Topologia II Harjoitus 3

Kevät 2014 Ma 3.2.2014

Huom: Tehtävä 6* on taas "vapaaehtoinen lisätehtävä", kuten harjoituksissa 1.

Tehtävä 1

Olkoon $f : X \to Y$ kuvaus ja oletetaan, että on annettu indeksijoukko $J \neq \emptyset$ ja perheet osajoukkoja $A_j \subset X$ ja $B_j \subset Y$, $j \in J$. Johda seuraavat säännöt, jotka pätevät osajoukkoperheiden yhdisteille ja leikkauksille.

(a) $f^{\leftarrow}\big(\bigcup_{j\in J} B_j\big) = \bigcup_{j\in J} f^{\leftarrow}(B_j)$ ja $f^{\leftarrow}\big(\bigcap_{j\in J} B_j\big) = \bigcap_{j\in J} f^{\leftarrow}(B_j)$.

(b) $f\big(\bigcup_{j\in J} A_j\big) = \bigcup_{j\in J} f(A_j)$.

(c) $f\big(\bigcap_{j\in J} A_j\big) \subset \bigcap_{j\in J} f(A_j)$. Lisäksi $f\big(\bigcap_{j\in J} A_j\big) = \bigcap_{j\in J} f(A_j)$, jos f on injektio.

Tehtävä 2

Olkoon $f : X \to Y$ homeomorfismi topologisten avaruuksien X ja Y välillä. Todista, että seuraavat väitteet pätevät tällöin mille tahansa osajoukolle $A \subset X$:

(a) $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$.

(b) $\operatorname{int} f(A) = f(\operatorname{int} A)$.

(c) $\operatorname{ext} f(A) = f(\operatorname{ext} A)$.

(d) $\partial f(A) = f(\partial A)$.

(Tässä on siis tarkoitus osoittaa, että homeomorfismi säilyttää tärkeimmät "topologiset ominaisuudet". Vihje: kannattaa käyttää apuna luennoilla ja laskareissa todistettuja lauseita, sekä edeltäviä tuloksia.)

Tehtävä 3

Määritellään kuvaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaavalla $f(x) := -x$ käyttäen $\mathbb{R}$:n tavallisia laskusääntöjä. Onko f jatkuva, kun sekä lähtö että maali varustetaan tehtävän 2.2 topologialla $\mathcal{T}_{\text{pa}}$?

Tehtävä 4

Oletetaan, että $n \geq 1$ ja että joukko $D \subset \mathbb{R}^n$ sisältää origon $\mathbf{0}$ ja on avoin, rajoitettu ja *konveksi* (eli aina kun $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ ja $t \in [0,1]$, niin myös $(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} \in D$). Perustele miksi $\mathbf{0} \notin \partial D$. Näin ollen, voimme määritellä kuvauksen $f : \partial D \to S^{n-1}$ kaavalla $f(\mathbf{x}) := \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$. Osoita, että f on homeomorfismi. (Vihje: Tehtävässä kannattaa käyttää mahdollisimman tehokkaasti hyödyksi Topologia I:ssä todistettuja normiavaruuksien ja $\mathbb{R}^n$:n ominaisuuksia, kuten kompaktien joukkojen luokittelua. Selkeyden vuoksi on $\mathbb{R}^n$:n vektorit lihavoitu yllä.)

(Jatkuu. . .)

Tehtävä 5

Määritellään $\mathcal{T} := \{\emptyset\} \cup \{U \subset \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ on numeroituva}\}$. Osoita, että $\mathcal{T}$ on joukon $\mathbb{R}$ topologia ja merkitään näin saatua topologista avaruutta symbolilla X. Todista seuraavat väitteet:

(a) X:n jono (x_n) suppenee kohti pistettä a, jos ja vain jos on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että $x_n = a$ kaikilla $n \geq n_0$.
(b) Piste 0 kuuluu välin $A := [1, 2]$ sulkeumaan X:ssä, mutta mikään A:n jono ei suppene kohti 0:aa.
(c) Olkoon $f : X \to Y$ mielivaltainen kuvaus topologiseen avaruuteen Y. Osoita, että jos jono $x_n \to a$, niin $f(x_n) \to f(a)$.
(d) Etsi epäjatkuva kuvaus $f : X \to Y$ johonkin topologiseen avaruuteen Y. (Näin ollen edellisen kohdan jonoehto ei takaa kuvauksen jatkuvuutta topologiassa $\mathcal{T}$.)

Tehtävä 6*

Filtterikannat (vapaaehtoinen lisätehtävä)

Olkoon X topologinen avaruus. Kokoelma $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ on *filtterikanta*, jos se toteuttaa ehdot:

(1) $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
(2) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
(3) Jos $A, B \in \mathcal{F}$, niin löytyy $C \in \mathcal{F}$, jolla $C \subset A \cap B$.

Sanotaan, että filtterikanta $\mathcal{F}$ *suppenee kohti pistettä* $a \in X$, jos jokaista a:n ympäristöä U kohti löytyy $A \in \mathcal{F}$, jolla $A \subset U$.

Oletetaan, että on annettu kuvaus $f : X \to Y$ topologisten avaruuksien X ja Y välillä. Todista seuraavat väitteet:

(a) Jos $a \in X$, niin a:n ympäristöt muodostavat filtterikannan, joka suppenee kohti pistettä a.
(b) Jos $\mathcal{F}$ on filtterikanta X:ssä, niin kokoelma $\{f(A) \mid A \in \mathcal{F}\}$ on filtterikanta Y:ssä.
(c) Jos f on jatkuva pisteessä $a \in X$ ja $\mathcal{F}$ on filtterikanta, joka suppenee kohti pistettä a, niin $\{f(A) \mid A \in \mathcal{F}\}$ suppenee kohti pistettä $f(a)$.
(d) Kääntäen: Jos $a \in X$ ja jokaisella pistettä a kohti suppenevalla filtterikannalla $\mathcal{F}$ filtterikanta $\{f(A) \mid A \in \mathcal{F}\}$ suppenee kohti pistettä $f(a)$, niin f on jatkuva pisteessä a.