

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Topologia I 2014

Tehtävät 10.3. alkavalle viikolle

Näissä harjoituksissa kerrataan alkukevään asioita ja luodaan katse lukuun 7.

1. Tarkastellaan joukkoa $X = \mathbb{R}^2$ ja merkitään sen alkioita $x = (x_1, x_2)$ ja $y = (y_1, y_2)$ jne. Onko seuraavilla ehdoilla määritelty funktio

$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ metriikka

- $d(x, y) = 0$, kun $x_1 = y_1$ ja $x_2 = y_2$,
- $d(x, y) = 1$, kun $x_1 \neq y_1$ ja $x_2 = y_2$,
- $d(x, y) = 2$, kun $x_1 = y_1$ ja $x_2 \neq y_2$, ja
- $d(x, y) = 3$, kun $x_1 \neq y_1$ ja $x_2 \neq y_2$?

2. Tarkastellaan metristä avaruutta (X, d) , missä $X = \mathbb{R}^2$ ja d on tavallinen metriikka. (Ts. $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.) Osoita, että joukko

$$A = \{(x_1, x_2) \in X \mid e^{x_1} < x_2 < 7 - e^{-2x_1}\}$$

on avoin.

3. Tarkastellaan metristä avaruutta (\mathbb{Q}, d) , missä $d(x, y) = |x - y|$. Tarkastellaan funktiota $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, missä kaikilla $x \in \mathbb{Q}$ pätee $f(x) = -1$ kun $x^2 < 2$ ja $f(x) = 1$ kun $x^2 > 2$. Onko f jatkuva?

4. Tarkastellaan metristä avaruutta (\mathbb{Q}, d) , missä $d(x, y) = |x - y|$. Osoita, että tämä avaruus on kahden epätyhjän erillisen avoimen joukon yhdiste. Vihje: luvusta $\sqrt{2}$ on hyötyä.

5. Seuravissa kysymyksissä pohditaan kaikkia metrisiä avaruuksia.

- (a) Voiko äärellinen joukko olla avoin?
- (b) Voiko äärellisellä joukolla olla kasautumispisteitä?

6. Kirjoita lauseesta 7.2 ja sen todistuksesta itsellesi ymmärrettävä selitys. Tämän(kin) tehtävän saa tehdä porukalla.