Topologia II Harjoitus 0

Kevät 2014 Ma 13.1.2014

Tehtävä 1

Olkoon X mielivaltainen joukko. Oletetaan, että $J \neq \emptyset$ on indeksijoukko kokoelmalle A_j, $j \in J$, X:n osajoukkoja. Osoita, että tällöin kaikilla $B \subset X$ pätee

$$B \cap \Big(\bigcup_{j \in J} A_j \Big) = \bigcup_{j \in J} (B \cap A_j) \ .$$

Tehtävä 2

Olkoot X, Y, Z joukkoja ja $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ niiden välisiä kuvauksia. Osoita, että tällöin

(a) $(g \circ f)(A) = g(f(A))$ kaikilla $A \subset X$.
(b) $(g \circ f)^{\leftarrow}(C) = f^{\leftarrow}(g^{\leftarrow}(C))$ kaikilla $C \subset Z$.

Tehtävä 3

Minitopologia

Olkoon X joukko ja määritellään $\mathcal{T}_{\mathrm{mini}} := \{\emptyset, X\}$.

(a) Osoita, että $\mathcal{T}_{\mathrm{mini}}$ on X:n topologia.
(b) Onko aina $\#\mathcal{T}_{\mathrm{mini}} = 2$? (Eli onko joukossa aina kaksi alkiota?)
(c) Oletetaan lisäksi, että $\#X \geq 2$ ja että $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ on metriikka. Etsi metriikan d avoin kuula, joka ei kuulu joukkoon $\mathcal{T}_{\mathrm{mini}}$. (Näin ollen vähintään kaksialkioisen joukon minitopologia ei ole metristyvä.)

Tehtävä 4

Olkoot X, Y joukkoja ja $f : X \to Y$ kuvaus niiden välillä. Osoita, että tällöin kaikilla $B \subset Y$

$$f^{\leftarrow}(\complement B) = \complement f^{\leftarrow}(B) \,.$$