

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Topologia I 2014

Tehtävät 24.3. alkavalle viikolle

Näissä harjoituksissa harjoitellaan homeomorfismeja ja metriikkojen ekvivalenssia. Osa tehtävistä on hyvin lähellä kirjan esimerkkejä. Tarkoitus on, että asiat käydään itse yksityiskohtaisesti läpi.

1. (a) Osoita, että $[1, 2] \approx [3, 5]$. Tässä kumpaakin väliä tarkastellaan metrisenä avaruutena, joka on varustettu \mathbb{R} :n tavallisen metriikan indusoimalla metriikalla.

(b) Onko $\mathbb{R} \approx]0, 1[$, kun molempia joukkoja tarkastellaan metrisenä avaruutena edellisen kohdan tapaan?

2. Tarkastellaan tason \mathbb{R}^2 osajoukkoja

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, y < 1 + x \text{ ja } y < 1 - x\}$$

ja

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, y < 2 + 2x \text{ ja } y < 2 - 2x\}.$$

Tarkastellaan joukkoja A ja B metrisinä avaruuksina tehtävän 1 tapaan, kun taso \mathbb{R}^2 on varustettu tavallisella metriikalla. Osoita, että $A \approx B$.

3. Oletetaan, että (X, d) ja (Y, d') ovat metrisiä avaruuksia. Tarkastellaan bijektiota $f: X \rightarrow Y$, joka toteuttaa ehdot

$$d'(f(x), f(y)) \leq 3d(x, y) \text{ kun } x, y \in X$$

ja

$$d(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) \leq 2d'(u, v) \text{ kun } u, v \in Y.$$

Osoita, että f on bilipzchitz. Mikä muuttuu, jos luvut 3 ja 2 korvataan positiivisilla reaaliluvuilla K ja L ?

4. (Tehtävä 9:2) Onko kirjan kansikuvan koristeellinen viiva Jordanin käyrä?

5. (Osa kohdan 9.16 esimerkeistä (4)) Todista esimerkkien 9.16 kohdan (4) kaksi ensimmäistä väitettä.

6. Anna esimerkki kolmesta avaruuden \mathbb{R}^2 keskenään ekvivalentista metriikasta. Todista väitteesi.