

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Topologia I 2014

Tehtävät 10.2. alkavalle viikolle

Näissä harjoituksissa opiskellaan jatkuvia kuvauksia ja aletaan opiskella suljettuja joukkoja. (Joukko on suljettu, jos sen komplementti on avoin.)

1. (Tehtävä 4:6) Osoita, että jokainen metristen avaruuksien välinen kuvaus $f: X \rightarrow Y$ on jatkuva jokaisessa X :n erakkopisteessä.

2. (Tehtävä 4:9) Tarkastellaan funktiota $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, joka on määritelty ehdolla $f(x) = x^2$. Onko f jatkuva, kun

- (a) lähdössä on tavallinen metriikka ja maalissa $\{0, 1\}$ -metriikka
- (b) metriikat ovat päinvastoin kuin a-kohdassa.

3. (Tehtävä 4:11) Tarkastellaan yhtälöllä $f(x) = 5x^2 + 6x + 7$ määriteltyä funktiota $f: [-10, 5] \rightarrow \mathbb{R}$. Määritä väliarvolauseen avulla jokin sellainen M , että f on M -Lipschitz.

4. (Tehtävä 5:1) Todista, että jatkuvien kuvausten sisätulo on jatkuva (jos se on määritelty.)

5. Osoita, että reaalilukujen joukon suljettu väli on suljettu joukko.

6. Osoita, että metrisen avaruuden suljettu kuula $\overline{B}(a, r)$ on suljettu joukko.