

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Topologia I I2014

Tehtävät 27.2. alkavalle viikolle

Näissä harjoituksissa tutkaillaan suljettuja joukkoja, joukon sulkeumaa ja joukon kasautumispisteitä.

1. Oletetaan, että $X = \mathbb{R}$ (ja $d(x, y) = |x - y|$). Tarkastellaan joukkoa

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \dots \right\}.$$

Selvitä

- (a) joukon A erakkopisteet,
- (b) joukon A kasautumispisteet, ja
- (c) joukon A sulkeuma.

2. Oletetaan, että $X = \mathbb{R}$ (ja $d(x, y) = |x - y|$). Selvitä

- (a) $\overline{\mathbb{Q}}$, ja
- (b) $\overline{\mathcal{C}\mathbb{Q}}$.

3. (Teht 6:5) Oletetaan, että A ja B ovat reaalilukujen joukon \mathbb{R} suljettuja osajoukkoja. Osoita, että tulojoukko $A \times B$ on tason \mathbb{R}^2 suljettu joukko.

4. (Teht 6:11, osa) Osoita, että jatkuvan funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kuvaaja

$$\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

on suljettu joukko.

5. (Teht 6:20) Osoita, että kaikilla $A \subset X$ pätee

$$\overline{A} = \bigcap \{E \mid A \subset E \text{ ja } E \text{ on suljettu}\}.$$

6. Osoita, että jokainen vektoriavaruuden \mathbb{R}^2 aliavaruus on suljettu joukko, kun tarkastellaan luonnollista metriikkaa $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.