Topologia II Harjoitus 5

Kevät 2014 Ma 17.2.2014

Huom: Kurssin 1. välikoe pidetään pe 28.2. klo 9–11. Sali ilmoitetaan myöhemmin.

Tehtävä 1

Perhe kuvauksia $f_j : X \to Y_j$, $j \in J$, *erottelee* X*:n pisteet* (*engl. separates points in* X), jos jokaista $x, y \in X$, $x \neq y$, kohti löytyy sellainen $j \in J$, että $f_j(x) \neq f_j(y)$.

Oletetaan, että on annettu joukko X ja joukon $J \neq \emptyset$ indeksoimat Hausdorffin avaruudet Y_j ja kuvaukset $f_j : X \to Y_j$, $j \in J$. Osoita, että perheen $(f_j)_{j \in J}$ joukkoon X indusoima topologia on Hausdorff, jos ja vain jos kuvausperhe erottelee X:n pisteet.

Tehtävä 2

Olkoon $\mathcal{T}_{f,g}$ kahden annetun kuvauksen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tavallisesta topologiasta joukkoon $\mathbb{R}$ indusoima topologia. Onko $\mathcal{T}_{f,g}$ Hausdorff, kun $f(x) := x^2$, $x \in \mathbb{R}$, ja

(a) $g(x) := -x^2$, $x \in \mathbb{R}$?

(b) $g(x) := (x-1)^2$, $x \in \mathbb{R}$?

Todista vastauksesi.

Tehtävä 3

Olkoon X topologinen avaruus. Osoita, että kaikkien jatkuvien kuvausten $f : X \to X$ kokoelma indusoi X:ään sen alkuperäisen topologian.

Tehtävä 4

Olkoot X, Y ja Z topologisia avaruuksia. Osoita, että $X \times Y \times Z \approx (X \times Y) \times Z$.

(Jatkuu...)

Tehtävä 5

Olkoon E normiavaruus, jonka kerroinkunta on $\mathbb{R}$, ja E^* sen duaaliavaruus (eli kaikkien jatkuvien lineaarikuvausten $E \to \mathbb{R}$ kokoelma). Topologia I:ssä on osoitettu (Lause 15.21), että

$$\|\varphi\|_{E^*} := \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |\varphi(x)|$$

määrittelee normin joukkoon E^* (erityisesti tämä luku on siis äärellinen kaikilla $\varphi \in E^*$). Tämän normin määräämää topologiaa kutsutaan E^*:n *normitopologiaksi*.

Toinen topologia duaaliavaruuteen saadaan indusoimalla se kuvausperheestä $(f_x)_{x \in E}$, jossa $f_x : E^* \to \mathbb{R}$ määritellään kaavalla $f_x(\varphi) := \varphi(x)$. Tästä topologiasta käytetään nimitystä *heikko tähtitopologia* (*engl. weak-$*$ topology*).

(a) Osoita, että heikko tähtitopologia on karkeampi kuin E^*:n normitopologia. (Vihje: Kahden normiavaruuden välinen lineaarikuvaus on jatkuva, jos ja vain jos se on "rajoitettu". Yksityiskohdat voi tarvittaessa "kerrata" lukemalla Topologia I:n Luvusta 15 kaksi ensimmäistä sivua.)

(b) Kun $F \subset E$, kerätään joukkoon I_F kaikki kuvausparit (g, ε), jossa $g : F \to \mathbb{R}$ ja $\varepsilon : F \to]0, \infty[$. Määritellään lisäksi jokaista paria $(g, \varepsilon) \in I_F$ kohti joukko

$$B_F(g, \varepsilon) := \{\varphi \in E^* \mid |\varphi(x) - g(x)| < \varepsilon(x) \text{ kaikilla } x \in F\} .$$

Osoita, että kokoelma $\mathcal{B} := \{B_F(g, \varepsilon) \mid F \subset E,\ F \text{ on äärellinen ja epätyhjä}, (g, \varepsilon) \in I_F\}$ on heikon tähtitopologian kanta.