Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I kevät 2014
Harjoitus 1 Malliratkaisut
Asko Tuomiaro

Nämä ratkaisut ovat vain eräs tapa tehdä alla olevat tehtävät. Oma ratkaisusi voi poiketa merkittävästikin alla esitetystä ja silti olla täysin oikein. Tärkeintä on, että olet ymmärtänyt, mitä tehtävässä kysytään ja ymmärrät ratkaisun idean. Lisäksi, jos löydät ratkaisusta virheitä, ota rohkeasti yhteyttä minuun esimerkiksi kurssin moodle-alustalla.

1. Oletetaan, että A ja B ovat joukkoja. Mitä seuraavat väitteet tarkoittavat, ja millä ehdoilla ne ovat totta:

   (i) $A \in B$,

   (ii) $A \subset B$,

   (iii) $A = B$.

Ratkaisu 1. (i) Väite tarkoittaa, että joukko A on joukon B alkio. Tämä on totta, jos joukko B on sellainen, että joukko A esiintyy sen alkiona. Esimerkiksi, jos joukoksi B valitaan yksiö $\{A\}$.

(ii) Väite tarkoittaa, että joukko A on joukon B osajoukko. Tämä on totta, jos jokainen joukon A alkio on myös joukon B alkio.

(iii) Väite tarkoittaa, että joukot A ja B sisältävät samat alkiot, eli ovat käytännössä sama joukko. Tämä on totta, jos $A \subset B$ ja $B \subset A$. On huomattava, että väittämä "joukko A on yhtäsuuri kuin joukko B" on joukko-opin näkökannalta täysin mieletön.

2. Merkitään $A = \{1, \{2, 3\}\}$. Anna esimerkki sellaisesta B, että

   (i) $B \in A$,

   (ii) $A \in B$,

   (iii) $B \subset A$ ja $A \neq B$,

   (iv) $A \subset B$ ja $A \neq B$.

Ratkaisu 2. (i) Olkoon $B = \{2, 3\}$. Ainoa toinen vaihtoehto on $B = 1$.

(ii) Olkoon $B = \{A\}$. Tämä käsiteltiinkin jo 1.(i).

(iii) Olkoon $B = \{1\}$. Ainoat muut vaihtoehdot ovat $B = \{\{2, 3\}\}$ tai $B = \varnothing$. Väite voidaan myös kirjoittaa lyhyemmin $B \subsetneq A$.

(iv) Olkoon $B = \{1, \heartsuit, \{2,3\}\}$. Tässä riittää oikeastaan, että $B = A \cup C$, missä C on sellainen joukko, että se sisältää alkion, joka ei esiinny joukossa A. Tässä $C = \{\heartsuit\}$.

3. Oletetaan, että A, B ja C ovat joukkoja. Todista de Morganin laki

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Ratkaisu 3. Osoitetaan, että yhtäsuuruusmerkin vasemmalla ja oikealla puolella olevat joukot ovat toistensa osajoukkoja.

”$\subset$” Oletetaan, että $x \in A \setminus (B \cup C)$. Tällöin pätee, että x on joukon A alkio, mutta ei joukon $B \cup C$ alkio, jolloin se ei voi olla kummankaan joukon B tai C alkio. Tällöin siis pätee, että $x \in A \setminus B$ ja $x \in A \setminus C$, eli siis x on näiden kahden joukon leikkauksen alkio. Siis $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

”$\supset$” Oletetaan, että $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Tällöin $x \in (A \setminus B)$ ja $x \in (A \setminus C)$, joten x on joukon A alkio, ja x ei ole kummankaan joukon B tai C alkio. Tällöin siis $x \in A$ ja $x \notin B \cup C$, joten $x \in A \setminus (B \cup C)$.

Koska molemmat suunnat pätevät, väite on tosi. $\square$

4. Ovatko ehdot $A \cap B = A$ ja $A \cup B = B$ yhtäpitäviä kaikilla joukoilla A ja B? Liittyvätkö nämä jotenkin osajoukkorelaatioon?

Ratkaisu 4. Osoitetaan, että ehdot ovat yhtäpitäviä olivatpa A ja B mitä tahansa joukkoja. On huomattava, että yhtäpitävyys tarkoittaa, että molemmat ehdot ovat tosia tai epätosia yhtäaikaa. Eli jos toinen on tosi, niin myös toinen on tosi, ja päinvastoin. Olkoot A ja B mitä tahansa joukkoja.

”$\Rightarrow$” Oletetaan, että $A \cap B = A$. Tällöin $A = A \cap B \subset B$, jolloin $A \cup B \subset B$. Toisaalta aina pätee, että $B \subset A \cup B$, joten siis $A \cup B = B$.

”$\Leftarrow$” Oletetaan, että $A \cup B = B$ Tällöin $A \subset A \cup B = B$, jolloin $A \subset A \cap B$. Toisaalta aina pätee, että $A \cap B \subset A$, joten siis $A \cap B = A$.

Siis ehdot ovat yhtäpitävät valittiinpa joukot A ja B miten vain. $\square$

5. Selvitä

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{k}\right).$$

Ratkaisu 5. Osoitetaan, että ylläoleva joukko on tyhjä tekemällä vastaoletus ja johtamalla ristiriita. Vastaoletus: ylläoleva joukko ei ole tyhjä, eli löytyy jokin x niin, että $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty}(0, 1/k)$. Tällöin $x \in (0, 1/k)$ jokaisella positiivisella kokonaisluvulla k, jolloin x on eräs alaraja joukolle $\{1/k \mid k \in \mathbb{N}, k \geq 1\}$. Siis

$$x > 0 \quad \text{ja} \quad x \leq \inf \{1/k \mid k \in \mathbb{N}, k \geq 1\},$$

mutta tämä on ristiriita, koska $\inf \{1/k \mid k \in \mathbb{N}, k \geq 1\} = 0$. Siis vastaoletus on epätosi, joten joukko $\bigcap_{k=1}^{\infty}(0, 1/k)$ on tyhjä. □

6. Oletetaan, että $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots$ on laskeva jono reaalilukujen joukon suljettuja välejä. Osoita, että leikkaus

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k]$$

on epätyhjä.

Ratkaisu 6. Havaitaan, että ylläolevat joukot muodostavat teleskooppimaisesti sisäkkäin olevan joukkoperheen. Tiedämme, että jokaisella ylhäältä rajoitetulla reaalilukujoukolla on supremum, ja vastaavasti jokaisella alhaalta rajoitetulla reaalilukujoukolla on infimum. Käytetään tätä hyödyksi antamalla n:n olla jokin positiivinen kokonaisluku, ja toteamalla, että ylläolevien joukkojen alkupisteille a_k pätee, että $a_k \leq b_n$ jokaisella k. Siis joukko $\{a_k \mid k = 1, 2, \ldots\}$ on ylhäältä rajoitettu ja b_n on jokin sen yläraja.

Merkitään nyt

$$\alpha = \sup \{a_k \mid k = 1, 2, \ldots\}$$

Ylläolevan perusteella nyt seuraa, että $\alpha \leq b_n$. Toisaalta $a_n \leq \alpha$, joten $\alpha \in [a_n, b_n]$ jokaisella n. Siis $\alpha \in \bigcap_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k]$, joten tuo joukko on siis epätyhjä. □

7. (a) Lue ääneen $\bigcup \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$.
   (b) Mikä on (a)-kohdan joukko?

Ratkaisu 7. (a) Lue ”yhdiste kaksioista, joissa ovat alkiot 1 ja 2, 2 ja 3, ja 3 ja 4.”

(b) Kyseessä on joukko $\{1, 2, 3, 4\}$.