellinen}\} \subset Y$.

(a) Osoita, että vakiofunktio $g$, jolle $g(x) = 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, kuuluu $F$:n sulkeumaan.

(b) Osoita, ettei mikään $F$:n jono suppene kohti $g$:tä.

(c) Päättele, ettei $Y$:n topologia voi olla minkään metriikan määräämä.

(d) Konstruoi epäjatkuva kuvaus $f : F \cup \{g\} \to \mathbb{R}$, jolla $f(x_n) \to f(x)$ aina kun $x_n \to x$ joukossa $F \cup \{g\}$.