MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Topologia I 2014
Tehtävät ajalle 14.4. - 25.4.

Näissä kevään viimeisissä harjoituksissa opiskellaan kompaktiutta ja yhtenäisyyttä.

1. (Tehtävä 13:3) Tutki seuraavista avaruuden $\mathbb{R}$ osajoukoista, ovatko ne (a) kompakteja, (b) täydellisiä:

$$A = \{(x,y) \mid x^2 + 3y^2 \leq 4\},$$

$$B = \{(x,y) \mid x^2 + 3y^2 < 4\},$$

$$C = \{(x,y) \mid xy = 1\}.$$

2. (Tehtävä 13:12) Osoita, että diskreetti avaruus on kompakti, jos ja vain jos se on äärellinen.

3. (Tehtävä 14:12) Merkitään $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 2|y|\}$.
(a) Onko E yhtenäinen?
(b) Onko $\overline{E}$ yhtenäinen? (Vihje: Kannattaa huomata lause 14.23.)

4. (Tehtävä 14:7) Oletetaan, että metrinen avaruus X on yhtenäinen ja että $A, B \subset X$ ovat epätyhjiä. Osoita, että on olemassa sellainen piste $x \in X$, että $d(x,A) = d(x,B)$. Vihje: tarkastele funktiota $f(x) = d(x,A) - d(x,B)$.

5. (Tehtävä 14:10) Olkoon $n \geq 1$ ja $f\colon S^n \to \mathbb{R}$ jatkuva. Osoita, että on olemassa pallon S^n vastakkaiset pisteet x ja $-x$, joissa f saa saman arvon. Vihje: Tarkastele funktiota $g(x) = f(x) - f(-x)$. (Tapauksessa $n = 2$ tästä seuraa, että maapallolla on joka hetki kaksi vastakkaista pistettä, joissa on sama lämpötila.)

6. (Tehtävä 14:20) Osoita, että rationaalilukujen avaruuden $\mathbb{Q}$ komponentit ovat yksiöitä.

PÄÄSIÄISMUNA. (Tehtävä 13:14) Oletetaan, että $X \neq \emptyset$ on kompakti. Osoita, että avaruudessa X on pistejono, jonka kasautumisarvoja ovat kaikki avaruuden X pisteet.