Topologia II Harjoitus 1

Kevät 2014 Ma 20.1.2014

Huom: Tehtävä 6* on vapaaehtoinen lisätehtävä. Näin ollen laskuharjoituksista 0 ja 1 on mahdollista kerryttää kymmenen tehtävämerkintää (rastia) vaikka "maksimi" on viisi.

Tehtävä 1

Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Topologia I:ssä on määritelty, että joukko $A \subset X$ on avoin, jos jokaista $x \in A$ kohti on olemassa sellainen $r > 0$, että avoin kuula $B(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$ sisältyy A:han. Olkoon $\mathcal{T}_d$ tällaisten avointen joukkojen A kokoelma. Varmista (kertaa Topologia I:stä), että $\mathcal{T}_d$ täyttää X:n topologialta vaadittavat ehdot (T1)–(T3).

Tehtävä 2

Diskreetti topologia

Olkoon X epätyhjä ja määritellään $\mathcal{T}_{\text{dis}} := \mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}$.

(a) Osoita, että $\mathcal{T}_{\text{dis}}$ on X:n topologia.

(b) Määritellään kuvaus $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ seuraavasti: $d(x, y) = 0$, jos $x = y$, ja $d(x, y) = 1$, jos $x \neq y$. Osoita, että d on metriikka. Kuten yllä selitetään, generoi d topologian $\mathcal{T}_d$ joukkoon X. Osoita, että $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{\text{dis}}$.

(c) Metristen avaruuksien kompaktit joukot määriteltiin Topologia I:ssä. Osoita, että nyt $A \subset X$ on kompakti, jos ja vain jos $\#A < \infty$.

(Jos $X = \emptyset$, niin $\mathcal{T}_{\text{dis}} := \mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$. Tällöin siis $\mathcal{T}_{\text{dis}} = \mathcal{T}_{\text{mini}}$, joten Harjoitus 0.3:n mukaan myös tämä erikoistapaus antaa joukon X topologian. Tyhjä joukko suljettiin yllä pois, jotta se ei olisi lisännyt turhaan erikseen tarkasteltavaa erikoistapausta.)

Tehtävä 3

Olkoon $f : X \to Y$ kuvaus.

(a) Osoita, että $f^{\leftarrow}(f(A)) \supset A$ kaikilla $A \subset X$. Osoita lisäksi, että $f^{\leftarrow}(f(A)) = A$, jos f on injektio.

(b) Osoita, että $f(f^{\leftarrow}(B)) = B \cap f(X) \subset B$ kaikilla $B \subset Y$. Näin ollen $f(f^{\leftarrow}(B)) = B$, jos f on surjektio.

Tehtävä 4

Olkoon X topologinen avaruus ja $A \subset X$. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät

(a) A on tiheä X:ssä.

(b) A kohtaa X:n jokaisen avoimen epätyhjän osajoukon.

(c) $\operatorname{int} \complement A = \emptyset$.

(Jatkuu. . .)

Tehtävä 5

Olkoon X topologinen avaruus ja $A \subset X$. Todista seuraavat väitteet:

(a) $\partial\partial A \subset \partial A$.

(b) Jos A on suljettu, niin $\partial\partial A = \partial A$.

(c) Aina $\partial\partial\partial A = \partial\partial A$.

Osoita esimerkillä $X := \mathbb{R}$, $A := \mathbb{Q}$, että (a)-kohdassa ei aina päde yhtäsuuruus.

Tehtävä 6*

(vapaaehtoinen lisätehtävä)

Oppikirjan kohdassa 1.16. on mainittu kaksi historiallista vaihtoehtoista tapaa määritellä topologinen avaruus. Tässä tehtävässä on tarkoitus osoittaa, että näistä jälkimmäinen, joka käyttää K. Kuratowskin aksiomeja, on yhtäpitävä kirjassa käytetyn topologisen avaruuden määritelmän kanssa.

Jos $\mathcal{T}$ on joukon X topologia, niin Lauseen 1.12. mukaan kuvaus $A \mapsto \overline{A}$ toteuttaa

(K1) $A \subset \overline{A}$.

(K2) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

(K3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(K4) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

(Lauseen 1.8. perusteella $\emptyset$ on suljettu, joten (K4) seuraa soveltamalla Lauseen 1.12. kohtaa 6.)

Osoita, että myös käänteinen tulos pätee: jos X on joukko ja $A \mapsto \overline{A}$ on kuvaus $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, joka toteuttaa aksiomat (K1)–(K4), niin tällöin kokoelma

$$\mathcal{T} := \left\{ V \subset X \,\middle|\, \overline{\complement V} = \complement V \right\}$$

on X:n topologia ja jokaisen joukon $A \subset X$ sulkeuma topologiassa $\mathcal{T}$ on sama kuin $\overline{A}$.