

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Topologia I I 2014

Tehtävät 27.1. alkavalle viikolle

Näissä harjoituksissa opiskellaan metrisiä avaruuksia ja aletaan opiskella avoimia joukkoja.

1. Oletetaan, että $X = \mathbb{R}$ ja d on sen tavallinen metriikka ($d(x, y) = |x - y|$.) Määritä $d(]0, 1[,]2, 4[)$.

2. Oletetaan, että $X = \mathbb{R}^2$ ja d sen tavallinen metriikka. Oletetaan, että $x \in B((0, 0), 1)$ ja $y \in B((4, 0), 2)$. Osoita, että $d(x, y) > 1$.

3. Oletetaan, että $X = \mathbb{R}$ ja $d(x, y) = |x - y|$ on sen tavallinen metriikka. Oletetaan, että joukko A on rajoitettu topologian kurssikirjamme mielessä. Osoita, että on olemassa $M > 0$, jolle $A \subset [-M, M]$.

4. Osoita, että jokainen reaalilukujen joukon avoin väli on avoin joukko.

5. Oletetaan, että $X = \mathbb{R}^2$ ja d sen tavallinen metriikka. Tarkastellaan joukkoa

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0 \text{ ja } x_2 < x_1 + 1 \text{ ja } x_2 < -x_1 + 1\}$$

Onko joukko A avoin?

6. Oletetaan, että (X, d) on metrinen avaruus ja $a \neq b$ kaksi sen alkioita. Merkitään $r = d(a, b)$. Osoita, että

$$B(a, \frac{r}{2}) \cap B(b, \frac{r}{2}) = \emptyset.$$