Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I, kevät 2014
Harjoitus 20.1. alkavalle viikolle
Ratkaisuja (TT)

1. Määritteleekö yhtälö $|(x,y)|^* = 2|x| + 3|y|$ normin vektoriavaruuteen $\mathbb{R}^2$?

   Ratkaisu. Käymme läpi normin ehdot N0-N3 ja huomaamme, että kyseessä on normi. Ehto N0 on normin positiivisuus, jota ei Väisälän kirjassa luetteloida näin.

   (N0) Kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ pätee $2|x| + 3|y| \geq 0$.

   (N1) Olkoot $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$. Nyt

   $$|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)|^* = |(x_1 + x_2, y_1 + y_2)|^* = 2|x_1 + x_2| + 3|y_1 + y_2|,$$

   ja kolmioepäyhtälöä hyödyntäen saamme

   $$\begin{aligned} 2|x_1 + x_2| + 3|y_1 + y_2| &\leq 2(|x_1| + |x_2|) + 3(|y_1| + |y_2|) \\ &= 2|x_1| + 3|y_1| + 2|x_2| + 3|y_2| = |(x_1, y_1)|^* + |(x_2, y_2)|^*. \end{aligned}$$

   Siis

   $$|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)|^* \leq |(x_1, y_1)|^* + |(x_2, y_2)|^*.$$

   (N2) Olkoot $x, y, r \in \mathbb{R}$. Käyttämällä tuttuja reaalilukujen ominaisuuksia näemme, että

   $$|r(x,y)|^* = |(rx, ry)|^* = 2|rx| + 3|ry| = 2|r||x| + 3|r||y| = |r|(2|x| + 3|y|) = |r||(x,y)|^*.$$

   (N3) Jos $|(x,y)|^* = 0$, niin $2|x| + 3|y| = 0$. Koska summattavat ovat epänegatiivisia, tämä on mahdollista vain kun $2|x| = 0$ ja $3|y| = 0$, mikä puolestaan toteutuu vain jos $x = 0 = y$.

2. Määritteleekö yhtälö $|(x,y)|^* = 2|x| \vee 3|y|$ normin vektoriavaruuteen $\mathbb{R}^2$?

   Ratkaisu. Luennolla käsittelimme jo normia $\|(x,y)\| = |x| \vee |y|$. Ratkaisemme tehtävän samoilla menetelmillä. Tehtävän voisi myös palauttaa tähän yhteyden $|(x,y)|^* = \|(2x, 3y)\|$ avulla.

   (N0) Kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ pätee $2|x| \geq 0$, joten tietysti $2|x| \vee 3|y| \geq 0$.

   (N1) Olkoot $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$. Nyt

   $$|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)|^* = |(x_1 + x_2, y_1 + y_2)|^* = 2|x_1 + x_2| \vee 3|y_1 + y_2|,$$

   ja kolmioepäyhtälön avulla saamme

   $$2|x_1 + x_2| \vee 3|y_1 + y_2| \leq 2(|x_1| + |x_2|) \vee 3(|y_1| + |y_2|)$$

   Tehtävänannossa määritellyn yhtälön mukaan indeksillä $j \in \{1, 2\}$ pätee erityisesti $2|x_j| \leq |(x_j, y_j)|^*$ ja $3|y_j| \leq |(x_j, y_j)|^*$. Siten

   $$2(|x_1| + |x_2|) \vee 3(|y_1| + |y_2|) \leq |(x_1, y_1)|^* + |(x_2, y_2)|^*,$$

   koska molempia termejä symbolin $\vee$ molemmin puolin voidaan arvioida ylöspäin lausekkeella $|(x_1, y_1)|^* + |(x_2, y_2)|^*$, ja siis

   $$|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)|^* \leq |(x_1, y_1)|^* + |(x_2, y_2)|^*.$$

(N2) Olkoot $x, y, r \in \mathbb{R}$. Käyttämällä tuttuja reaalilukujen ominaisuuksia näemme, että

$$|r(x,y)|^* = |(rx,ry)|^* = 2|rx| \vee 3|ry| = 2|r||x| \vee 3|r||y| = |r|(2|x| \vee 3|y|) = |r||(x,y)|^*,$$

sillä positiivisella luvulla kertominen ei muuta lukujen suuruusjärjestystä.

(N3) Jos $|(x,y)|^* = 0$, niin $2|x| \vee 3|y| = 0$. Koska molemmat termit ovat epänegatiivisia, tämä on mahdollista vain kun $2|x| = 0$ ja $3|y| = 0$, mikä puolestaan toteutuu vain jos $x = 0 = y$.

3. Todista, että esimerkin 1.7.3 normi $|x|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$ todella on normi $\mathbb{R}^n$:ssä.

Ratkaisu. Ratkaisussa tarvitaan täysin samoja päättelyitä kuin tehtävissä 1 ja 2 on jo käytetty. Emme nyt kirjoita juurta jaksain joka kohtaa. Vertaa tarvittaessa todistusta edellisten tehtävien vastaaviin kohtiin.

Olkoot $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $a \in \mathbb{R}$. Selvästikin $|x|_1 \geq 0$. Todetaan normin ehdot:

(N1) $|x+y|_1 = |x_1 + y_1| + \cdots + |x_n + y_n| \leq |x_1| + |y_1| + \cdots + |x_n| + |y_n| = |x|_1 + |y|_1$

(N2) $|ax|_1 = |ax_1| + \cdots + |ax_n| = |a||x_1| + \cdots + |a||x_n| = |a|(|x_1| + \cdots + |x_n|) = |a||x|_1$

(N3) $|x|_1 = 0 \ \Rightarrow \sum_{i=1}^n |x_i| = 0 \ \Rightarrow \ x_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \ \Rightarrow x = 0.$

4. Olkoon E sisätuloavaruus ja $x, y \in E$. Todista ns. suunnikassääntö

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2.$$

Osoita, ettei edellisen tehtävän normi toteuta tätä, joten se ei voi olla peräisin mistään sisätulosta.

Ratkaisu. Sisätulo määrää avaruuden E normin kaavalla $|x|^2 = (x \cdot x)$ kaikilla $x \in E$. Käyttämällä tätä ja sisätulon ominaisuuksia S1-S5 (ks. Väisälä) voimme todeta

$$\begin{aligned}
&|x+y|^2 + |x-y|^2 = (x+y)\cdot(x+y) + (x-y)\cdot(x-y) \\
&= (x \cdot x) + (x \cdot y) + (y \cdot x) + (y \cdot y) + (x \cdot x) - (x \cdot y) - (y \cdot x) + (y \cdot y) \\
&= |x|^2 + 2(x \cdot y) + |y|^2 + |x|^2 - 2(x \cdot y) + |y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2.
\end{aligned}$$

Lasketaan aluksi edellisen tehtävän normilla erikseen suunnikassäännön molemmat puolet kun $x, y \in \mathbb{R}^2$. Olkoot $x = (6,1)$ ja $y = (1,3)$. Nyt

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = (7+4)^2 + (5+2)^2 = 121 + 49 = 170 \quad \text{mutta}$$

$$2|x|^2 + 2|y|^2 = 2 \times (6+1)^2 + 2 \times (1+3)^2 = 98 + 32 = 130.$$

Lisäksi edelliset laskut ovat täysin samat jos laskemme ne pisteille $x, y \in \mathbb{R}^n$, missä $x_1 = 6$, $x_2 = 1$, $y_1 = 1$, $y_2 = 3$ ja $x_i = 0$ ja $y_i = 0$ kaikilla $3 \leq i \leq n$.

Siispä suunnikassääntö ei toteudu millään $n > 1$ tehtävän 3 normille kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$, joten avaruuden $\mathbb{R}^n$ normi $|x|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ ei voi olla peräisin mistään sisätulosta. (Kun $n = 1$, normi tulee tavallisesta pistetulosta.)

5. Selvitä $B((0,0),6)$ tehtävään 1 liittyvän avaruuden $\mathbb{R}^2$ metriikan tapauksessa.

Ratkaisu. Kerratkaamme, että merkintä $B(z,r)$, missä $z \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$, tarkoittaa niiden pisteiden joukkoa joiden etäisyys pisteestä z on pienempää kuin r. Lisäksi muistamme, että lauseen 2.2 nojalla jokainen normi $\|\cdot\|$ määrää metriikan kaavalla $d(z,v) = \|z - v\|$.

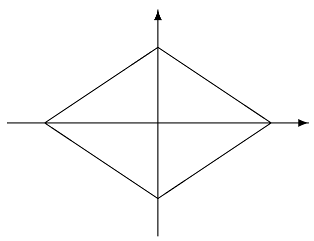
Kertauksen jälkeen voimme nyt ilmaista kuulan pisteet muodossa

$$B((0,0),6) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ |(x,y)|^* < 6\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ 2|x| + 3|y| < 6\}.$$

Kuulan pisteet ovat siis täsmälleen ne $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ joille pätee

$$2|x| + 3|y| < 6 \quad \Leftrightarrow \quad |y| < 2 - \frac{2}{3}|x|.$$

Ylläolevan suoran yhtälön tapaisen muodon avulla voimme hahmotella kuvan tarkastelemalla jokaisessa koordinaatiston neljänneksessä epäyhtälöä erikseen. Kuula on suunnikkaan sisus, kärkinä ovat pisteet $(0,2)$, $(3,0)$, $(0,-2)$ ja $(-3,0)$.



6. Selvitä $B((0,0),6)$ tehtävään 2 liittyvän avaruuden $\mathbb{R}^2$ metriikan tapauksessa.

Ratkaisu. Kuten tehtävässä 5, voimme ensin kirjoittaa kuulan pisteet muodossa

$$B((0,0),6) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ |(x,y)|^* < 6\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ 2|x| \vee 3|y| < 6\}.$$

Koska $\max\{2|x|, 3|y|\} < 6$ pätee tasan silloin kun $2|x| < 6$ ja $3|y| < 6$, niin kuulan pisteet ovat ne $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, joille on voimassa $|x| < 3$ ja $|y| < 2$. Tämänkin voimme hahmotella kuvana. Kuula on suorakulmion sisus.