Topologia II Harjoitus 2

Kevät 2014 Ma 27.1.2014

Tehtävä 1

Olkoot d ja e joukon X metriikkoja ja $\mathcal{T}_d$ ja $\mathcal{T}_e$ niiden avaruuteen X määrittelemät topologiat.

(a) Osoita, että jos on olemassa vakio $c > 0$, jolla $d(x, y) \leq ce(x, y)$ kaikilla $x, y \in X$, niin tällöin $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_e$.

(b) Metriikat d ja e ovat *vahvasti ekvivalentit*, jos löytyy $a, b > 0$ siten, että

$$ad(x, y) \leq e(x, y) \leq bd(x, y)\,, \quad \text{kaikilla } x, y \in X\,.$$

Osoita, että vahvasti ekvivalentit metriikat ovat topologisesti ekvivalentteja, eli ne määräävät saman topologian.

Tehtävä 2

Kuten kirjan esimerkissä 2.11., voidaan joukkoon $\mathbb{R}$ määritellä topologia $\mathcal{T}_{\mathrm{pa}}$ käyttäen sen kantana kokoelmaa $\mathcal{B} := \{\, [a, b[\mid a < b\}$. Ratkaise seuraavat tehtävät topologisessa avaruudessa $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{pa}})$.

(a) Osoita, että väli $[a, b[$ on avoin ja suljettu kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$, joille $a < b$.

(b) Määritä välin $]0, 1[$ sulkeuma ja reuna.

Tehtävä 3

Alla on määritelty kolme kokoelmaa $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, 3$:

(1) $\mathcal{B}_1 := \{\,]x - 1, x + 1[\mid x \in \mathbb{R}\}$,

(2) $\mathcal{B}_2 := \{\, [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \mid n \in \mathbb{N}\}$,

(3) $\mathcal{B}_3 := \{\,]a, b[\cup]c, \infty[\mid a < b < c\}$.

Mitkä näistä kokoelmista ovat jonkin $\mathbb{R}$:n topologian kantoja? Myönteisessä tapauksessa tutki saatua topologiaa $\mathcal{T}$ ja vastaa seuraaviin kysymyksiin:

(a) Onko $\mathcal{T}$ karkeampi, hienompi tai sama kuin $\mathbb{R}$:n tavallinen topologia?

(b) Mikä on välin $]0, 1[$ sulkeuma?

(Jatkuu. . .)

Tehtävä 4

Mikä on $\mathbb{R}^3$:n tasojen joukkoon $\mathbb{R}^3$ virittämä topologia?

Tehtävä 5

Järjestystopologia

Joukon H relaatio "$\leq$" on *järjestys*, jos kaikilla $a, b, c \in H$ pätee

(1) $a \leq a$.
(2) Jos $a \leq b$ ja $b \leq a$, niin $a = b$. (Eli $a \leq b \leq a \Rightarrow a = b$.)
(3) Jos $a \leq b$ ja $b \leq c$, niin $a \leq c$. (Eli $a \leq b \leq c \Rightarrow a \leq c$.)

Järjestys on *täysi*, jos lisäksi jokaisella $a, b \in H$ pätee $a \leq b$ tai $b \leq a$. Jos $a \leq b$ ja $a \neq b$, merkitään $a < b$. Lisäksi määritellään analogisesti $\mathbb{R}$:n välien kanssa H osajoukko $[a, b] := \{x \in H \,|\, a \leq x \leq b\}$, aina kun $a \leq b$, ja tämän avulla, jos $a < b$,

$$]a, b[:= [a, b] \setminus \{a, b\}\,, \quad]a, b] := [a, b] \setminus \{a\}\,, \quad [a, b[:= [a, b] \setminus \{b\}\,.$$

(Huomaa, että voi olla $]a, b[= \emptyset$, vaikka $a < b$.)

Oletetaan, että H on vähintään kaksialkioinen joukko, jossa on annettu täysi järjestys "$\leq$" ja määritellään $\mathcal{B} := \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ käyttäen seuraavia kokoelmia:

(1) $\mathcal{B}_0 := \{\,]a, b[\;|\; a < b\}$.
(2) $\mathcal{B}_1 := \{\,]a, M] \;|\; a \in H, a \neq M\}$, jos joukossa H on olemassa *suurin alkio* M (eli alkio, jolle $a \leq M$ kaikilla $a \in H$). Muuten olkoon $\mathcal{B}_1 := \emptyset$.
(3) $\mathcal{B}_2 := \{\, [m, b[\;|\; b \in H, b \neq m\}$, jos joukossa H on olemassa *pienin alkio* m (eli alkio, jolle $m \leq a$ kaikilla $a \in H$). Muuten olkoon $\mathcal{B}_2 := \emptyset$.

Todista seuraavat väitteet:

(a) Oletetaan, että $a_1 \leq b_1$ ja $a_2 \leq b_2$. Määritellään $a := a_1$, jos $a_1 \geq a_2$, ja muuten asetetaan $a := a_2$ (eli $a := \max(a_1, a_2)$). Määritellään myös $b := b_1$, jos $b_1 \leq b_2$, ja muuten $b := b_2$ (eli $b := \min(b_1, b_2)$). Osoita, että

$$[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] = \begin{cases} [a, b]\,, & \text{jos } a \leq b\,, \\ \emptyset\,, & \text{muuten}\,. \end{cases}$$

(b) Osoita, että $\mathcal{B}$ on erään H:n topologian $\mathcal{T}_{\leq}$ kanta. (Näin määriteltyä topologiaa kutsutaan järjestyksen "$\leq$" joukkoon H määräämäksi *järjestystopologiaksi*. Vihje: tehtävä yksinkertaistuu käyttämällä kohdan (a) tulosta.)
(c) Osoita, että joukot $\{x \in H \,|\, x < a\}$ ja $\{x \in H \,|\, x > a\}$ ovat avoimia järjestystopologiassa kaikilla $a \in H$.
(d) Osoita, että $(H, \mathcal{T}_{\leq})$ on Hausdorffin avaruus.