MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Topologia I 2014
Tehtävät 31.3. alkavalle viikolle

Näissä harjoituksissa harjoitellaan raja-arvoihin liittyviä asioita. Kannattaa samalla kerrata vastaavia tietoja kursseilta analyysi I ja analyysi II (ja vektorianalyysi.)

1. (Tehtävä 11:1) Todista lause 11.12. ilman tuloavaruutta.

2. (Tehtävä 11:2) Oletetaan, että X on metrinen avaruus, $A \subset X$ ja (x_n) jono A:ssa. Osoita, että jonon (x_n) jokainen kasautumisarvo kuuluu joukkoon $\overline{A}$.

3. (Tehtävä 11:3) Oletetaan, että (x_n) on sellainen jono rationaalilukuja, että $\mathbb{Q} = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Osoita, että jokainen reaaliluku on jonon (x_n) kasautumisarvo.

4. (Tehtävä 11:6) Oletetaan, että X on metrinen avaruus ja $a \in X$. Oletetaan, että (x_n) on avaruuden X pistejono, jonka jokaisella osajonolla on osajono, joka suppenee kohti pistettä a. Osoita, että jono (x_n) suppenee kohti pistettä a. Väisälä kehottaa käyttämään vastaoletusta...

5. Tarkastellaan funktioita $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, missä $n \in \mathbb{N}$ ja missä $f_n(x) = 0$ kun $x \neq \frac{1}{n}$ ja kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee

(a) $f_n(\frac{1}{n}) = 1$;

(b) $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$.

Tutki suppenevatko kohtien (a) ja (b) jonot pisteittäin ja suppenevatko ne tasaisesti.

6. Oletetaan, että $X = \mathbb{R}^2$ varustettuna tavallisella metriikalla. Merkitään sen alkioita $z = (x, y)$ ja oletetaan, että $a = (0, 0)$. Merkitään

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\};$$

$$A = \{(x, y) \in H \mid y = x\};$$

ja

$$B = \{(x, y) \in H \mid y = 2x\}.$$

Tarkastellaan funktiota $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, joka on määritelty ehdolla

$$(f(z) =) f(x, y) = \frac{y}{x}.$$

Tutki seuraavia raja-arvoja

$$\lim\ _{z\to a, z\in A} f(z);$$

$$\lim\ _{z\to a, z\in B} f(z);$$

$$\lim\ _{z\to a, z\in H} f(z).$$